UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST AUG 1 1923

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci25fran

7330

1

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

# COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

## SECTION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

MM. G. DARBOUX, *président*.

H. POINCARÉ.

J. TANNERY.

E. PICARD.

P. APPELL.

FOUSSEREAU, *secrétaire*.

## AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

30068 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Math
B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BOUGAIEFF, BROCARD, GOURSAT,
G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

**Sous la direction de la Commission des Hautes Études.**

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOUËL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUËL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1900 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

*DEUXIÈME SÉRIE.*

**TOME XXV. — ANNÉE 1901.**

(XXXVI^e VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179869
24/4/23

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

QA
1
B8
v.36

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.


## PREMIÈRE PARTIE.

### COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KNESER (Adolf). — Lehrbuch der Variationsrechnung, 1 vol. in-8°, xv-311 p. Braunschweig, Vieweg, 1900.

C'est un livre depuis longtemps nécessaire que nous donne M. Kneser, et c'est une sorte de scandale mathématique qu'il fait cesser.

On sait, en effet, que si les applications du calcul des variations ont été constamment en s'élargissant et en s'enrichissant de résultats nouveaux et importants, les fondements de cette doctrine n'avaient pas sensiblement progressé depuis sa création. Or ces fondements étaient tout à fait insuffisants et incapables de répondre à l'idée que nous nous faisons de la rigueur mathématique. Les objections qu'ils soulèvent sont bien connues : pour ne citer qu'un exemple, toute la théorie repose sur la réduction du problème à une question de maximum ou de minimum ordinaire, les variations de la fonction inconnue étant supposées dépendre de celles d'un paramètre $\alpha$. Or le raisonnement par lequel on justifie cette réduction ne s'applique qu'à un maximum *absolu*, et ce sont les équations du maximum *relatif* que l'on apprend à former. Il n'est pas nécessaire d'être bien strict, au point de vue

de la rigueur, pour refuser à une pareille déduction toute valeur probante. Si l'on songe au nombre toujours croissant des questions dans lesquelles intervient le calcul des variations en mathématiques, si l'on remarque surtout qu'il constitue le premier exemple d'une série de recherches destinées, sans nul doute, à jouer un rôle capital en analyse, à savoir celles auxquelles M. Pincherle donne le nom de *Calcul fonctionnel* et où c'est la fonction elle-même, et non plus le nombre, qui joue le rôle d'élément variable, on conviendra qu'il était indispensable de donner à cette branche de la Science des bases plus solides.

Or ce résultat avait été atteint par Weierstrass. Mais, dans cette circonstance comme dans plusieurs autres, le géomètre allemand s'était contenté de faire connaître sa méthode à ses auditeurs et n'avait rien publié de ses découvertes à cet égard. On savait donc qu'il existait une exposition rigoureuse du Calcul des variations : mais on n'avait aucune donnée sur ce qu'elle pouvait être, ou, plus exactement, on n'avait sur elle que des données très insuffisantes. La thèse de M. Zermelo et les Mémoires de M. Kobb permettaient bien, à la rigueur, de reconstituer par à peu près les principales idées du maître sur ce point. Mais, dans ces ouvrages, consacrés, avant tout, à des résultats nouveaux étendant ceux de Weierstrass, l'exposition de ces derniers est forcément très sommaire : en réalité, ce sont les leçons de Weierstrass qui sont nécessaires pour l'intelligence des travaux en question; en leur absence, la lecture de ces derniers devenait très difficile, et il était à peu près impossible de faire le départ entre la théorie générale et les compléments qu'y ont apportés MM. Zermelo et Kobb.

M. Kneser avait toute la compétence nécessaire pour nous donner l'exposition dont le besoin se faisait si vivement sentir. On sait qu'il avait lui-même apporté, dans plusieurs travaux insérés aux *Mathematische Annalen,* une contribution importante au Calcul des variations. Il a pu faire, en même temps qu'un Ouvrage d'exposition, une œuvre personnelle.

Il est une qualité dont il semble que nous lui soyons particulièrement redevables, du moins autant qu'on en peut juger avec le peu de points de comparaison que nous possédons : c'est la simplicité et l'élégance qu'il arrive à donner au raisonnement sans

rien sacrifier de la parfaite rigueur qui est la condition d'existence d'un travail de cette espèce.

Lorsque l'auteur, après avoir indiqué, d'après les méthodes classiques, les transformations fondamentales et les conditions nécessaires de maximum, aborde (Chapitre III) la question vraiment délicate, la recherche des conditions suffisantes, rien n'est plus clair et plus naturel que la marche suivie par lui. On sait combien la question se présente simplement, dans les *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. Darboux, pour les lignes géodésiques. C'est cette même manière d'opérer que M. Kneser transporte au problème général. Dans l'un et l'autre cas, les lignes qui satisfont aux équations différentielles préalablement obtenues servent à constituer un système de coordonnées curvilignes. La condition d'orthogonalité est remplacée par une condition dite *de transversalité,* celle même qui s'introduit dans les questions de Calcul des variations où les limites ne sont pas fixes.

Le Chapitre IV traite des maxima et minima *relatifs* (c'est-à-dire où des conditions restrictives sont imposées aux fonctions inconnues). On sait que, sur ce point aussi, des perfectionnements importants ont dû être apportés aux démonstrations primitives.

Il en est de même pour le cas étudié au Chapitre suivant, celui où le maximum ou le minimum est fourni par une ligne formée d'arcs analytiquement différents et se rejoignant à angle, et à l'égard duquel l'application du principe de la moindre action pose de curieux problèmes.

Je n'insisterai pas sur l'extension de la méthode aux intégrales contenant des dérivées d'ordre supérieur; mais je dois signaler le Chapitre consacré à un problème bien plus général que celui du maximum ou du minimum des intégrales définies, je veux parler du maximum ou du minimum de quantités définies par des équations différentielles.

L'ouvrage se termine par l'étude des intégrales doubles et la généralisation, à ces intégrales, des méthodes précédemment développées.

Si j'ajoute que, d'un bout à l'autre de l'Ouvrage, la théorie est éclairée par une série d'exemples, j'espère avoir donné une idée du très grand intérêt que présente le volume de M. Kneser. Que

l'auteur permette une légère critique : il me paraît avoir fait intervenir d'une façon un peu trop constante le développement de Taylor, ce qui a l'inconvénient de supposer, ou de paraître supposer les fonctions sur lesquelles on opère analytiques : la plupart des raisonnements présentés sont complètement indépendants de cette hypothèse, et il y aurait quelque intérêt à mettre ce fait en évidence.

J. HADAMARD.

ROUCHÉ (E.) et LÉVY (L.). — ANALYSE INFINITÉSIMALE A L'USAGE DES INGÉNIEURS. T. I. Calcul différentiel. — Dérivées et différentielles. — Changement de variables. — Séries. — Formule de Taylor. — Courbes planes et gauches. — Surfaces. — Congruences. — Complexes. — Lignes tracées sur les surfaces. Un vol. grand in-8°, de l'*Encyclopédie industrielle,* fondée par M. Lechalas. VIII-537 p. Paris, Gauthier-Villars; 1900.

En quoi un Traité d'Analyse destiné aux ingénieurs doit-il se distinguer des autres Traités d'Analyse? C'est là une assez grosse question.

Pour ce qui est des matières que doit contenir un pareil Livre, on aperçoit tout d'abord la nécessité d'y faire entrer un certain nombre de propositions, de méthodes et d'idées fondamentales qui figurent dans tous les Traités d'Analyse et qui permettent de traiter les problèmes techniques, comme ceux que pose naturellement la théorie. On aperçoit aussi l'impossibilité, si l'on ne veut pas que le Traité d'Analyse soit, à lui seul, toute une encyclopédie, d'y faire figurer la mise en équation des problèmes techniques; celle-ci regarde, non l'Analyse, mais les Sciences appliquées; il appartient à ces Sciences de définir les éléments mathématiques que l'on substitue aux objets réels, de critiquer les conditions dans lesquelles cette substitution est légitime et le degré d'approximation qu'elle permet; il leur appartient de développer les principes ou les hypothèses sur lesquels se fonde la mise en équation; l'œuvre de l'analyste consiste uniquement à traiter ces équations. Notre Livre devra donc contenir ce qui est indispensable pour résoudre les équations que posent les Sciences appliquées; que ces équations même, toutes les fois que cela sera possible,

soient choisies comme exemple, plutôt que d'autres, cela est encore indiqué. On remarquera que cette limitation est assez vague : sait-on jamais si une méthode ne pourra pas servir à la résolution d'un problème pratique? Il y a là, comme partout, une affaire de mesure. Certaines méthodes sont éprouvées; il y a nombre de problèmes auxquels elles s'adaptent; d'autres méthodes n'ont, jusqu'à présent, aucune application pratique; on les sacrifiera, sans hésiter, quel que soit leur intérêt propre; d'autres encore sont certainement susceptibles d'être appliquées; mais elles exigent un développement mathématique plus ou moins considérable, que quelques hommes adonnés à un métier pratique peuvent sans doute acquérir, qu'il serait déraisonnable de demander à tous, ou à beaucoup. C'est ici que le jugement de l'Auteur doit s'exercer, d'après les connaissances même qu'il suppose chez ses lecteurs, d'après l'utilité réelle des méthodes qu'il se décidera à développer ou à supprimer.

Je crois bien avoir signalé, ici même, à propos d'un Livre élémentaire destiné aux élèves ingénieurs de langue allemande, et dont M. Kiepert a refondu les éditions successives, l'appel qu'il adressait dans sa préface aux ingénieurs : « Écrivez-moi, leur demandait-il, ce que vous trouvez qui manque dans mon Livre, ou ce qui est de trop. » Cet appel me semble fort raisonnable. Il appartient au savant d'enchaîner les idées et les démonstrations, à l'homme de métier de savoir ses propres besoins. A la vérité, il ne les sait pas toujours aussi bien qu'on pourrait croire, quelquefois parce qu'il ne réfléchit pas sur son art, quelquefois par pure ignorance, parce qu'il ne pense pas aux choses qui lui manquent et dont il ne sait pas qu'elles existent et qu'il pourrait se servir. Il est vrai aussi qu'on peut être à la fois un ingénieur et un savant; cela n'est pas rare dans notre pays, où quelques-uns sont même savants dans leur métier. Une sorte de consultation comme celle dont je parlais tout à l'heure donnerait sans doute des résultats intéressants.

D'après la nature même des choses, c'est surtout la partie d'un Traité d'Analyse qui est consacrée à l'intégration qui, par la limitation du sujet et le choix des exemples, pourra se distinguer nettement suivant qu'elle s'adresse à des hommes pratiques ou à des théoriciens.

Quant à l'esprit dans lequel un tel Livre devra être écrit, comment le caractériser? Tout d'abord, et c'est un point dont MM. Rouché et Lévy se sont parfaitement rendu compte, un Traité d'Analyse destiné à des praticiens devra reprendre les choses au commencement, et l'on y devra insister comme il faut sur les débuts. Chez nous, l'enseignement de l'Analyse est répandu dans les classes préparatoires aux écoles techniques, et dans ces écoles mêmes; on peut aussi bien oublier ce que l'on a appris ici que là, et c'est dans un même Livre qu'il faut pouvoir le retrouver. Il y faudra un degré de rigueur suffisant pour que le lecteur ne risque pas de se tromper dans les applications. Ce degré-là est certainement atteint dans le Livre que nous annonçons. S'il est même quelquefois dépassé, c'est sans doute que les Auteurs ont voulu tenir compte des habitudes qu'on a inculquées à ceux qui doivent le lire, et si ces derniers avaient reçu une éducation différente, MM. Rouché et Lévy auraient sans doute osé faire à l'intuition un appel encore plus large. Il était très naturel qu'ils fussent préoccupés de cette éducation de leurs lecteurs, et l'on ne peut s'étonner que cette préoccupation ait même influé sur le choix des matières qu'ils ont développées : « Nous pensons, disent-ils dans leur préface, n'avoir rien omis de ce qui est nécessaire aux jeunes Ingénieurs, soit pour leurs recherches techniques, soit pour l'obtention des grades universitaires. » C'est sans doute que leurs lecteurs, par l'éducation même qu'ils ont reçue, sont assez voisins, pour être tentés parfois de conquérir ces « grades universitaires », des connaissances théoriques qu'il faut bien exiger de ceux qui s'y préparent. Mais, si l'obtention des « grades universitaires » est un des buts que l'on a en vue, le livre qu'on écrit ne pourra pas différer essentiellement des traités classiques; la différence ne pourra guère porter que sur des sujets qui ne sont pas développés dans ces derniers traités et qui sont particulièrement utiles pour les « recherches techniques ». C'est ce que nous ne pouvons manquer de voir dans le second Volume, consacré au Calcul intégral, car, encore une fois, pour ce qui concerne le Calcul différentiel, je n'aperçois guère ce que l'on aurait pu y ajouter. J'aperçois bien quelques paragraphes sur les *congruences* ou les *complexes* que l'on aurait pu supprimer; mais ils sont fort courts et élégamment traités, comme toutes les applications

géométriques; après les avoir lus, on est moins disposé à en demander le sacrifice. Encore pourrait-on défendre les complexes par les applications qu'on en fait en mécanique. Il serait sans doute plus difficile de justifier l'exemple d'une cubique gauche imaginaire à courbure et à torsion constantes, et l'on ne prévoit guère d'applications pour cette courbe-là; mais cela tient quelques lignes et, du moment que l'on parle des imaginaires, il n'est peut-être pas inutile de montrer, par un exemple curieux, que les conclusions établies quand on suppose les éléments réels ne se peuvent transporter sans précaution dans un autre domaine. La confusion de ces deux domaines est une des erreurs dans lesquelles tombent aisément les commençants, et l'enseignement qu'ils reçoivent y contribue quelquefois.

Une autre qualité que rechercheront sans doute les hommes pratiques, c'est la facilité à retrouver un résultat dont ils ont besoin. Quel est ce résultat et où est-il? Le temps leur manque; ils sont pressés d'arriver au bout de leur calcul et, si même ils savent le faire, ils seront bien aises qu'on leur évite une recherche, un recommencement, peut-être une erreur. Ailleurs, il peut être bon de tout sacrifier à l'enchaînement des théories, à la pénétration de leur signification profonde. Ici, les résultats doivent être mis en vedette. Dans le Livre de MM. Rouché et Lévy, les divisions sont bien nettes, les recherches faciles; nul doute que les Auteurs ne s'efforcent, dans la partie de leur Ouvrage qui sera consacrée au calcul intégral, d'exagérer encore cette qualité pratique, précieuse pour tous, essentielle pour la classe de lecteurs auxquels ils s'adressent.

Il me reste à décrire rapidement l'ordre adopté. Les quatre premiers Chapitres se rapportent aux principes, à la définition et au calcul des dérivées. Deux Chapitres sont ensuite consacrés à la notation différentielle. Il y a peut-être lieu de noter que le caractère infiniment petit des différentielles est franchement mis de côté : les différentielles des variables indépendantes sont regardées comme des accroissements quelconques donnés à ces variables; on pourrait aussi bien dire comme des paramètres associés à ces variables. De cette façon la contradiction, au moins apparente, qu'il y a à regarder les différentielles des variables indépendantes à la fois comme des constantes et comme des infiniment

petits est évitée. Le changement de variables est présenté comme application de la notation différentielle.

La théorie des séries, de la formule de Taylor, des séries de fonctions, la définition des fonctions simples d'une variable imaginaire sont présentées avec tous les détails désirables.

Le développement que les Auteurs ont donné à la théorie des courbes planes algébriques donne lieu de penser qu'ils se réservent de toucher à des théories assez élevées de calcul intégral : ils établissent, par exemple, les formules de Plücker, et donnent la définition générale du *genre*. L'étude d'une courbe algébrique autour d'un de ses points est poussée assez loin.

J'ai déjà parlé du soin avec lequel sont traitées les applications géométriques. Ici encore on ne saurait reprocher aux Auteurs d'avoir rien omis d'essentiel, et le lecteur leur saura gré d'avoir su résumer tant de choses importantes dans des pages aussi courtes, aussi claires et d'une lecture aussi facile. Il désirera lire les excellents Livres auxquels MM. Rouché et Lévy le renvoient de temps en temps, et cette lecture développera tout au moins son intelligence théorique.

J. T.

---

LÜROTH (J.). — Vorlesungen über numerisches Rechnen. Mit 14 Figuren im Text. Un vol. in-8°; VI-194 p. Leipzig, Teubner; 1900.

La publication de ces Leçons sur le Calcul numérique, dont l'auteur est connu par d'excellents travaux mathématiques, semble être un indice de plus de la tendance visible des Universités allemandes de faire une place grandissante aux choses utiles et concrètes; que cette tendance puisse s'allier avec une très grande élévation de l'enseignement théorique, et que, en particulier, l'art du Calcul numérique soit très précieux au pur théoricien, c'est ce que, sans doute, personne n'a envie de contester. Que cet art soulève une foule de questions délicates, curieuses, difficiles par leur minutie même, cela encore est bien certain. Que ces questions aient préoccupé des savants tels que Gauss ou Fourier, il ne faut pas l'oublier. Qu'il convienne de faire, dans l'enseignement, une part plus large au Calcul numérique, c'est ce que tout le monde

est disposé à reconnaître, sinon à mettre en pratique. Le Livre de M. Lüroth vient combler une lacune évidente : cette lacune, malheureusement, est très visible en France, où, sauf une note de M. le commandant Guyou, aussi précieuse qu'elle est courte, quelques Livres scolaires, comme celui de M. Griess, quelques indications dans les Traités classiques d'Arithmétique, quelques articles sur des points particuliers, parmi lesquels les lecteurs du *Bulletin* n'ont pas oublié celui que M. Darboux a consacré à l'extraction de la racine carrée, on n'a à peu près rien publié, sur le sujet, depuis la *Théorie générale des approximations* de M. Vieille, qui remonte à 1852.

Les Leçons de M. Lüroth sont pleines de choses intéressantes; avant de parler de leur objet essentiel et des matières qui y sont traitées, disons que l'auteur n'a pas dédaigné de donner d'excellents conseils, même sur la nature du papier qu'il est bon d'employer, et sur le temps pendant lequel il convient de laisser reposer un calcul, avant de le reprendre pour le recommencer ou le vérifier; ni de renseigner le lecteur sur les principales Tables numériques, ou sur les machines à calculer. Enfin il n'a oublié ni l'histoire, ni la bibliographie.

Ces Leçons ne sont pas destinées à des commençants; elles supposent l'habitude du calcul algébrique et des éléments de l'Analyse; elles rendront les meilleurs services tout d'abord à ceux qui ont besoin d'apprendre les matières dont elles traitent, aux calculateurs de profession et aux astronomes en particulier, mais encore aux maîtres qui ont à donner un enseignement élémentaire, et qui désirent en savoir plus que leurs élèves : ils y trouveront nombre de remarques ingénieuses dont ils pourront faire profiter ces derniers.

Trois Chapitres sont consacrés aux généralités et aux opérations fondamentales de l'Arithmétique. On y remarquera en particulier une discussion approfondie de la méthode de Fourier pour la division. Un Chapitre traite des machines à calculer : l'auteur y décrit les machines de Leibniz, de Selling, de Steiger-Egli. Les règles concernant les erreurs qui résultent, pour les opérations fondamentales, de l'imperfection des données, la multiplication abrégée sont expliquées en quelques pages substantielles. Le Chapitre sur les fautes qu'entraîne l'usage des Tables à

sept décimales au plus, et en particulier l'interpolation linéaire, contient des résultats dont l'importance pratique ne peut échapper. M. Lüroth y étudie successivement les Tables de logarithmes ordinaires, les Tables trigonométriques, les Tables de logarithmes d'addition. Les Tables à un plus grand nombre de décimales exigent ou peuvent exiger une interpolation quadratique : celle-ci est étudiée à fond. L'auteur traite ensuite des divers moyens connus pour obtenir les logarithmes à neuf, quinze, vingt, trente, ... décimales.

L'extraction de la racine carrée (méthode ordinaire, méthode de M. Darboux, méthode de Fourier ...), l'extraction de la racine cubique occupent l'avant-dernier Chapitre. Le dernier est consacré aux équations trinomes (équations du troisième degré, méthode de Gauss ...) et à diverses méthodes d'approximation (fausse position, méthode des substitutions, méthode de Newton, méthode des différences logarithmiques ...).

On voit que la matière est suffisamment riche; naturellement c'est par le détail surtout qu'elle vaut.

J. T.

HEGER (R.). — Fünfstellige logarithmische und goniometrische Tafeln, sowie Hülfstafeln zur Auflösung höherer numerischer Gleichungen für den Gebrauch an höheren Schulen. Un vol. in-8°; 112 p. Leipzig et Berlin, Teubner, 1900.

Voici une Table de logarithmes destinée aux écoliers : outre son intérêt propre, elle renseigne l'étranger qui la feuillette sur les habitudes et les tendances des écoles en vue desquelles l'auteur et l'éditeur l'ont composée.

Tout d'abord, en ce qui concerne la beauté et la clarté de l'exécution typographique. il n'y a qu'à louer l'un et l'autre, pour le souci qu'ils paraissent avoir de ne pas fatiguer les yeux des écoliers. Les logarithmes de 100 à 10000 tiennent sur 21 pages; la disposition est à double entrée; il y a sur chaque page $50 \times 10$ logarithmes.

Pour les fonctions trigonométriques, la disposition est un peu

différente de celle qu'on adopte habituellement : pour le sinus et la tangente, la Table va de 0 à 90°. On évite peut-être, par cette disposition, quelques distractions dans l'interpolation. Pour les six premiers degrés, les arcs vont de 10″ en 10″; au delà, de minute en minute : chaque page contient 9°.

On trouvera ensuite une série de Tables dont quelques-unes sont manifestement très utiles : longueurs d'arc, valeurs naturelles du sinus et de la tangente de 10′ en 10′, logarithmes d'addition et de soustraction, carrés des nombres de 100 à 999, avec cinq chiffres exacts, racines carrées des nombres de 100 à 999 avec quatre chiffres; puis, d'autres Tables encore dont l'utilité est moins évidente. Passe pour celle qui donne les valeurs de $x^3 + x$ et de $x^3 - x$, qui peut bien rendre quelques services pour la résolution des équations du troisième degré, mais il y en a une douzaine qui donnent les valeurs de $\frac{1}{3}x^3 + x$, de $\frac{x^3}{x-1}$, de $\frac{x^3}{x^2-1}$, ..., dont il semble bien qu'on aurait pu se dispenser : elles sont évidemment destinées à familiariser les élèves avec l'usage de Tables, et l'on a pensé sans doute que l'habitude qu'ils prendraient ainsi leur serait ensuite précieuse : ces Tables répondent à une série de petits problèmes géométriques, sur lesquels les maîtres sont en quelque sorte invités à choisir des exercices numériques que devront traiter leurs élèves, et l'auteur les a sans doute voulues assez nombreuses pour laisser plus de liberté aux maîtres dans le choix de ces exercices. Quoique ces raisons soient fort bonnes, quoiqu'elles indiquent un souci d'habituer les élèves au calcul numérique qu'on regrette de ne pas voir chez nous, la multiplicité de ces petites Tables, la façon arbitraire dont elles ont forcément été choisies, étonnent quelque peu. Par contre on regrette l'absence de certaines Tables d'un usage véritablement fréquent : c'est sans doute parce qu'il n'est pas question, dans les écoles auxquelles M. Heger a destiné ses Tables, ni du logarithme naturel, ni de la fonction exponentielle, ni des fonctions hyperboliques, qu'il n'a fait aucune place à ces fonctions; mais il n'est pas mauvais qu'il y ait, dans un Livre destiné à des écoliers, quelques pages qui ne leur soient pas immédiatement utiles et dont le mystère les préoccupe. Pourquoi n'avoir pas mis de Tables de logarithmes et d'antilogarithmes à quatre décimales? elles tiennent si

peu de place et sont d'un usage si commode? Peut-être leur préfère-t-on la règle à calcul? Si même il en est ainsi, ce n'est pas raison suffisante pour les écarter.

A ces Tables M. Heger a joint un assez grand nombre de données astronomiques et physiques; le lecteur français cherchera presque toujours ces données-là dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, qui restera l'almanach des gens instruits; pour un écolier, elles y sont peut-être trop nombreuses, et l'idée de les placer dans une Table de logarithmes me paraît excellente : Rappelons que Hoüel avait fait à ces données une petite place (mais trop petite) dans ses Tables à cinq décimales. Enfin la dernière Table que l'on trouvera dans le Livre de M. Heger est une Table de mortalité; l'auteur a eu la bonne idée d'y joindre quelques renseignements sur l'usage qu'on en peut faire pour le calcul théorique d'une rente viagère ou d'une assurance; aussi bien, je me suis toujours étonné de ne pas voir figurer ces renseignements-là dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

J. T.

---

LORENZ (H.). — Dynamik der Kürbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffs-Maschinen. 1 vol. in-8°; 156 p. Leipzig, Teubner; 1901.

L'auteur de cet important travail est un ingénieur; il est en même temps professeur à l'Université de Göttingen, et je vois dans les nouvelles du *Bulletin de l'American mathematical Society* qu'il doit, cet été, faire un cours sur les applications de la Thermodynamique.

L'étude cinématique des bielles et des manivelles est évidemment insuffisante pour les besoins de la pratique actuelle; la supposition d'une vitesse constante dans l'arbre de couche, acceptable pour les machines à vapeur fixes, est inadmissible dans un grand nombre de cas, en particulier pour les machines des bateaux à vapeur. M. Lorenz a repris la question au point de vue dynamique, en partant du principe de d'Alembert et de l'équation du travail. Il parvient ainsi, en premier lieu, et par une voie très

naturelle, aux équations de condition que M. Schlick a prises pour base de la compensation des masses, d'autre part à la détermination des oscillations de la vitesse.

L'exposition est nettement analytique; en dehors des principes de la Mécanique, elle met en œuvre les séries trigonométriques, dont l'auteur tire un très grand parti. Des applications numériques montrent nettement comment les méthodes doivent être appliquées. Le livre de M. Lorenz s'adresse aux ingénieurs et aux mathématiciens; l'importance pratique des résultats obtenus est égale à l'intérêt théorique du problème que l'auteur a traité.

J. T.

---

# MÉLANGES.

## SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE ET L'EXPLICATION MÉCANIQUE DES PHÉNOMÈNES NATURELS [1];

PAR M. ÉMILE PICARD.

### I.

A la fin du dix-huitième siècle les principes de la Mécanique semblaient au-dessus de toute critique, et l'œuvre des fondateurs de la science du mouvement formait un bloc que l'on croyait devoir défier à jamais le temps. Depuis cette époque, une analyse pénétrante a examiné à la loupe les fondations de l'édifice. En fait, là où les Lagrange et les Laplace trouvaient toutes choses simples, nous rencontrons aujourd'hui les plus sérieuses difficultés. Tous ceux qui ont eu à enseigner les débuts de la Mécanique, pour peu qu'ils aient réfléchi par eux-mêmes, ont senti

---

[1] HERTZ, *Die Prinzipien der Mechanik*, Leipzig, 1894. BOLTZMANN, *Vorlesungen ueber die Principe der Mechanik*, Leipzig, 1897. PICARD, *Une première leçon de Dynamique* (*L'Enseignement mathématique*, 1900). BOLTZMANN, *Ueber die Grundprincipien und Grundgleichungen der Mechanik*, conférence faite à Clark University, 1900.

combien les expositions plus ou moins traditionnelles des principes sont incohérentes. Elles sont trop souvent imprégnées de ce dualisme entre force et matière qui s'était introduit dans l'ancienne Mécanique; la force y paraît être un agent particulier qui est la cause du mouvement de la matière. Aussi d'illustres physiciens ont-ils voulu rompre avec les anciennes habitudes. Abandonnant complètement le point de vue historique du développement de la Science, ils se placent à un point de vue analogue à celui du géomètre qui construit une Géométrie en partant d'une certain nombre d'axiomes; leur méthode est ainsi toute *déductive*. Une telle manière de procéder a ses avantages et ses inconvénients. Les avantages sont que l'exposition est d'une clarté parfaite et que le système est bien enchaîné; on construit ainsi de toutes pièces et *a priori* un ensemble de représentations, et l'on en tire toutes les conséquences possibles. C'est seulement quand l'exposition du système est complète que l'on compare les résultats avec l'expérience. Cette façon de procéder est évidemment très philosophique; elle avoue en quelque sorte nettement dès le début que le seul but de la Science est de chercher un système d'images que nous faisons correspondre à la réalité et qui permettent dans certains cas de prévoir cette réalité sans avoir la prétention de l'atteindre effectivement. On comprend de plus immédiatement que ce système d'images ne soit pas nécessairement unique et qu'on puisse en adopter plusieurs. Mais ici nous touchons en même temps aux inconvénients de cette voie déductive, au moins comme méthode d'enseignement; elle ne montre pas comment on a été conduit à échafauder la construction et en cela ne satisfait pas l'esprit. La même difficulté ne se présentait évidemment pas pour la Géométrie, où les postulats ont un caractère beaucoup plus intuitif et se rapportent à l'expérience vulgaire.

Un type de construction de la Mécanique à la manière déductive nous est offert par les leçons de M. Boltzmann sur les principes de la Mécanique. On pose l'existence d'un certain nombre de points matériels, et une série de postulats sur le mouvement de ces points est formulée. L'accélération de chaque point est la somme de $n - 1$ accélérations partielles dirigées suivant les droites joignant le point considéré aux $n - 1$ autres. De plus, ces accélérations partielles, quand on considère les différents points, sont

deux à deux de sens contraires et dans un rapport constant, et un système unique de rapports peut être adopté pour les différents points; enfin elles dépendent simplement de la distance des deux points correspondants. On voit qu'avec un tel système de postulats, qu'on pourrait même élargir quelque peu, l'introduction des notions de masse, de force ne présente aucune difficulté. Un système d'équations différentielles d'une forme déterminée se trouve établi. Il y entre diverses fonctions arbitraires; on aura à voir si, pour telles catégories de phénomènes, on peut les choisir de façon que les faits concordent avec ces équations différentielles, et que l'on puisse prédire les mouvements correspondant à certaines données initiales. S'il en est ainsi, on est en possession du système d'images dont je parlais plus haut; on a tout ce que l'on doit chercher dans l'explication mécanique des phénomènes, comme le demandait Kirchhoff. Nous chercherons plus loin si cette dernière vue, excellente en elle-même, ne doit cependant pas être énoncée avec quelques réserves, et si, formulée d'une manière trop absolue, elle n'est pas susceptible de nuire aux progrès de la Science.

Un autre type de construction de la Mécanique à la manière déductive nous est offert par le Traité de Hertz. On sait que le grand physicien, enlevé si tôt à la Science après ses immortelles découvertes sur la propagation des ondes électromagnétiques, consacra la dernière année de sa vie à rassembler ses vues sur la Mécanique. Le système de Hertz rompt beaucoup plus avec les habitudes traditionnelles que le système précédent. Quelques notions purement cinématiques doivent d'abord être rappelées. Considérant un système de points affectés de certains coefficients qui deviendront plus tard les masses, il est aisé de définir ce qu'on entend par *longueur* d'un déplacement élémentaire de ce système de points, ainsi que par *direction* et par *courbure* de ce déplacement. Il peut y avoir certaines liaisons entre les points du système; quand elles sont indépendantes du temps et qu'elles concernent seulement les positions relatives des différents points, on dit que le système est *libre*. Appelons encore, avec Hertz, déplacement élémentaire *le plus droit* un déplacement qui a une courbure moindre que tout autre déplacement élémentaire possible de même direction, et désignons enfin par chemin *le plus droit*

un chemin dont tous les éléments sont les plus droits. Avec ces définitions, nous pouvons énoncer le postulat fondamental sur lequel est basée toute la Mécanique de Hertz : Un système libre demeure en repos ou décrit d'une manière uniforme une trajectoire qui est un chemin le plus droit. On pourrait encore donner une autre forme à ce principe en disant que, dans le mouvement réel, la somme des accélérations des points du système multipliés par leurs masses est à chaque instant minima parmi tous les mouvements possibles répondant à la même position et aux mêmes vitesses, et ceci rappelle un théorème célèbre de Gauss. Pour Hertz, tout système dans la nature est un système libre ou une portion d'un système libre auquel on peut appliquer le principe fondamental. Il y a cependant des systèmes qui nous paraissent libres et auxquels ne s'applique certainement pas le principe; cela tient, répond Hertz, à ce que, outre les mouvements visibles, il y a des mouvements cachés, et que les systèmes visibles sont liés à des systèmes cachés, de telle sorte que l'ensemble du système visible et du système caché forme réellement un système libre. La nécessité dans certains cas de l'introduction de masses cachées paraît d'abord singulière; en réalité cette introduction est très familière au physicien. L'éther, qui joue un si grand rôle en Physique, est une masse cachée, et certains mouvements vibratoires de la matière pondérable sont eux-mêmes des mouvements cachés. On comprend toutefois que l'indétermination qui subsiste dans l'introduction des masses cachées doive rendre singulièrement difficile l'application des idées de Hertz, même dans des cas très simples. C'est là un grave reproche, mais, si l'on passe outre, on ne peut qu'admirer la belle construction du grand physicien; elle est largement suggestive et *constitue un vaste programme* pour la Mécanique et la Physique de l'avenir. On ne doit pas s'étonner que la force ne joue dans tout cela aucun rôle; il n'en peut être autrement dans la méthode déductive où les lois seules du mouvement sont posées. La force ne pourra apparaître que comme une certaine expression analytique. C'est ce qui arrive quand on considère un système libre que l'on décompose en deux parties; on est alors conduit à envisager l'action d'une des parties sur l'autre et inversement. On obtient ainsi des actions et réactions directement opposées. Ceci rappelle le postulat classique de

Newton sur l'égalité de l'action et de la réaction, mais il importe de remarquer que la loi affirmée par Newton a un caractère plus général que celle qui se déduit des principes de Hertz. Une comparaison un peu grossière, et qui n'est pas entièrement exacte, fera suffisamment comprendre ce point. Les seules forces, pour Hertz, sont en quelque sorte des actions de contact; il n'y a donc dans sa Mécanique que des actions et réactions appliquées aux mêmes points. Quand Newton au contraire considère l'action et la réaction du Soleil et d'une planète, les deux forces sont appliquées à deux points différents. La Mécanique du physicien de Bonn ne connaît pas de telles forces, et ses principes ne pourraient s'appliquer à ce cas que si quelque hypothèse était faite sur la nature de la liaison entre les deux astres. D'ailleurs, le principe de Newton, sous sa forme absolument générale, n'est rien moins que clair et le sens même en est douteux dans plus d'un exemple touchant le magnétisme et l'électricité.

Le principe de la conservation de l'énergie définie comme la somme des produits des masses par les carrés des vitesses est, pour les systèmes libres, une conséquence immédiate du postulat fondamental de Hertz, et on le retrouve aussi sous sa forme habituelle pour une portion d'un système libre regardée comme soumise à certaines forces. Hertz fait une étude approfondie des mouvements cycliques et des mouvements conservatifs, en s'inspirant des recherches antérieures de Helmholtz. Considérons un système formé de masses visibles et de masses cachées; sous la condition que ces dernières forment ce que Hertz appelle un *système cyclique adiabatique*, le système primitif est dit *conservatif*. On sait que l'on distingue souvent l'énergie cinétique et l'énergie potentielle; pour un système conservatif, l'énergie cinétique est l'énergie définie comme plus haut des masses visibles et l'énergie potentielle n'est autre chose que l'énergie des masses cachées. Ces deux énergies ne sont pas de natures différentes; la distinction au fond est factice et dépend du degré de notre connaissance. On voit combien sont profondes les spéculations de Hertz; ces vues générales peuvent être regardées comme définissant ce qu'on doit entendre par une explication mécanique. Quant à la question délicate de savoir si tout phénomène est susceptible d'une explication mécanique, j'en dirai un mot tout à l'heure.

## II.

Les modes d'exposition *déductifs*, qu'ils se présentent sous une forme ou sous une autre, sont d'abord très séduisants. Ils condensent en quelques postulats que l'on formule au début les résultats auxquels a conduit la succession d'efforts et de tâtonnements des créateurs de la science du mouvement. Ces postulats ont un caractère extrêmement général, et l'on renvoie à l'expérience pour vérifier leurs conséquences plus ou moins lointaines. Il faut toutefois reconnaître que, à côté d'eux, d'autres modes d'exposition, se rapprochant davantage de l'ordre historique, seront sans doute longtemps encore préférés. Ce n'est pas qu'ils ne présentent de grandes difficultés et que la forme traditionnelle n'en doive être beaucoup modifiée. Il est à craindre toutefois qu'ils ne conservent un caractère à moitié inductif et à moitié déductif, qui leur donne peu d'unité. La belle exposition faite par M. Boussinesq en 1889 dans ses remarquables *Leçons synthétiques de Mécanique générale* mérite d'être citée; elle me semble toutefois faite pour des personnes qui ont déjà quelques notions de Mécanique. C'est une chose difficile que de parler de Mécanique devant des auditeurs complètement ignorants de cette science; il faut, si j'ose le dire, tricher un peu. Aussi toute exposition attire-t-elle aisément la critique par quelque endroit. Je demande la permission de dire quelques mots sur un mode d'exposition que j'ai eu l'occasion d'indiquer, sans me faire illusion sur ses points faibles.

Un principe, comme le principe de l'inertie, n'est en réalité qu'une définition, et quand statiquement on mesure des forces avec un ressort ou un dynamomètre il faut regarder aussi comme une définition le principe newtonien de l'égalité de l'action et de la réaction. Les expériences de Galilée se rapportent à la dynamique dans un champ constant; elles postulent d'ailleurs le temps et l'espace absolus, et si la Terre tournait dans d'autres conditions autour de son axe il aurait été beaucoup plus difficile d'édifier une Dynamique. On peut conclure des résultats expérimentaux de Galilée pour un champ constant le principe de l'indépendance de l'effet du champ et du mouvement antérieurement acquis; quant

au principe général de l'indépendance des effets des forces, il ne faut l'énoncer qu'avec certaines réserves; car, comme M. Poincaré en a fait la remarque, les champs de forces peuvent parfois influer les uns sur les autres. Dans une succession de champs constants et pour un même point matériel les forces peuvent être définies au point de vue dynamique par les accélérations et statiquement avec un dynamomètre; c'est l'expérience seulement qui nous apprend que ces deux définitions donnent des nombres proportionnels. La comparaison des éléments matériels, c'est-à-dire la définition de la masse, peut se déduire de l'expérience fondamentale d'après laquelle tous les corps tombent de la même manière dans un même champ constant et des mesures statiques des forces. Enfin, on passe aux forces variables par le procédé limite habituel aux Mathématiques, et l'on obtient alors l'équation fondamentale de la Dynamiqne. Il faut toutefois bien comprendre son exacte signification et ne pas se payer de mots : cette équation n'a dans chaque cas d'intérêt qu'autant que des observations ou des expériences préliminaires, dont on généralise par une sorte d'induction les résultats, ont donné quelques renseignements sur la nature de la force.

Sans aucun doute, les débuts de la Mécanique exposés ainsi ou d'une manière similaire présentent un mélange de postulats et d'expériences plus ou moins précises, avec quelque peu d'anthropomorphisme. Mais ce sont des inconvénients qu'on ne peut guère éviter, si l'on veut rendre compte, dans ses grandes lignes, de la marche historique de la Science. Qu'on n'aille pas prétendre que cela est inutile; en Géométrie, dira-t-on, on ne commence pas par décrire les observations et les expériences faites par l'humanité préhistorique et qui ont été l'origine des postulats de la Géométrie. On peut répondre que, dans la science de l'espace, ces expériences sont aujourd'hui, pour une raison ou une autre, tellement simples que chacun les fait sans y songer, tandis qu'il n'en va pas de même en Mécanique, où les choses sont autrement complexes. Il est possible évidemment de procéder en Mécanique comme en Géométrie; c'est ce que nous avons vu dans les expositions que j'ai appelées *déductives*, comme le système de Hertz. Mais des difficultés d'une autre nature se présentent, et les postulats fondamentaux placés au début paraissent singuliers à ceux

devant qui on les énonce pour la première fois. Je ne sais ce que réserve l'avenir; la Science entrera peut-être dans des voies que nous ne pouvons prévoir, mais il y a lieu d'espérer que l'étude des principes, qui tient aujourd'hui tant de place, aboutira à quelques résultats importants. Quelques savants pensent que le premier chapitre de la Dynamique telle que nous la construisons actuellement, je veux dire la dynamique du point matériel, devra probablement disparaître. La chose assurément est possible, mais je ne la crois pas très prochaine, car les hypothèses atomiques jouent encore et joueront peut-être toujours un rôle prépondérant dans maintes parties de la Science. Plusieurs points de vue très différents peuvent d'ailleurs, comme on sait, être conservés simultanément, mais en insistant sur cette pensée je sortirais de mon sujet.

## III.

C'était une idée chère aux Cartésiens que toutes les transformations du monde physique se font d'après les lois de la Mécanique, Quel est le sens exact de cette assertion, si toutefois elle en a un? La réponse n'est pas facile et peut présenter quelque indétermination. Que doit-on entendre par explication mécanique d'un phénomène? Pour Hertz, un phénomène offert par un système sera susceptible d'explication mécanique, si le système fait partie d'un système libre convenablement choisi et si son mouvement peut être déduit des postulats fondamentaux indiqués plus haut. Helmholtz et M. Poincaré [1] adoptent une forme un peu différente; ils se reportent au système classique des équations de Lagrange en Mécanique rationnelle. Ce système comprend des fonctions indéterminées des paramètres et de leurs dérivées; si on peut les choisir, de façon que les équations différentielles de Lagrange correspondent alors aux mouvements du système, il y aura pour ces mouvements une explication mécanique. De telles réponses restent bien abstraites et bien vagues si on ne les précise quelque peu; en fait, il est impossible d'obtenir des fonctions indéterminées et de former par suite les équations différentielles si une

---

[1] H. Poincaré, *Thermodynamique*, 1892 (dans la préface).

succession d'inductions reposant sur des généralisations plus ou moins plausibles d'expériences simples ne viennent apporter des renseignements indispensables. Dans quelle mesure maintenant est-il exact de dire, comme on l'a fait quelquefois, qu'une explication mécanique n'est autre chose qu'un système d'équations différentielles? On peut, une fois celui-ci obtenu, rejeter l'échafaudage qui a servi à former le système, et chercher à tirer de ce système, avec les ressources de l'analyse mathématique, la coordination des faits connus et à faire des prévisions qui sont le but suprême de la théorie et la marque de sa fécondité. Mais il arrive maintes fois que quelque fait nouveau vient montrer l'insuffisance de l'explication adoptée; il faut alors compléter par l'addition de quelque terme les relations différentielles, et il est le plus souvent nécessaire d'inspecter de nouveau l'échafaudage primitif pour pouvoir faire utilement les corrections dans la construction définitive. Si donc on peut accorder que la forme dernière d'une théorie consiste dans un système d'équations différentielles, il est indispensable de ne pas oublier cependant les idées qui ont servi à le former.

Revenons enfin à la question : Tout phénomène est-il susceptible d'une explication mécanique? Sur une question posée d'une manière si générale la réponse est difficile, pour ne pas dire impossible. Les avis sont partagés, et c'est surtout dans l'étude des phénomènes calorifiques qu'apparaissent les divergences d'opinion. L'explication mécanique du principe de Carnot présente, comme on sait, de grandes difficultés. Clausius le premier a essayé une telle explication, et ensuite Helmholtz dans ses mémorables recherches sur le principe de la moindre action pensait y avoir réussi; depuis lui, M. Boltzmann a cherché à lever certaines objections faites à Helmholtz. L'idée essentielle d'Helmholtz consiste dans l'hypothèse de mouvements cachés; les variables d'après lui peuvent être partagées en deux catégories : les unes nous sont accessibles, les autres nous sont inconnues et correspondent à des mouvements cachés. En faisant certaines hypothèses, on arrive pour les variables accessibles à des relations différentielles d'une tout autre forme que les équations de la Mécanique classique, et c'est ainsi qu'on peut rendre compte de la dissipation de l'énergie. M. Boltzmann, qui paraît avoir serré la

question de beaucoup plus près qu'Helmholtz, fait une distinction entre les mouvements ordonnés et les mouvements non ordonnés; pour lui, l'augmentation de l'entropie correspond à l'accroissement des mouvements non ordonnés par rapport aux mouvements ordonnés. On sait que M. Poincaré, à la fin de sa *Thermodynamique,* considère comme insuffisantes les tentatives d'Helmholtz et pense plutôt qu'il est des phénomènes non susceptibles d'explication mécanique. Je me garderais bien pour ma part de formuler une réponse sur une question qui me paraît trop vague. Pourquoi supposer qu'il n'y a d'explication mécanique que celle qui cadrerait avec les équations de Lagrange? Ne pourrait-on pas adopter un point de vue plus compréhensif, et alors n'est-on pas menacé de tomber dans une querelle de mots?

Nous venons de nous placer à un point de vue analytique et abstrait; en rentrant dans le même ordre d'idées, on peut donner quelquefois une forme plus concrète à ces considérations. Supposons que deux phénomènes différents conduisent au même système de relations différentielles; ils sont alors les modèles l'un de l'autre, et pour une même catégorie de phénomènes il peut y avoir plusieurs modèles. Remarquons d'une manière générale que les images que notre esprit se forme des choses sont des modèles de ces choses; ainsi, dans un système où il y a des masses cachées, c'est-à-dire inaccessibles à l'observation, nous ne pouvons faire autre chose que de créer pour lui des modèles sans pouvoir effectivement atteindre la réalité. L'accord entre l'esprit et la nature est dans cet ordre d'idées comparable à l'accord entre deux systèmes qui sont modèles l'un de l'autre.

Il semble alors que chacun soit libre de chercher des modèles différents. Il est bien vrai, en raison même de l'indétermination du problème, que les modèles peuvent être variés dans une certaine mesure, mais l'histoire de la Science montre cependant que cette variété est très limitée. Il faut en effet que nos représentations soient *simples,* et, en restant dans le mécanisme pur, nous avons une tendance à revenir toujours à ces conceptions atomiques et moléculaires qui ont joué un rôle fondamental dans la Physique du XIX^e^ siècle. Je sortirais du cercle d'idées développées par Hertz dans son livre si curieux et si suggestif, dont l'analyse a été mon principal objet, en m'étendant sur cette question des représenta-

tions mécaniques. Je dirai seulement quelques mots en terminant d'une représentation très spéciale, chère à l'École anglaise (1), où le modèle est construit avec les mécanismes les plus usuels. Maxwell a construit ainsi d'ingénieux appareils où se manifestent diverses analogies avec les phénomènes électriques, et où par exemple l'induction apparaît comme due à l'inertie de certaines masses. Lord Kelvin surtout a été très loin dans cette voie; avec des solides rigides il est arrivé, comme on sait, à réaliser des effets élastiques grâce à des mouvements de rotation, et à effectuer des représentations singulières de l'éther. L'extrême complication de plusieurs de ces modèles choque les esprits habitués à voir les choses d'un point de vue analytique. Il est clair que, si l'on avait la prétention de saisir ainsi la réalité, il y aurait là quelque chose d'étrange. Du moment qu'il ne s'agit que d'images, il n'y a pas à s'étonner que les avis diffèrent sur le degré de simplicité de telle ou telle représentation; les renvois de sonnette de Lord Kelvin ont leur philosophie.

## SUR LES RÉSEAUX DE CONIQUES,

PAR M. HADAMARD.

Dans ses *Leçons sur la Géométrie* (2), Clebsch s'occupe de trouver la cubique telle que le réseau de ses coniques polaires soit identique à un réseau ponctuel donné. Mais sa méthode, fondée sur l'introduction d'une identité relative aux formes cubiques ternaires, est très artificielle et ne démontre pas, d'ailleurs, l'existence de la solution.

Je me propose d'indiquer, si cela n'a pas été fait précédemment, une manière tout à fait directe et analytique d'arriver au même résultat.

(1) *Voir* sur ce point un article extrêmement intéressant de M. Duhem, *l'École anglaise et les théories physiques*, dans la *Revue des questions scientifiques*, 1893.

(2) Traduction Benoist, t. II, p. 252.

Soient

$$A = a_x^2 = a_x'^2 = \ldots = 0,$$
$$B = b_x^2 = b_x'^2 = \ldots = 0,$$
$$C = c_x^2 = c_x'^2 = \ldots = 0,$$

les équations des trois coniques fondamentales du réseau : les formes adjointes de A, B, C étant respectivement désignées par $u_\alpha^2$, $u_\beta^2$, $u_\gamma^2$.

S'il existe une cubique $g_x^3 = 0$ telle que la polaire d'un point quelconque $y$, par rapport à cette cubique, soit une conique de réseau donné, l'équation de cette conique sera manifestement de la forme

$$(1) \qquad g_x^2 g_y = a_x^2 p_y + b_x^2 q_y + c_x^2 r_y = 0,$$

$p_y$, $q_y$, $r_y$ étant trois polynomes linéaires qu'il nous reste à déterminer. A cet effet, nous devrons écrire que l'expression

$$g_x g_y g_z = a_x a_z p_y + b_x b_z q_y + c_x c_z r_y,$$

ne change pas par permutation de $x$, $y$ et $z$ entre eux. Si l'on pose $(yz)_i = u_i$, il vient ainsi

$$(2) \qquad a_x(apu) + b_x(bqu) + c_x(cru) = 0.$$

Il faut que l'égalité précédente soit une identité, tant par rapport aux $x$ que par rapport aux $u$; et, réciproquement, s'il en est ainsi, la cubique

$$a_x^2 p_x + b_x^2 q_x + c_x^2 r x = 0$$

aura bien pour coniques polaires les courbes représentées par l'équation générale (1).

Pour résoudre l'identité (2), prenons d'abord pour la droite $u$ la polaire du point $x$ par rapport à A,

$$u_z = a_x a_z = a_x' a_z'.$$

Le premier terme $a_x a_x'(aa'p)$ s'annule et il reste

$$(3) \qquad a_x b_x(abq) + a_x c_x(acr) = 0;$$

pareillement, on doit avoir

$$(4) \qquad \begin{cases} b_x c_x(bcr) + b_x a_x(bap) = 0, \\ c_x a_x(cap) + c_x b_x(cbq) = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, si les équations (3) et (4) sont vérifiées (quel

que soit le point $x$), l'équation (2) aura lieu pour $u_z = a_x a_z$, pour $u_z = b_x b_z$, pour $u_z = c_x c_z$, et, par conséquent, pour

$$(5) \qquad u_z = \lambda a_x a_z + \mu b_x b_z + \nu c_x c_z,$$

c'est-à-dire quels que soient les $u$, car lorsque le point $x$ n'est pas sur la hessienne, l'équation (5) peut, par un choix convenable de $\lambda$, $\mu$, $\nu$, représenter une droite quelconque donnée.

Les relations (3) et (4) ont une interprétation géométrique bien simple. L'équation

$$a_x b_x (abq) = 0$$

représente, comme on sait, une conique circonscrite au triangle conjugué commun à A et à B. *La relation* (3) *montre que cette conique est également circonscrite au triangle conjugué commun à* A *et à* C.

On exprimera le même fait géométriquement en écrivant que cette conique est harmoniquement circonscrite à toute conique du faisceau ponctuel $A + \lambda C = 0$ : autrement dit (puisqu'elle est déjà harmoniquement circonscrite à A) qu'elle l'est à C et à la conique $(acu)^2 = 0$. La droite $q$ sera donc déterminée par les conditions

$$(6) \qquad a_\gamma b_\gamma (abq) = 0,$$

$$(7) \qquad (aa'c)(ba'c)(abq) = 0,$$

et son équation pourra, par suite, s'écrire

$$q_x = a_\gamma b_\gamma (a'a''c)(b'a''c)[aba')b''_x - (abb'')a'_x] = 0.$$

En appliquant à cette équation les réductions classiques, on constate qu'elle peut prendre la forme

$$(8) \qquad q_x = a_\gamma b_\gamma c_\alpha b'_\alpha [(abb')c_x - (abc)b'_x] = 0,$$

c'est-à-dire que $q_x$ peut être considéré comme déterminé par la condition (6) jointe à

$$(6') \qquad c_\alpha b_\alpha (cbq) = 0,$$

ou encore (ainsi qu'il était nécessaire pour que le problème eût une solution) que le polynome $q$ ainsi déterminé coïncide avec celui que l'on obtiendrait en opérant de même sur la seconde condition (4).

Le polynome $q$ étant ainsi choisi et les polynomes $p$, $r$ étant de

même déterminés par les relations

$$\begin{cases} a_\beta c_\beta (acp) = 0, \\ a_\gamma b_\gamma (abp) = 0, \\ c_\alpha b_\alpha (cbr) = 0, \\ c_\beta a_\beta (car) = 0, \end{cases}$$

les relations (3) et (4) sont vérifiées, ainsi qu'on s'en assure aisément. Le problème est donc résolu.

Or le premier membre de l'équation (6) s'écrit encore

$$(acc')(bcc')(abq) = 3c_h'^2 q_h - (acq)(bcc')(abc') - (acc')(bcq)(abc').$$

Mais, en permutant, dans le second terme du second membre, les symboles synonymes $c$ et $c'$, dans le troisième les symboles $a$ et $a'$, on voit que chacun de ces termes est égal à la moitié du premier membre. L'équation (6) s'écrit donc

$$c_h^2 q_h = 0,$$

et l'équation (6'), de même

$$a_h^2 q_h = 0.$$

Donc

$$q_x = a_h^2 c_{h'}^2 (hh'x) = \tfrac{1}{2}(hh'x)(a_h^2 c_{h'}^2 - a_{h'}^2 c_h^2).$$

Opérant de même pour $p$ et $r$, l'équation (1) s'écrit

$$(hh'y)\begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_h^2 & b_h^2 & c_h^2 \\ a_{h'}^2 & b_{h'}^2 & c_{h'}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est l'équation (12) de Clebsch (*loc. cit.*).

Le fait que le polynome $q$ peut aussi bien être calculé par les équations (6) et (6') que par les équations (6) et (7) donne le théorème de Géométrie suivant :

*Étant données trois coniques* A, B, C, *soient* S *la conique qui passe par les pôles doubles de* A *et de* B *ainsi que par les pôles doubles de* A *et de* C; S', *la conique qui passe par les pôles doubles de* A *et de* C *ainsi que par les pôles doubles de* B *et de* C. *On sait que les polaires d'un point quelconque de* S, *par rapport à* A *et à* B, *se coupent sur une droite fixe; que les polaires d'un point quelconque de* S', *par rapport à* B *et à* C, *se coupent également sur une droite fixe. Ces deux droites* COINCIDENT.

## SUR L'ÉQUATION DE RICCATI,

PAR M. OTTO DE ALENCAR SILVA.

La méthode symbolique permet d'établir directement qu'une racine quelconque des covariants d'une forme est une solution de l'équation de Riccati, pourvu que celles de la forme le soient aussi ([1]).

Le théorème, on le voit, n'est qu'une traduction, sous un nouveau point de vue, des corrélations entre les racines d'une forme et celles de son covariant.

Soient, en effet,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

les racines d'une forme $f$ du $n^{\text{ième}}$ degré, et

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \ldots, \quad \beta_s,$$

celles du covariant $\varphi$ de $f$, que nous supposerons du $r^{\text{ième}}$ degré et du $s^{\text{ième}}$ ordre.

On aura

$$f = (a_0 a_1 \ldots a_n)(v, y) = a_0(v - \alpha_1 y)(v - \alpha_2 y) \ldots,$$
$$\varphi = (c_0 c_1 \ldots c_s)(v, y) = c_0(v - \beta_1 y)(v - \beta_2 y) \ldots.$$

Je fonde ma démonstration sur les propriétés suivantes

$$(1) \qquad \sum \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_i} = 1,$$

$$(2) \qquad \sum \alpha_i \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_i} = \beta,$$

$$(3) \qquad \sum \alpha_i^2 \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_i} = \beta^2.$$

dont la démonstration peut s'obtenir par divers procédés ([2]).

---

([1]) *Collectanea mathematica in memoriam Chelini.* G. DARBOUX, *Sur l'équation de Riccati.*

([2]) On peut remarquer, par exemple, que $\beta$ étant une certaine fonction irrationnelle

$$\beta = \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

des racines $\alpha_i$, on doit avoir

$$\beta + t = \psi(\alpha_1 + t, \ldots, \alpha_n + t).$$

En différentiant par rapport à $t$ et faisant $t = 0$, on obtient la première de-

Il suffit de développer des calculs faciles et de remarquer qu'on a

$$\sum \alpha_i^2 \frac{\partial c_0}{\partial \alpha_i} = s_1 r c_0 + s c_0.$$

Pour démontrer la formule (3) je fais usage de la propriété suivante : la somme des indices des coefficients d'un terme quelconque du covariant est égale à $\frac{nr-s}{2}$ diminué de l'exposant de $y$.

Cette propriété donne l'équation

$$a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots = \frac{nr-s}{2} \varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

et, en conséquence,

$$\sum \alpha_i \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = \frac{nr-s}{2} \varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

D'un autre côté on a

$$y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sum \beta_i \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i},$$

et

$$\sum \alpha_i \frac{\partial c_0}{\partial \alpha_i} = \frac{nr-s}{2} c_0.$$

En remplaçant ses valeurs dans

$$\sum \alpha_i \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial c_0} \sum \alpha_i \frac{\partial c_0}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1} \sum \alpha_i \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_i} + \ldots,$$

on aura la formule (1).

Supposons maintenant que les coefficients de la forme soient fonctions de $z$ et que des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_1, \ldots$, fonctions de $z$, satisfassent l'équation de Riccati

$$\frac{du}{dz} = pu + qu^2 + r.$$

On aura par hypothèse

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dz} &= \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_1} \frac{d\alpha_1}{dz} + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{dz} + \ldots \\ &= p \sum \alpha_i \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_i} + q \sum \alpha_2^i \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_i} + r \sum \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_i} \\ &= p\beta + q\beta^2 + r, \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

---

équations d'où se déduit, par le changemetn de $x$ en $y$ et de $y$ en $x$, la troisième qui les contient toutes trois.

## COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WEBER (H.). — Die partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen in vierten Auflage neu bearbeitet von Heinrich Weber. Erster Band. Un vol. in-8°, xviii-506 p. Braunschweig, Vieweg und Sohn; 1900.

Voici un nouveau Livre de M. Weber, où le lecteur pourra admirer les mêmes qualités que nous avons eu plusieurs fois l'occasion de signaler : une connaissance approfondie du sujet qu'il traite, qui permet à l'auteur de choisir ce qui est essentiel; un rare talent d'exposition, un style sobre, élégant, concis; l'art de dire juste ce qu'il faut pour être bien compris et ne pas éviter au lecteur ce travail de réflexion personnelle qui est indispensable à celui qui veut s'assimiler vraiment ce qu'il lit; une rigueur qui ne se perd pas dans le détail, et qui est en quelque sorte adéquate au sujet.

Ce n'était pas assurément une petite entreprise que de substituer un nouveau Livre aux leçons classiques de Riemann, rédigées par Hattendorf. Ces Leçons, qui ont eu trois éditions successives, sont entre les mains ou dans la mémoire de tous les lecteurs du *Bulletin;* elles étaient, sans doute, devenues insuffisantes, mais ce qui s'y trouve est si excellent! Les voici, maintenant, entrées dans l'histoire : le Livre de M. Weber, construit sur un plan nouveau, rendra assurément d'autres services qu'une édition, en partie conforme aux précédentes, augmentée de Chapitres hétérogènes. C'est encore les leçons de Riemann, puisque l'esprit du maître y vit encore, s'y est transformé et développé, en s'adaptant à l'état actuel de la Science; ce n'est plus son œuvre propre, que l'on ira chercher désormais dans les bibliothèques.

Le Livre de M. Weber s'adresse à la fois aux mathématiciens et aux physiciens. Il n'est, en aucune façon, un Traité de Physique, et l'auteur n'emprunte à cette Science que les principes nécessaires à l'intelligence des équations qu'il étudie, et de l'interprétation possible des conséquences de cette étude; d'autre part, l'auteur n'étudie que des équations qui intéressent les physiciens, et il

suffit de mettre le livre entre les mains de l'un d'eux pour qu'il proclame cet intérêt; toutefois, M. Weber n'a pas mis dans son Livre tout ce qui intéresserait le pur physicien; il n'a pas parlé, par exemple, des méthodes d'approximation, que l'on n'emploie que parce qu'on n'en a pas d'autres, et qui n'ont pas, en elles-mêmes, de valeur scientifique. Il s'est borné aux développements qui avaient un intérêt mathématique; le champ était assez vaste, et il y a longtemps qu'on a observé ce fait que les plus beaux développements de la théorie des fonctions étaient liés intimement aux problèmes posés dans la réalité; mais il n'a pas non plus mis dans son Livre tout ce qui intéresserait les mathématiciens; et il a laissé de côté la discussion des *Problèmes d'existence,* qui, assurément, l'aurait conduit bien loin. Tout cela est fort sage; il faut savoir se borner et terminer ce que l'on fait. Les leçons qu'avait rédigées Hattendorf tenaient dans un petit volume; M. Weber annonce deux volumes qui, à en juger par le premier, seront assez gros; malgré cette concision où il excelle, combien en faudrait-il, et de quelle taille, pour développer ce qu'il a voulu écarter?

Le présent Volume est divisé en trois Livres. Le premier Livre traite de sujets purement mathématiques : notions préliminaires, intégrales simples, théorèmes de la moyenne, etc.; intégrale de Dirichlet, intégrale double de Fourier; séries en général, séries entières, séries trigonométriques; intégrales multiples, théorèmes de Gauss et de Stokes; fonctions d'une variable complexe et représentation conforme; équations différentielles ordinaires en général; équations différentielles linéaires ordinaires, application aux oscillations de l'aiguille aimantée; équations aux dérivées partielles du premier ordre; équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre; fonctions de Bessel.

Le second Livre contient des développements d'un caractère géométrique et mécanique. Voici tout d'abord, après quelques notions sur les déformations linéaires infinitésimales, la théorie des vecteurs, l'interprétation, dans cette théorie, des théorèmes de Gauss et de Stokes, les lignes de courant, les vortex, les lignes de force, etc., puis la théorie du potentiel newtonien, l'attraction des ellipsoïdes, la théorie des fonctions sphériques, puis un coup d'œil d'ensemble sur les principes de la Mécanique : principe

des vitesses virtuelles, principe de d'Alembert, conservation de l'énergie, stabilité de l'équilibre, principe de Hamilton, principe de la moindre action.

Avec le troisième Livre nous entrons dans le domaine de la Physique. C'est d'abord les principes généraux de l'électrostatique, la position des problèmes, la théorie de l'influence et de la distribution, puis le magnétisme, l'induction magnétique, les surfaces doubles magnétiques. Voici maintenant la théorie de Maxwell, les équations fondamentales de l'électromagnétisme; puis la conduction électrolytique, l'action des forces électriques sur les ions, la pression osmotique, la théorie des courants électriques, le long d'une ligne, sur une surface, dans l'espace; enfin les équations différentielles du mouvement des ions, et la théorie de l'électrolyse. Cette rapide énumération donnera quelque idée au lecteur de la richesse et de l'importance des matières traitées par M. Weber; elle suffira à le convaincre que, si M. Weber a bien écrit, comme il a fait, un livre de Mathématiques, il a fait des Mathématiques, non à propos, mais en vue de la Physique. C'était le meilleur moyen d'être utile aux mathématiciens et aux physiciens.

Le second Volume contiendra les théories de la conductibilité, de la chaleur, des oscillations, en particulier des oscillations électriques, de l'élasticité et de l'hydrodynamique.

J. T.

---

STOLZ (O.), GMEINER (J.) — Theoretische Arithmetik. I. Abtheilung : Allgemeines. Die Lehre von den rationalen Zahlen. Zweite umgearbeitete Auflage der Abschnitte I-IV des I. Theiles der Vorlesungen ueber allgemeine Arithmetik von O. Stolz 1 vol., in-8; IV-98 p.

Cette nouvelle édition perfectionne sur plusieurs points l'essai d'une exposition philosophique de l'Arithmétique que l'on doit à M. Stolz.

Des quatre sections qu'elle comporte, la première se rapporte aux notions de grandeur, d'égalité, etc., de plus grand et plus petit, enfin à l'opération générale (*Verknüpfung*) qui permet de déduire une grandeur de deux autres grandeurs données.

La seconde est consacrée aux *nombres naturels*. Les auteurs se placent nettement au point de vue du nombre ordinal (Helmholtz, Kronecker, Dedekind) et adoptent, pour définir la suite des nombres naturels, les axiomes qu'a formulés M. Peano (*Arithmetices principia nova methodo exposita*). Ils font toutefois commencer la suite des nombres naturels au nombre 1, tandis que M. Peano la fait commencer à 0. Les deux opinions peuvent se soutenir, et l'on a aussi le droit de les regarder comme indifférentes; je serais disposé pour ma part à adopter l'avis de M. Peano, d'autant que, au point de vue du nombre cardinal, 0 est aussi bien la réponse à la question : Combien? que n'importe quel nombre. Notons, en passant, que dans cette section, les auteurs restent au point de vue abstrait et ne posent pas la question du dénombrement d'une collection. C'est à propos de la numération qu'ils introduisent le nombre 0. A propos des opérations fondamentales, il convient de signaler les notes historiques où les auteurs indiquent les premiers mathématiciens qui paraissent en avoir reconnu les propriétés essentielles.

La troisième section est intitulée : *Théorie analytique des nombres rationnels;* elle contient une étude logique très intéressante des opérations directe et inverse (*Thesis* et *Lysis*) effectuées sur deux grandeurs, des conséquences qu'entraînent les suppositions relatives au caractère associatif, commutatif, distributif des opérations directes, enfin des conditions sous lesquelles, l'opération inverse étant impossible avec les grandeurs définies, on la rend possible en introduisant de nouveaux éléments, dont chacun est formé avec un couple de ces grandeurs. Le lecteur se trouve ainsi en possession des propositions logiques qui permettront et légitimeront l'introduction des fractions, des nombres négatifs; il est inutile d'insister ici sur la façon dont, dès lors, se développe cette introduction, qui peut être condensée en quelques pages.

La quatrième section a pour titre : *Théorie synthétique des nombres rationnels : fractions systématiques.*

Cette *théorie synthétique* comporte l'introduction des fractions comme parties de l'unité, des nombres positifs et négatifs comme abscisses de points sur un axe. Ainsi que le font remarquer les auteurs, si l'interprétation de l'addition, soit des nombres fractionnaires, soit des nombres affectés de signe, est à peu près intuitive,

il n'en est pas de même de la multiplication; les auteurs trouvent cette interprétation dans la mesure de l'aire du rectangle, affectée d'un signe, correspondant à la disposition du rectangle, quand il s'agit des nombres affectés de signe. Cette interprétation doit évidemment être signalée; mais les propositions classiques sur le changement de l'unité, qui permettent, en quelque sorte, de ne pas quitter la droite sur laquelle sont représentés les nombres, fourniraient une interprétation de la multiplication tout aussi naturelle. Les formules relatives au mouvement uniforme donnent une interprétation qu'on peut regarder comme équivalente à celle qu'ont adoptée les auteurs. Les *fractions systématiques* sont les fractions décimales, ou plutôt leur généralisation pour une base quelconque.

Les sections II, III et IV sont suivies d'exercices intéressants et instructifs. J. T.

---

## MÉLANGES.

### SUR LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES A PLUSIEURS DIMENSIONS;

PAR M. HADAMARD.

La notion de ligne droite trouve son extension naturelle à un élément linéaire quelconque dans la notion de géodésique.

Il n'en est pas de même de la notion de plan. Il n'arrive pas, en général, que les géodésiques d'un élément linéaire puissent former des familles à plusieurs paramètres distribuées chacune sur une surface unique.

On peut se proposer de rechercher les variétés qui admettent de telles *surfaces géodésiques,* c'est-à-dire des surfaces jouissant de cette propriété que la géodésique qui joint deux points quelconques de l'une d'elles y est contenue tout entière.

Dans le cas de trois dimensions, cette recherche n'offre d'ailleurs aucune difficulté. Si, en premier lieu, nous cherchons les surfaces géodésiques dépendant d'un paramètre (et dont il passera, par conséquent, une par chaque point de la variété), nous pourrons

prendre, pour coordonnée $z$, celle qui reste constante sur les surfaces en question, et choisir les deux autres coordonnées $x$ et $y$ de manière que les lignes $x =$ const., $y =$ const. soient orthogonales à ces surfaces. L'élément linéaire sera alors

$$(1) \qquad ds^2 = A\,dz^2 + E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2.$$

La propriété demandée s'exprimera évidemment par ce fait que, sur toute géodésique, $\frac{d^2 z}{ds^2}$ sera nul en même temps que $\frac{dz}{ds}$ $\left(\text{et cela, quels que soient } x' = \frac{dx}{ds} \text{ et } y' = \frac{dy}{ds}\right)$.

Or l'inspection de l'équation qui fait connaître $z'' = \frac{d^2 z}{ds^2}$ montre immédiatement que ceci a lieu dans l'hypothèse où E, F, G sont indépendantes de $z$ et dans cette hypothèse seulement.

Nous avons donc ainsi toutes les variétés admettant une série simple de surfaces géodésiques.

Pour voir quand ces surfaces géodésiques forment des catégories plus étendues, nous pourrons réduire l'élément linéaire à la forme

$$(1') \qquad A\,dz^2 + 2\lambda\,dx\,dy,$$

$\lambda$ étant fonction de $x$ et de $y$. Si nous désignons par $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface géodésique, par $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ les dérivées premières et secondes de $f$, et que nous écrivions que l'équation

$$z'' = px'' + qy'' + rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2$$

devient une identité lorsqu'on y remplace $x''$, $y''$, $z''$ par leurs valeurs tirées des équations des géodésiques et $z'$ par $px' + qy'$, il vient

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} -2r &= 2p\frac{\partial \log A}{\partial x} + p^2\frac{\partial \log A}{\partial z} + \frac{p^2}{\lambda}\left(p\frac{\partial A}{\partial y} + q\frac{\partial A}{\partial x}\right) - 2p\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}, \\ -2s &= p\frac{\partial \log A}{\partial y} + q\frac{\partial \log A}{\partial x} + pq\frac{\partial \log A}{\partial z} + \frac{pq}{\lambda}\left(p\frac{\partial A}{\partial y} + q\frac{\partial A}{\partial x}\right), \\ -2t &= 2q\frac{\partial \log A}{\partial y} + q^2\frac{\partial \log A}{\partial z} + \frac{q^2}{\lambda}\left(p\frac{\partial A}{\partial y} + q\frac{\partial A}{\partial x}\right) - 2q\frac{\partial \log \lambda}{\partial y}, \end{aligned} \right.$$

système dont l'intégration s'effectue aisément par les méthodes classiques. Les équations obtenues en égalant à zéro $\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial s}{\partial x}$ et

$\frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial x}$ se réduisent à

$$(3)\qquad \begin{cases} Ap(p^2 N - q^2 M) - qM - pP = 0, \\ Aq(q^2 M - p^2 N) - pN - qP = 0, \end{cases}$$

en posant

$$(4)\qquad \begin{cases} M = \frac{1}{2A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \log\lambda}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \\ N = \frac{1}{2A}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \log\lambda}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \\ P = \frac{\partial^2 A}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial x\,\partial y}. \end{cases}$$

Lorsque $M = N = P = 0$, les équations (3) ne déterminent nullement la direction du plan tangent à la surface cherchée. Il peut alors passer (et il passe en effet) une surface géodésique par deux géodésiques concourantes quelconques. C'est le cas de l'espace ordinaire, euclidien ou non, et de lui seul, ainsi qu'il est aisé de le constater par l'intégration des équations $M = N = P = 0$.

S'il n'en est pas ainsi, les fonctions cherchées se trouveront parmi les solutions communes aux équations (3). Si, par un point quelconque, il doit passer une infinité de surfaces géodésiques (c'est le seul cas que nous étudierons), les premiers membres de ces équations doivent admettre un facteur commun. Ceci exige (comme on s'en assure aisément) que M, P et N soient en progression géométrique, autrement dit

$$(5)\qquad M = \rho P = \rho^2 N$$

moyennant quoi les équations (3) donnent uniquement

$$(6)\qquad p + \rho q = 0.$$

Si maintenant, dans les équations

$$r + \rho s + q\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + p\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = 0,$$
$$s + \rho t + q\left(\frac{\partial \rho}{\partial y} + q\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = 0$$

qui résultent de la différentiation de la précédente, on remplace $r$, $s$ et $t$ par leurs valeurs (3) et qu'on veuille que les équations obtenues soient des conséquences de l'équation (6), on aura tout d'abord

$$(7)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.$$

puis

$$\frac{2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} - 2\frac{\partial \log\lambda}{\partial x} + \frac{\partial \log A}{\partial x} + \rho\frac{\partial \log A}{\partial y} = 0,$$

$$2\frac{\partial\rho}{\partial y} + 2\rho\frac{\partial \log\lambda}{\partial y} - \left(\frac{\partial \log A}{\partial x} + \rho\frac{\partial \log A}{\partial y}\right) = 0.$$

Or, si l'on différentie ces dernières équations pour reporter le résultat de la différentiation dans les équations (5), celles-ci se réduisent toutes deux à

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2\rho}{\partial x\,\partial y}.$$

$\rho$ étant, par conséquent, le produit d'une fonction de $x$ par une fonction de $y$, on peut, moyennant un changement de variable, supposer $\rho = -1$. Après quoi l'on trouve

$$\lambda = f(x+y), \qquad A = f(x+y)\varphi(x-y, z).$$

Autrement dit (en revenant à des coordonnées réelles), l'élément linéaire cherché a nécessairement la forme

$$ds^2 = X[dx^2 + dy^2 + \varphi(y, z)\,dz^2],$$

ou, plus simplement,

$$ds^2 = X(dx^2 + ds_1^2), \tag{8}$$

$ds_1^2$ désignant un élément linéaire à deux variables $y$, $z$.

Effectivement, sur les géodésiques de l'élément linéaire (8), $y$ et $z$ varient comme sur les géodésiques de $ds_1^2$, de sorte que l'on a des surfaces géodésiques dépendant de deux paramètres, une géodésique quelconque étant contenue dans une (et, en général, dans une seule) de ces surfaces.

Le problème n'a donc, comme on voit, que des solutions assez banales. Il serait toutefois intéressant de faire une recherche analogue lorsque le nombre $m$ des dimensions est supérieur à 3. Là, en effet, le problème se complique, puisque les surfaces géodésiques sont alors remplacées par des multiplicités à $p$ dimensions ($p$ étant un nombre auquel on devra donner successivement toutes les valeurs de 2 à $m-1$) et que ces multiplicités peuvent à leur tour dépendre d'un nombre variable de paramètres. La solution résulterait, sans doute, aisément des méthodes de calcul différentiel absolu de MM. Ricci et Levi-Civita, si tant est que ces auteurs ne l'aient pas déjà obtenue.

## SUR LA MULTIPLICATION DE L'ARGUMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. LELIEUVRE.

Je me propose ici d'indiquer quelques remarques sur le problème de la multiplication de l'argument d'une fonction elliptique [1].

I. Soit à calculer $\wp mu$ ($m$ entier positif) en fonction rationnelle de $\wp u$; le calcul de proche en proche, par la formule d'addition, étant compliqué, on préfère l'emploi d'une inconnue auxiliaire $\psi_m(u)$, qui s'introduit naturellement en se rappelant que $\wp u = -\frac{d^2}{du^2} \mathrm{L}\sigma u$, d'où :

$$(1) \qquad \wp mu - \wp u = -\frac{1}{m^2}\frac{d^2}{du^2}\mathrm{L}\frac{\sigma mu}{(\sigma u)^{m^2}}.$$

On pose alors

$$\psi_m(u) = \frac{\sigma mu}{(\sigma u)^{m^2}}.$$

La fonction $\psi_m$, définie par cette formule pour $m$ entier positif ou négatif, est, quand $m$ est impair, une fonction entière de $\wp u$, et quand $m$ est pair, le produit de $\wp' u$ par une telle fonction; dans les deux cas, son carré est un polynome entier en $\wp u$, de degré $m^2 - 1$ : on pourrait chercher son expression à l'aide de l'équation différentielle qu'il vérifie, et qui résulte de la relation (1) et de l'équation entre $\wp mu$ et sa dérivée; on préfère calculer $\psi_m$ en fonction de $\wp u$, par des relations de récurrence qu'on peut déduire de l'équation à trois termes que vérifie $\sigma$, ou qu'on obtient encore comme je le rappelle plus loin : les relations employées d'habitude exigent d'ailleurs au préalable le calcul direct de $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ et $\psi_4$. On peut les remplacer avantageusement par celle qui résulte immédiatement du rapprochement de (1) avec l'équation

$$(2) \qquad \wp mu - \wp u = -\frac{\sigma(m+1)u\,\sigma(m-1)u}{\sigma^2 mu\,\sigma^2 u} = -\frac{\psi_{m+1}\psi_{m-1}}{\psi_m^2},$$

---

[1] Voir les ouvrages classiques d'HALPHEN, TANNERY et MOLK, JORDAN, L. LEVY, GREENHILL; *Formulaire* de SCHWARZ; ces ouvrages n'indiquent pas la formule de récurrence (3).

d'où la loi de récurrence

$$(3)\qquad \psi_{m+1}\psi_{m-1} = \frac{\psi_m^2}{m^2}\frac{d^2}{du^2}\,\mathrm{L}\psi_m = \frac{1}{m^2}(\psi''_m\psi_m - \psi'^2_m).$$

Cette formule permet le calcul de proche en proche dès que l'on connaît $\psi_1 = 1$ et $\psi_2 = -p'u$ (on a immédiatement $\psi_2$ par la considération du terme polaire principal).

On peut aussi employer la formule qui résulte de la combinaison de (1) avec la suivante

$$(2')\qquad \mathrm{p}\,mu - \mathrm{p}\,nu = -\frac{\sigma(m+n)u\,\sigma(m-n)u}{\sigma^2 mu\,\sigma^2 nu} = -\frac{\psi_{m+n}\psi_{m-n}}{\psi_m^2\psi_n^2};$$

d'où l'on déduit, d'après (1),

$$(3')\qquad \psi_{m+n}\psi_{m-n} = \frac{\psi_n^2}{m^2}(\psi''_m\psi_m - \psi'^2_m) - \frac{\psi_m^2}{n^2}(\psi''_n\psi_n - \psi'^2_n).$$

La même méthode s'applique à la multiplication de l'argument de sn; on rapprochera les deux formules suivantes qui résultent de la décomposition de $\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u}$ en éléments simples et de la décomposition en produit de $\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{sn}^2 mu} - \frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} &= -\frac{1}{m^2}\frac{d^2}{du^2}\,\mathrm{L}\,\frac{\mathrm{H}\,mu}{(\mathrm{H}\,u)^{m^2}}\\ &= -\frac{k\Theta^2(0)\,\mathrm{H}(m+1)u\,\mathrm{H}(m-1)u}{\mathrm{H}^2 mu\,\mathrm{H}^2 u},\end{aligned}$$

on introduira la fonction auxiliaire $\frac{\mathrm{H}\,mu}{(\mathrm{H}\,u)^{m^2}}$, analogue à $\psi_m$.

Ce procédé est avantageux pour l'étude du problème des polygones de Poncelet [1], que l'on peut notamment traiter de cette manière à l'aide de la fonction sn, les deux coniques inscrite et circonscrite étant rapportées à leur triangle conjugué commun.

II. On obtient souvent les formules usuelles de récurrence par le rapprochement des équations (2) et (2'), qui donne aussitôt

$$(4)\qquad \psi_{m+n}\psi_{m-n} - \psi_{m+1}\psi_{m-1}\psi_n^2 + \psi_{n+1}\psi_{n-1}\psi_m^2 = 0.$$

On y fait d'habitude, successivement, $n = m+1$ et $n = m+2$. Il est évident qu'on pourrait aussi en déduire des relations entre un nombre *déterminé*, indépendant de $m$, de fonctions $\psi$ consé-

---

[1] Voir un prochain article sur ce sujet dans l'*Enseignement Mathématique*.

cutives; faisons-y successivement $n = 2$ et $n = 3$, nous obtiendrons

$$(5) \qquad \psi_{m+2}\psi_{m-2} - \psi_{m+1}\psi_{m-1}\psi_2^2 + \psi_m^2\psi_3 = 0,$$

$$(6) \qquad \psi_{m+3}\psi_{m-3} - \psi_{m+1}\psi_{m-1}\psi_3^2 + \psi_m^3\psi_4\psi_2 = 0.$$

La formule (6) n'est pas une conséquence de (5), car si on y élimine $\psi_{m+3}$ et $\psi_{m-3}$, tirées des formules qu'on déduit de (5) en y remplaçant successivement $m$ par $m-1$ et $m+1$, on arrive à la relation suivante, évidemment distincte de (5), entre les *cinq* fonctions consécutives $\psi_{m-2}$, $\psi_{m-1}$, $\psi_m$, $\psi_{m+1}$, $\psi_{m+2}$,

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{m-2}\psi_m\psi_{m+2}\psi_2^3 + \psi_{m-1}\psi_m\psi_{m+1}\psi_4 \\ \quad -(\psi_{m-2}\psi_{m+1}^2 + \psi_{m+2}\psi_{m-1}^2)\psi_2\psi_3 = 0. \end{array} \right.$$

Par conséquent, en éliminant $\psi_{m-2}$ ou $\psi_{m+2}$ entre (5) et (7), on aura une relation entre *quatre* fonctions $\psi$ consécutives, soit par exemple

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{m-1}\psi_m\psi_{m+1}\psi_{m+2}(\psi_2^5 + \psi_4) - \psi_m^3\psi_{m+2}\psi_2^3\psi_3 \\ \quad -\psi_{m-1}\psi_{m+1}^3\psi_2^3\psi_3 + \psi_m^2\psi_{m+1}^2\psi_2\psi_3^2 - \psi_{m-1}^2\psi_{m+2}^2\psi_2\psi_3 = 0. \end{array} \right.$$

Or, on constate facilement qu'*elle équivaut à la formule d'addition entre* $p(m+1)u$, $pmu$ *et* $pu$; posons en effet

$$pu - p(m-1)u = X, \qquad pu - pmu = Y, \qquad pu - p(m+1)u = Z.$$

On aura, d'après (2),

$$(2'') \quad \psi_{m-2}\psi_m = \psi_{m-1}^2 X, \qquad \psi_{m+1}\psi_{m-1} = \psi_m^2 Y, \qquad \psi_{m+2}\psi_m = \psi_{m-1}^2 Z.$$

Éliminons, à l'aide de ces égalités, $\psi_{m+1}$ et $\psi_{m+2}$ de l'équation (8), alors $\psi_{m-1}$ et $\psi_m$ disparaîtront d'eux-mêmes et il restera la relation

$$Y^2Z^2\psi_2\psi_3 - YZ(\psi_2^5 + \psi_4) + (Y + Z)\psi_2^3\psi_3 - \psi_2\psi_3^2 = 0.$$

C'est, sous forme entière, la relation algébrique entre $p(m+1)u$, $pmu$ et $pu$. D'ailleurs, en changeant $m$ en $m-1$, on aurait de même la relation déduite de celle-là par le changement de Z en X; on a donc

$$X + Z = \frac{Y(\psi_2^5 + \psi_4) - \psi_2^3\psi_3}{Y^2\psi_2\psi_3}, \qquad XZ = \frac{Y\psi_2^2 - \psi_3}{Y^2}.$$

Ces équations, qu'on pourrait, bien entendu, déduire directement de la formule d'addition de $pu$, peuvent être avantageuses pour le calcul de $pmu$; on remarquera que la seconde résulte

immédiatement de l'élimination des fonctions $\psi_{m-2}, \ldots, \psi_{m+2}$, à l'aide des relations ($2''$), dans la formule (5).

III. Le *Formulaire* de M. Schwarz applique au calcul de $pmu$ la formule (1) dans laquelle on remplace $\psi_m$ en fonction de $pu$ par une expression remarquable qui s'obtient bien facilement de la façon suivante :

Considérons le déterminant $\varphi(u)$, d'ordre $m-1$, formé avec les dérivées successives de $pu$ et que je représente en écrivant une quelconque de ses lignes, de rang $i$, par

$$\varphi(u) = |p^{(i)}u\, p^{(i+1)}u \ldots p^{(i+m-2)}u| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

L'équation $\varphi(u) = 0$ exprime évidemment la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction doublement périodique suivante $F(v)$, dont j'écris la décomposition en éléments simples, ait la racine multiple d'ordre $m$, $v = u$ :

$$F(v) = A_0 + A_1 pv + A_2 p'v + \ldots + A_{m-1} p^{(m-2)}v.$$

Cette fonction a, d'autre part, tous ses pôles congrus à zéro, d'ordre $m$; donc *l'équation* $\varphi(u) = 0$ *est la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait* $mu \equiv 0$, $u = 0$ *étant excepté.* Par conséquent, la fonction $\varphi(u)$ est annulée par les $m^2 - 1$ valeurs de $u$ qui annulent $\psi_m$; de plus, ses pôles sont congrus à 0 et son terme polaire principal correspondant à $u = 0$ est

$$T = \left| \frac{(-1)^i (i+1)!}{u^{i+2}} \cdots \frac{(-1)^{i+m-2}(i+m-1)!}{u^{i+m}} \right|$$
$$= \frac{(-1)^{m-1}[2!\,3!\ldots(m-1)!]^2}{u^{m^2-1}}.$$

Donc cette fonction doublement périodique $\varphi(u)$ est d'ordre $m^2 - 1$ et a les mêmes zéros et les mêmes pôles que $\psi_m$ : la comparaison des termes polaires principaux donne alors immédiatement

$$\psi_m(u) = \frac{(-1)^{m-1}}{[2!\,3!\ldots(m-1)!]^2}\varphi(u).$$

Cette démonstration rattache à la solution que développe Halphen celle qui est donnée par Cayley du problème des polygones de Poncelet [1].

---

[1] *Voir* HALPHEN, *Fonctions elliptiques*, t. II.

## COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HILL (J.-M.). — THE CONTENTS OF THE FIFTH AND SIXTH BOOKS OF EUCLID, ARRANGED AND EXPLAINED. Cambridge, University Press, 1900. XX-144 p., petit in-4°.

Ce volume, dû à un professeur de l'University College de Londres, apparaîtra peut-être sur le continent surtout comme un témoignage assez curieux de la ténacité avec laquelle les traditions de l'enseignement euclidien se maintiennent en Angleterre. Il s'agit, dans le cas particulier, de la théorie des rapports qui, comme on le sait, est établie et développée par l'auteur des *Éléments* par une méthode spéciale, dont la rigueur n'a jamais été contestée, et qui aborde immédiatement la question dans toute son étendue, sans progresser du cas de la commensurabilité du rapport à celui de l'incommensurabilité. Cette méthode est donc en opposition directe avec les tendances qui prédominent depuis une génération dans l'enseignement de la Géométrie; mais son principal inconvénient consiste dans son caractère artificiel, qui, ne laissant pas facilement saisir son but aux étudiants ignorant les difficultés réelles de la question, la rend un peu obscure et malaisée à suivre.

L'exposé qu'en fait M. Hill a pour objet de remédier, autant qu'il est possible, à cet inconvénient, et l'on ne peut disconvenir qu'il serait difficile de réclamer des explications plus exactes, plus complètes et plus limpides. Peut-être au contraire trouvera-t-on exagéré l'effort dépensé, alors qu'il ne s'agit point de simplifications, mais d'éclaircissements qui ne sont pas indispensables, et que, d'un autre côté, le caractère de la théorie reste ce qu'il était. Mais lorsque l'auteur nous déclare que le cinquième Livre d'Euclide est d'ordinaire supprimé, comme trop difficile, dans l'enseignement de la Géométrie en Angleterre et que pour le sixième Livre (théorie de la similitude) une expérience de plusieurs années lui a prouvé les avantages de son mode d'exposition, on ne peut que s'en rapporter pleinement à lui.

P. T.

## MÉLANGES.

### THÉORÈME SUR LA CONVERGENCE UNIFORME DES SÉRIES;

PAR M. ERNST LINDELÖF.

Je me propose de démontrer le théorème suivant, qui pourra rendre service dans certaines recherches concernant les équations différentielles ou aux dérivées partielles (¹) :

*Étant donnée une série*

$$(1) \qquad u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_i(x) + \ldots,$$

*convergente pour tout point $x$ de l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, et dont les termes sont des fonctions continues de $x$, admettant des dérivées des $n$ premiers ordres également continues; s'il existe un nombre positif* G *tel qu'on ait, pour $a \leqq x \leqq b$,*

$$(2) \qquad \left| \frac{d^n u_1(x)}{dx^n} + \frac{d^n u_2(x)}{dx^n} + \ldots + \frac{d^n u_p(x)}{dx^n} \right| < G,$$

*quelque grand que soit $p$, on peut affirmer que la série* (1) *est uniformément convergente dans l'intervalle considéré et qu'il en est de même de chacune des séries*

$$\begin{array}{l}
\dfrac{du_1(x)}{dx} + \dfrac{du_2(x)}{dx} + \ldots + \dfrac{du_i(x)}{dx} + \ldots, \\
\dfrac{d^2 u_1(x)}{dx^2} + \dfrac{d^2 u_2(x)}{dx^2} + \ldots + \dfrac{d^2 u_i(x)}{dx^2} + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{d^{n-1} u_1(x)}{dx^{n-1}} + \dfrac{d^{n-1} u_2(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + \dfrac{d^{n-1} u_i(x)}{dx^{n-1}} + \ldots,
\end{array}$$

*lesquelles, par suite, représenteront les dérivées successives de la série donnée.*

Ce théorème a été démontré par M. Bendixson (²) dans le cas $n = 1$.

---

(¹) L'idée de ce théorème m'a été inspirée par la lecture d'une thèse très intéressante *Sur l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre*, que M. Jarl Lindeberg vient de soutenir devant la Faculté des Sciences de l'Université de Helsingfors, et sur laquelle je désire appeler l'attention des géomètres.

(²) *Sur la convergence uniforme des séries* [*Mémoires* (*Öfversigt*) *de l'Aca-*

1. Notre démonstration repose sur un lemme très simple que nous allons d'abord établir. Soit $\varphi(x)$ une fonction finie et continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n$ inclusivement dans l'intervalle (o, L), c'est-à-dire pour $o \leqq x \leqq L$, et supposons que $|\varphi_n(x)| \leqq G$ et que $\varphi_{n-1}(o) \geqq M > o$ [1]. Posons encore $\frac{M}{G} = l$ et admettons que $l \leqq L$.

Nous aurons dans l'intervalle (o, $l$)

$$\varphi_{n-1}(x) > M - Gx = G(l - x) \geqq o,$$

d'où nous concluons que la dérivée $\varphi_{n-2}(x)$ est constamment croissante et que la différence

$$\varphi_{n-2}(l) - \varphi_{n-2}(o) > \int_0^l G(l - x)\,dx = \frac{M^2}{2G}.$$

Partageons maintenant l'intervalle (o, $l$) en deux parties égales et portons notre attention sur le signe de la dérivée $\varphi_{n-2}(x)$ au point $x = \frac{l}{2}$. Dans le cas où

$$(\alpha) \qquad \varphi_{n-2}\left(\frac{l}{2}\right) \geqq o,$$

nous aurons dans l'intervalle $\left(\frac{l}{2}, l\right)$

$$\varphi_{n-2}(x) \geqq \int_{\frac{l}{2}}^{x} \varphi_{n-1}(x)\,dx > G\left(lx - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}l^2\right) \geqq o;$$

la dérivée $\varphi_{n-3}(x)$ y sera constamment croissante et sa variation totale

$$\varphi_{n-3}(l) - \varphi_{n-3}\left(\frac{l}{2}\right) > \int_{\frac{l}{2}}^{l} G\left(lx - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}l^2\right)dx = \frac{1}{24}\frac{M^3}{G^2}.$$

S'il arrive au contraire que

$$(\beta) \qquad \varphi_{n-2}\left(\frac{l}{2}\right) \leqq o,$$

---

*démie de Stockholm*, 1897]. *Voir aussi* Arzelà : *Sulle serie di Funzioni* (*Mémoires de l'Institut de Bologne*, 1899).

[1] Pour abréger, j'écris $\varphi_i(x)$ au lieu de $\frac{d^i\varphi(x)}{dx^i}$.

nous prenons l'intervalle $\left(0, \frac{l}{2}\right)$, où nous aurons

$$\varphi_{n-2}(x) \leqq -\int_x^{\frac{l}{2}} \varphi_{n-1}(x)\,dx < G\left(lx - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}l^2\right) \leqq 0;$$

la dérivée $\varphi_{n-3}(x)$ sera donc décroissante dans tout l'intervalle, et

$$\left|\varphi_{n-3}\left(\frac{l}{2}\right) - \varphi_{n-3}(0)\right| > \int_0^{\frac{l}{2}} G\left(lx - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}l^2\right)dx = \frac{1}{12}\frac{M^3}{G^2}.$$

Donc, nous sommes assuré que, dans l'un au moins des intervalles $\left(0, \frac{l}{2}\right)$ et $\left(\frac{l}{2}, l\right)$, la dérivée $\varphi_{n-3}(x)$ variera toujours dans le même sens et que sa variation totale $\Delta\varphi_{n-3}(x)$ vérifiera l'inégalité

$$|\Delta\varphi_{n-3}(x)| > \frac{1}{24}\frac{M^3}{G^2}.$$

Revenons maintenant à l'hypothèse $(\alpha)$ et partageons l'intervalle $\left(\frac{l}{2}, l\right)$ en deux parties égales; nous aurons encore à distinguer deux cas; d'abord

$$(\alpha)_1 \qquad \varphi_{n-3}\left(\frac{3l}{4}\right) \geqq 0;$$

dans l'intervalle $\left(\frac{3}{4}l, l\right)$ nous trouvons alors

$$\varphi_{n-3}(x) \geqq \int_{\frac{3l}{4}}^{x} \varphi_{n-2}(x)\,dx > G\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{8}l^2x + \frac{9}{128}l^3\right) \geqq 0,$$

ce qui nous montre que la dérivée $\varphi_{n-4}(x)$ croîtra constamment et que son accroissement total sera plus grand que la quantité

$$\int_{\frac{3l}{4}}^{l} G\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{8}l^2x + \frac{9}{128}l^3\right)dx = \frac{7}{2^{11}}\frac{M^4}{G^3}.$$

Puis

$$(\alpha)_2 \qquad \varphi_{n-3}\left(\frac{3l}{4}\right) \leqq 0;$$

il faudra prendre l'intervalle $\left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{4}\right)$, où l'on aura

$$\varphi_{n-3}(x) < G\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{8}l^2x + \frac{9}{128}l^3\right) \leqq 0;$$

la dérivée $\varphi_{n-4}(x)$ sera donc constamment décroissante et sa variation totale dans l'intervalle sera supérieure, en valeur absolue, à la quantité

$$-\int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{4}} G\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{8}l^2x + \frac{9}{128}l^3\right)dx = \frac{13}{3.2^{11}}\frac{M^4}{G^3}.$$

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse ($\beta$) et partageons l'intervalle correspondant $\left(0, \frac{l}{2}\right)$ en deux parties égales; si

$$(\beta)_1 \qquad \varphi_{n-3}\left(\frac{l}{4}\right) \geqq 0,$$

c'est l'intervalle $\left(0, \frac{l}{4}\right)$ qui nous convient; la dérivée $\varphi_{n-3}(x)$ y sera en effet positive et vérifiera l'inégalité

$$\varphi_{n-3}(x) \geqq -\int_x^{\frac{l}{4}} \varphi_{n-2}(x)\,dx < G\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{8}l^2x + \frac{25}{384}l^3\right) \geqq 0,$$

d'où il suit que $\varphi_{n-4}(x)$ ira constamment en croissant et que sa variation totale dépassera la quantité

$$\int_0^{\frac{l}{4}} G\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{8}l^2x + \frac{25}{384}l^3\right)dx = \frac{43}{3.2^{11}}\frac{M^4}{G^3}.$$

S'il arrive au contraire que

$$(\beta)_2 \qquad \varphi_{n-3}\left(\frac{l}{4}\right) \leqq 0,$$

nous choisirons l'intervalle $\left(\frac{l}{4}, \frac{l}{2}\right)$, où

$$\varphi_{n-3}(x) < G\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{8}l^2x + \frac{25}{384}l^3\right) \leqq 0,$$

de sorte que la dérivée $\varphi_{n-4}(x)$, constamment décroissante, diminuera, de $\frac{l}{4}$ à $\frac{l}{2}$, d'une quantité plus grande que

$$\int_{\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}} G\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{8}l^2x + \frac{25}{384}l^3\right)dx = \frac{19}{3.2^{11}}\frac{M^4}{G^3}.$$

Ainsi donc, la discussion qui précède, et qui se fait d'ailleurs plus aisément par des considérations géométriques, nous montre que, dans un au moins des quatre intervalles égaux dans lesquels

se trouve divisé l'intervalle primitif $(0, l)$, la dérivée $\varphi_{n-4}(x)$ sera constamment croissante ou constamment décroissante et que sa variation totale $\Delta\varphi_{n-4}(x)$ vérifiera l'inégalité

$$|\Delta\varphi_{n-4}(x)| > \frac{13}{3.2^{11}}\frac{M^4}{G^3}.$$

En continuant ainsi à dédoubler le nombre des intervalles, et considérant successivement toutes les hypothèses possibles relatives aux signes des dérivées aux points de division, nous arriverons enfin au résultat suivant qui constitue le lemme que nous avions annoncé :

*Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable réelle $x$, finie et continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n$ inclusivement dans un intervalle* $(0, L)$, *et supposons qu'on ait*

$$\left|\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right| < G \qquad \text{dans tout l'intervalle } (0, L);$$

$$\left|\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}}\right| \geqq M > 0 \qquad \text{pour } x = 0; \qquad l = \frac{M}{G} \leqq L.$$

Cela posé, *si l'on divise l'intervalle* $(0, l)$ *en* $2^{n-2}$ *parties égales,* de sorte que la longueur de chaque partie soit

$$\lambda = \frac{1}{2^{n-2}}\frac{M}{G},$$

*on peut affirmer que, dans un au moins de ces sous-intervalles de longueur $\lambda$, la fonction $\varphi(x)$ variera constamment dans le même sens et que, $\Delta\varphi(x)$ désignant sa variation totale, dans le même intervalle on aura*

$$|\Delta\varphi(x)| > \alpha_n \frac{M^n}{G^{n-1}},$$

*$\alpha_n$ étant une constante numérique, indépendante de* M *et de* G.

**2.** Nous sommes maintenant en état de démontrer notre théorème.

En nous appuyant sur l'inégalité (2), nous ferons d'abord voir que la série

$$\frac{d^{n-1}u_1(x)}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-1}u_2(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{d^{n-1}u_i(x)}{dx^{n-1}} + \ldots$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, c'est-à-dire qu'en désignant par $\eta$ une quantité positive aussi petite

qu'on voudra, on pourra trouver un nombre $m$ tel que l'inégalité

$$\left|\frac{d^{n-1}u_{m+1}(x)}{dx^{n-1}}+\ldots+\frac{d^{n-1}u_{m+p}(x)}{dx^{n-1}}\right|<\eta$$

subsiste pour $a \leqq x \leqq b$, quelque grand que soit $p$. A cet effet, nous déterminons d'abord une quantité positive $\varepsilon$ satisfaisant aux conditions

$$l \equiv \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2\alpha_n \mathrm{G}}} = \text{partie aliquote de } b-a; \qquad 3\mathrm{G}l<\eta,$$

$\alpha_n$ désignant la constante numérique dont il est question dans le lemme ci-dessus. Puis nous divisons l'intervalle $(a, b)$ en sous-intervalles de longueur $l$ (soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les points qui effectuent cette division), puis chacun de ces sous-intervalles en $2^{n-2}$ parties égales, de sorte que $(a, b)$ se trouvera finalement divisé en un certain nombre de petits intervalles de longueur

$$\lambda = \frac{l}{2^{n-2}} \equiv \frac{1}{2^{n-2}}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2\alpha_n \mathrm{G}}}.$$

Enfin nous déterminons le nombre entier $m$ par la condition que l'inégalité

$$|\varphi(x)| \equiv |u_{m+1}(x)+u_{m+2}(x)+\ldots+u_{m+p}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ait lieu, quelque grand que soit $p$, pour les points extrêmes de chacun des intervalles de longueur $\lambda$, ce qui est évidemment possible puisque ces points sont en nombre fini et que la série donnée, d'après l'hypothèse, converge pour chacun d'eux. La variation $\Delta\varphi$ de la fonction $\varphi(x)$ du premier au dernier point de l'un quelconque de ces intervalles sera alors inférieure à $\varepsilon$ en valeur absolue.

Ceci posé, considérons les valeurs de la dérivée $\varphi_{n-1}(x)$ aux points $a, a_1, a_2, \ldots, a_k, b$, et désignons par M leur maximum absolu. Je dis qu'on aura

$$\mathrm{M} < 2\mathrm{G}l \equiv 2\mathrm{G}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2\alpha_n \mathrm{G}}}.$$

En effet, en vertu de l'hypothèse (2), nous avons dans tout l'intervalle $(a, b)$

$$\left|\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right|<2\mathrm{G}.$$

Si M n'était pas assujetti à l'inégalité précédente, et si $a_i$ est un point pour lequel $|\varphi_{n-1}(x)| = \mathrm{M}$, nous pourrions appliquer à

l'intervalle $(a_i, a_{i+1})$ ou $(a_{i-1}, a_i)$ le lemme du numéro précédent et en tirer cette conclusion que, dans un au moins des intervalles de longueur $\lambda$ compris dans $(a_i, a_{i+1})$ ou dans $(a_{i-1}, a_i)$ la variation totale $\Delta\varphi$ de la fonction $\varphi(x)$ serait numériquement supérieure à la quantité

$$\alpha_n \frac{M^n}{(2G)^{n-1}} = \frac{\alpha_n}{(2G)^{n-1}} (2G)^n \frac{\varepsilon}{2\alpha_n G} = \varepsilon,$$

ce qui est en contradiction avec nos hypothèses.

Nous sommes donc assuré qu'aux points $a, a_1, \ldots, a_k, b$, la dérivée $\varphi_{n-1}(x)$ est inférieure à $2Gl$ en valeur absolue, et comme d'autre part la différence entre sa valeur en un point quelconque de l'intervalle $(a, b)$ et sa valeur au plus proche des points $a, a_1, \ldots, a_k, b$, ne saurait dépasser numériquement la limite $2G\frac{l}{2} = Gl$, nous aurons *dans tout l'intervalle* $(a, b)$ l'inégalité

$$|\varphi_{n-1}(x)| = \left|\frac{d^{n-1}u_{m+1}(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{d^{n-1}u_{m+p}(x)}{dx^{n-1}}\right| < 2Gl + Gl = 3Gl < \eta,$$

et cela, *quelque grand que soit* $p$. Donc la série

$$\frac{d^{n-1}u_1(x)}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-1}u_2(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{d^{n-1}u_i(x)}{dx^{n-1}} + \ldots,$$

est bien uniformément convergente dans l'intervalle $(a, b)$, comme nous l'avions dit.

Il suffit maintenant de reprendre es raisonnements que nous venons de faire, en y remplaçant $n$ successivement par $n-1$ $n-2, \ldots, 2$ et $\alpha_n$ par $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_2 (= \frac{1}{2})$, pour conclure de la convergence uniforme de la série précédente à celle des séries

$$\frac{d^{n-2}u_1(x)}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-2}u_2(x)}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{d^{n-2}u_i(x)}{dx^{n-2}} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{du_1(x)}{dx} + \frac{du_2(x)}{dx} + \ldots + \frac{du_i(x)}{dx} + \ldots,$$

d'où suit enfin, par un théorème bien connu, que la série donnée

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_i(x) + \ldots$$

est, elle aussi, uniformément convergente dans l'intervalle considéré.

Notre théorème est donc démontré.

1re Partie.

## COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BRUCKNER (M.). — Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte. Un vol. in-8°; 237 p. Leipzig, Teubner, 1900.

La théorie des polygones et des polyèdres pose d'intéressants et difficiles problèmes d'énumération, de forme, de relation. En feuilletant le gros livre de M. Brückner, en regardant les figures et les photographies dont il est orné, on ne peut s'empêcher d'admirer la patience intelligente avec laquelle l'auteur a rassemblé et coordonné les faits géométriques, dispersés dans les vieux livres ou les mémoires récents, dans les journaux périodiques ou les programmes. C'est un sujet sur lequel la curiosité a été bien vite éveillée et ne s'est guère endormie, qui, jadis, s'est mêlé aux constructions cosmogoniques des philosophes ou aux méditations des mystiques, qui a préoccupé Albrecht Dürer, sur lequel Képler a exercé son prodigieux génie, et dont les connexions avec l'Algèbre et l'Analyse, telles qu'elles se sont révélées aux géomètres des temps modernes, sont peut-être plus merveilleuses que les liens, rêvés par les pythagoriciens ou les alchimistes, entre les forces de la nature et les formes régulières ou les nombres. Il n'est pas épuisé : plus d'une question posée depuis longtemps reste encore sans réponse. On ne peut qu'être reconnaissant à l'auteur de la peine qu'il a prise pour nous donner de ce sujet un exposé aussi clair et complet que la Science actuelle le comporte, et pour retracer la longue et complexe histoire de son développement. Ce n'est pas tout; M. Brückner a constitué une riche collection de modèles, dont les photographies remplissent cinq grandes planches; il y a en outre sept planches lithographiées et je ne parle pas des nombreuses figures qui illustrent le texte. Outre le travail scientifique, il y avait là une fatigante et minutieuse besogne; il est bien juste de féliciter celui qu'elle n'a pas découragé.

Le livre de M. Brückner est divisé en sept parties.

Il nous introduit d'abord dans la théorie des polygones complets et simples. Le polygone *simple*, la ligne brisée qui part

d'un point pour y revenir et à laquelle il convient ainsi d'attribuer un sens de parcours, afin d'assigner un sens précis aux mots *angles extérieurs* ou *intérieurs,* pose déjà des problèmes intéressants : c'est d'abord la distinction en genres, d'après la somme des angles extérieurs, puis la description des formes possibles, déjà si nombreuses dans le cas de sept sommets, que l'auteur a dû reculer devant leur énumération; la définition et l'évaluation des surfaces, etc., etc. Il traite ensuite des polygones réguliers et des polygones qu'il qualifie de *gleicheckig* et de *gleichkantig :* les premiers sont formés par la répétition d'un même angle compris entre deux côtés qui sont toujours les mêmes; ainsi, tous les angles sont égaux, et les côtés sont égaux de deux en deux; pour la seconde espèce, la figure qui se répète est le *côté* avec les angles adjacents.

Le reste de l'Ouvrage est consacré aux polyèdres. La théorie de la connexion des surfaces est presque immédiatement abordée, et le théorème d'Euler, ou sa généralisation, est établi pour les surfaces à deux faces à connexion simple ou multiple; ce théorème est ensuite étudié pour les surfaces à une face. On remarquera là l'intéressante description du polyèdre à une face de Möbius formé d'une part au moyen de cinq triangles ABC, BCD, CDE, DEA, EAB dont l'ensemble constitue une zone à une face dont le contour est le pentagone gauche ACEBDA, et d'autre part, par une pyramide de sommet F limitée par les cinq triangles ACF, CEF, EBF, BDF, DAF. Un autre exemple simple, développé par l'auteur, est dû à M. C. Reinhardt. M. Brückner traite ensuite des théorèmes de Legendre et de Cauchy sur la détermination des polyèdres, de la *loi des arêtes* de Möbius, etc., etc.

Un chapitre est consacré aux polyèdres eulériens généraux, et en particulier à leur construction; on y remarquera aussi l'étude approfondie des polygones gauches que l'on peut former avec les arêtes d'un polyèdre. L'auteur traite ensuite des polyèdres eulériens particuliers. C'est d'abord les polyèdres réguliers ordinaires et les polyèdres semi-réguliers d'Archimède, puis les polyèdres qualifiés de *gleicheckig* et de *gleichflächig* dont la définition est analogue à celle des polygones à qualifications analogues dont il a été question plus haut. Dans le dernier chapitre enfin l'auteur s'occupe des polyèdres d'ordre supérieur, soit qu'ils soient com-

plètement réguliers, soit qu'ils présentent une certaine régularité.

M. Brückner s'est borné à l'espace euclidien à trois dimensions : rappelons qu'il a exposé les principes de la théorie des polyèdres pour l'espace à quatre dimensions dans un travail antérieur, paru en 1894, sous le titre *Die Elemente der vierdimensionale Geometrie*.

---

Dr SUTER (Heinrich.). — Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. x-278 p. in-8°; Leipzig, Teubner, 1900.

L'illustre orientaliste de Zurich a dépouillé avec soin toutes les sources accessibles pour dresser un tableau chronologique des auteurs mathématiques arabes, et pour donner sur chacun d'eux des indications aussi complètes que possible, concernant les circonstances de leur vie, leurs écrits scientifiques, leurs éditions, les manuscrits de ces écrits qui existent dans les bibliothèques dont les catalogues sont publiés, enfin les traductions latines inédites. Sur ce dernier point, M. Suter s'excuse de ne pas être complet; mais qui pourrait prétendre l'être, à moins d'avoir accompli une tâche qui semble bien dépasser les forces d'un seul travailleur? Il existe en effet, dans les manuscrits mathématiques du moyen âge, une quantité d'opuscules anonymes qui ne laissent pas même soupçonner, au premier abord, s'ils sont ou non des traductions; d'autres qui sont certainement des versions et sont attribués à des auteurs dont les noms plus ou moins défigurés décèlent une origine orientale, mais dont on ignore encore, malgré les recherches si consciencieuses de M. Steinschneider, s'ils ont écrit en hébreu ou en arabe.

Composé pour les travailleurs non arabisants, l'Ouvrage de M. Suter répond à un besoin indiscutable et devra être consulté en première ligne par quiconque aura à s'occuper, même sur un point particulier, de la mathématique ou de l'astronomie arabe. Quant à l'utilité, même pour les orientalistes de profession, d'un répertoire où l'on trouve réunie une innombrable quantité de renseignements difficiles à se procurer, même avec une parfaite

connaissance de la bibliographie arabe, il est inutile de la faire ressortir.

La liste de M. Suter comprend 528 numéros, débute par l'astrologue el-Fazari, mort en 777, et s'arrête vers 1600, en réalité avec le mathématicien Behâ-Eddin, mort à Ispahan en 1622, et dont l'*Essence du Calcul,* éditée par Nesselmann en 1843, a été traduite en français par Aristide Marre (Rome, 1864). Les 48 derniers numéros sont en effet consacrés aux auteurs dont l'époque n'a pu être précisée, mais qu'en tout cas, il n'y a pas de raisons de considérer comme postérieurs au XVI^e^ siècle. L'ensemble de cette liste constitue un véritable sommaire de l'histoire de la mathématique arabe, et l'on peut aisément en suivre les vicissitudes, de son origine à son déclin définitif. Mais ce qui frappe surtout dans ce sommaire, c'est l'énorme proportion des matériaux encore disponibles, mais non utilisés (sans parler des écrits perdus), par rapport à ceux qui ont été étudiés jusqu'à présent.

Dans ces conditions, nous ne pouvons certainement prétendre porter, sur la valeur propre des travaux des Arabes, que des jugements très incertains. Sans doute, on s'est attaqué aux grands noms et aux écrits paraissant les plus importants; la chance de révélations importantes et tout à fait inattendues a donc bien diminué depuis un siècle. Néanmoins le champ inexploré est tellement vaste, que les travailleurs doivent y trouver mieux qu'à glaner. Malheureusement l'astronomie arabe, qui en occupe la plus grande partie, est à peu près inséparable de l'astrologie, et le temps ne semble pas encore venu où l'histoire des erreurs de l'esprit humain paraîtra aussi digne d'intérêt que celle de son progrès vers la vérité.

P. T.

---

WEISS (H.). — Grundsätze der Kinematik. Ertes Heft: mit einem Atlas von 10 Tafeln. Un vol. in-8°; 256 p. Leipzig, Arthur Félix, 1900.

Le livre de M. Weiss s'ouvre par une longue préface, qui tient presque le quart du fascicule que nous signalons. L'auteur aurait bien pu l'appeler *Discours préliminaire,* d'autant que le ton en est quelquefois oratoire et que, rien qu'à la lire, on s'ima-

gine volontiers un auditoire, s'intéressant aux idées générales, aux développements historiques, aux querelles sur le sens des mots et soulignant à l'occasion les intentions plus ou moins conscientes de M. Weiss, qui a l'habitude de ne pas parler de l'Allemagne sans ajouter « y compris l'Autriche ». Quoi qu'il en soit, cette préface ou ce discours contient toute une histoire de la Mécanique, et M. Weiss remonte à Galilée, même à Archimède pour retracer rapidement la façon dont la Science, tout d'abord expérimentale, a évolué, s'est constituée et s'est divisée en diverses branches. Il insistera naturellement sur les rapports entre la Mécanique et la Géométrie: signalons en passant cette ingénieuse remarque de M. Reulaux, que les anciens considéraient d'habitude les faits géométriques à l'état de repos : la Géométrie des anciens est une *ruhende Geometrie*. Une conique est pour eux l'intersection d'un cône par un plan; elle est plutôt pour les modernes la trajectoire d'un point mobile, ou la courbe enveloppée par ses tangentes. Si juste que soit cette remarque, il ne faudrait peut-être pas en exagérer la portée : car, enfin, les anciens, eux aussi, se servaient d'instruments pour *décrire* les courbes, et du moment qu'on décrit une courbe avec un instrument, fût-ce un cercle avec un compas, elle ne peut manquer d'être une trajectoire. Le point de vue moderne n'était assurément pas étranger aux anciens. Il est d'ailleurs bien évident que le développement de la Géométrie dans les temps modernes a été lié très intimement à l'étude du mouvement, et cela est d'autant plus naturel que la notion de *déplacement* tout au moins entre essentiellement dans notre conception de l'espace. Mais il importe peut-être de remarquer qu'en Géométrie et même en Cinématique la notion de *temps* ne joue qu'un rôle apparent; le *temps* est une variable particulière, à laquelle nous pouvons substituer une variable quelconque. Que la notion de *temps* nous ait servi à constituer la notion générale de *variable*, qu'elle en fournisse un des exemples les plus simples, celui peut-être auquel on se réfère le plus fréquemment, quand ou pense à *une* variable, cela est bien certain. Qu'il nous eût été impossible, sans la notion de temps, de constituer la notion de variable, c'est ce qu'il appartient aux philosophes de décider, ou de discuter, et la réponse de ceux qui estiment que cette notion entre nécessairement même dans l'éla-

boration de l'idée de nombre entier n'est pas douteuse. Il n'en est pas moins vrai que la notion de variable peut être abstraite de l'idée de temps; autrement nous ne saurions acquérir l'idée de deux variables indépendantes : or c'est le rôle que joue cette notion de variable qui caractérise effectivement la Géométrie moderne, dans laquelle la courbe est regardée comme le *lieu* (plutôt que la trajectoire) d'un point qui dépend d'une variable ou l'enveloppe d'une droite qui dépend d'une variable, la surface comme le lieu d'un point qui dépend de deux variables, etc., etc.

Or cette notion de variable suffit non seulement à la Géométrie, mais encore à la Cinématique pure qui, à la vérité, est une branche de la Géométrie plutôt que de la Mécanique. Sans doute, on a distingué dans la Cinématique la *Géométrie cinématique* où l'on ne considère que des propriétés géométriques et où l'on convient que l'on fait abstraction du temps. Personne n'hésitera à faire rentrer cette *Géométrie cinématique* dans la Géométrie pure. Cette distinction de la *Géométrie cinématique* du reste de la Cinématique, que conserve d'ailleurs M. Weiss, est parfaitement légitime avec certains modes d'exposition; elle va avec un certain ordre des matières que l'on peut adopter ou rejeter; mais elle n'a rien de fondamental. La vitesse et l'accélération, par exemple, telles qu'on les considère en Cinématique, ne sont autres que des dérivées géométriques prises par rapport à une variable. Que cette variable s'appelle le *temps,* et qu'on la désigne par la lettre $t$, cela, à vrai dire, n'a aucune importance et il est parfaitement naturel de rattacher à la notion de vitesse les propriétés des tangentes ou les propriétés infinitésimales du premier ordre, à la notion d'accélération les propriétés des rayons de courbure ou les propriétés infinitésimales du second ordre. On n'a, pour cela, introduit dans les démonstrations aucun élément étranger à la Géométrie. Ces dérivées géométriques s'introduisent d'une façon naturelle dans l'étude des courbes et il y aurait assurément quelque naïveté à croire que l'on a fait de la Mécanique parce qu'on les a appelées *vitesse* ou *accélération*. On a simplement développé des propriétés géométriques qui seront indispensables à la Mécanique; mais, aussi bien, fait-on de la Mécanique quand on enseigne la théorie des fonctions circulaires, ou des fonctions elliptiques, parce que ces théories ont des applications en Mécanique? Le caractère purement géo-

métrique des théories sur la composition des mouvements n'est pas moins évident. On pourrait, avec plus de raison peut-être, soutenir que la Cinématique appliquée est une science distincte, parce que la notion de l'impénétrabilité de la matière est étrangère à la Géométrie; et, à la vérité, si l'on ne substituait pas aux mécanismes réels qui se déforment, qui frottent, qui s'usent, des mécanismes purement théoriques, on sortirait sans doute de la Géométrie; mais du moment que les figures que l'on considère sont susceptibles de définitions purement géométriques, et si l'on admet que les notions de *distance,* de *corps solide* font partie intégrante de notre concept d'espace, il est trop clair qu'il faut faire rentrer dans la pure Géométrie la théorie du quadrilatère articulé, du guidage rectiligne, des engrenages, etc., à condition, bien entendu, qu'on regarde comme parfaitement solides les éléments de ces mécanismes. La Cinématique appliquée, en tant qu'elle traite du mouvement de pareils organes, sera donc, elle aussi, un chapitre de Géométrie, un chapitre particulier, parce qu'il s'occupe de problèmes particuliers, et dont l'intérêt, pour celui qui veut étudier la Mécanique pratique, les mécanismes réels, n'est pas contestable. Malgré son intérêt pratique, et quoiqu'elle soit née et qu'elle ait commencé de se développer à propos de problèmes réels, il est certain que cette branche de la Science est en train de revêtir son individualité propre; ceux qui en poursuivent l'étude en arrivent à se poser des problèmes qui les intéressent par eux-mêmes, non par leurs applications; on ne prévoit guère, par exemple, le jour où les mécaniciens utiliseront les théorèmes de M. Kempe et de M. Kœnigs sur la description des courbes algébriques au moyen de systèmes articulés. En résumé, il me paraît que la Cinématique appartient non à la Mécanique, mais à la Géométrie : il s'agit, bien entendu, de la Cinématique au sens d'Ampère, qui est le plus généralement adopté. M. Weiss nous explique que quelques personnes regrettent le terme de *phoronomie* que Kant avait proposé. Quoique le parrain soit très illustre, et malgré les efforts qu'a faits jadis Hoëné de Wronski pour faire adopter le mot de *phoronomie,* il n'est guère probable que ce mot entre maintenant dans la langue mathématique. M. Weiss cite de nombreux et intéressants passages tirés de Livres ou de Mémoires de M. Reulaux, où celui-ci s'insurge, parfois

d'une façon assez amusante, contre la signification habituellement admise du mot *Cinématique*. Il est certain qu'on sort de la Géométrie avec les notions de *couple cinématique*, de *chaîne cinématique*, dans leur généralité, telles que M. Reulaux les a introduites; mais ce sont les choses qui importent, plus que les noms dont leur auteur les a qualifiées; M. Weiss insiste avec raison sur le rôle que jouent ces notions, essentielles dans l'analyse et la synthèse des mécanismes.

Le fascicule paru se rapporte à la *Cinématique abstraite*. L'exposition est nettement géométrique. Il est possible que ce mode d'exposition soit le mieux adapté à l'éducation des futurs ingénieurs, auxquels M. Weiss semble destiner son livre. C'est le *dessin*, non le *calcul*, que l'auteur a en vue : la réalité peut être atteinte par l'un comme par l'autre et c'est aux hommes de métier qu'il appartient de dire quelle est la meilleure voie.

Après avoir défini la vitesse et l'accélération, l'auteur donne quelques explications concernant le mouvement d'un corps solide et le mouvement relatif. La règle qu'il établit pour la composition des accélérations ne se rapporte qu'au cas où le système mobile est animé d'un mouvement de translation, et il aurait dû en prévenir le lecteur, d'autant que celui-ci, dans le présent fascicule, n'a pas l'occasion de compléter ses idées sur ce sujet.

Le reste est rempli par l'étude géométrique du mouvement d'une figure plane dans son plan; cette étude est fondée principalement sur la considération de deux, trois ou quatre positions consécutives de la figure; cette voie est sans doute très légitime et l'on sait qu'elle conduit d'une façon simple et élégante aux principaux faits géométriques qui constituent la théorie, mais, encore une fois, c'est, à mon sens, une erreur de croire qu'elle a un caractère plus géométrique que celle qui consiste, par exemple, à déduire de l'expression de l'accélération d'un point de la figure plane la construction du centre de courbure de la trajectoire d'un point. Les règles concernant la vitesse et l'accélération sont données à la fin du fascicule.

J. T.

BOREL (E.). — Leçons sur les séries divergentes. Un vol. in-8°; VI-182 p.; Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Voici le troisième Volume de ces *Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions* que M. Borel commençait de publier il y a trois ans; nous avons essayé deux fois de caractériser la manière de M. Borel et de dire l'intérêt qui s'attache à ces publications, le profit que ne peuvent manquer d'en tirer ceux qui étudient les Mathématiques; mais on se lasse de louer et cela, d'ailleurs, devient inutile.

Le présent Livre contient une Introduction et cinq Chapitres que nous essaierons d'analyser rapidement.

L'Introduction a un caractère historique et philosophique : ce qu'elle semble avoir de paradoxal à la première lecture disparaît quand on la relit après avoir parcouru le volume en entier; c'est que l'on a gagné des idées nettes sur la possibilité de manier en toute sécurité certaines séries divergentes, et qu'on s'habitue assez vite à la vérité quand elle est clairement exposée. Notre génération a été élevée dans le mépris des séries divergentes, un mépris plus profond que celui des gens de la Renaissance pour la *nuit gothique* et, lorsqu'on nous citait jadis cette opinion d'Euler, que la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

devait avoir pour somme $\frac{1}{2}$, cela nous semblait du plus haut comique. Nous ne nous doutions pas que M. Borel dût un jour venger Euler. Lorsque M. Poincaré fit connaître le caractère des séries utilisées en Mécanique céleste, ce fut, pour quelques-uns, un désespoir, et je connais au moins un astronome qui parla de renoncer à la science qu'il avait cultivée jusque-là; il savait fort bien que M. Poincaré avait justifié l'emploi de ces mêmes séries dont il démontrait la divergence; mon astronome ne voulait rien entendre et prétendait qu'on ne l'obligeât plus à se servir d'un aussi misérable outil. Quant à se contenter d'une approximation qui ne serait pas indéfinie, il ne fallait pas lui en parler.

Il est curieux de relire, dans le Livre de M. Borel, les paroles mêmes des grands mathématiciens qui ont fondé l'Analyse sur des

bases solides et de voir combien leur état d'esprit était différent de celui qu'ils ont tant contribué à créer. « J'ai été forcé, dit Cauchy, d'admettre quelques propositions qui paraîtront peut-être un peu dures; par exemple, qu'une série divergente n'a pas de somme.... » Il est intéressant de retrouver avec lui, dans l'œuvre de ce même Cauchy, la trace de cette préoccupation : rendre une somme aux séries divergentes, et de rencontrer, même chez des mathématiciens de second rang, comme Lacroix, des idées profondément justes et que l'Analyse moderne éclaire complètement.

Ce problème « de donner une somme aux séries divergentes » ne pouvait manquer de préoccuper ceux même qui ont rejeté l'emploi de ces séries, de les préoccuper à cause du succès, auquel ils étaient accoutumés, de l'emploi de ces séries, succès dont ils auraient voulu trouver la raison; mais, d'un autre côté, ils apportaient ces modèles d'une parfaite rigueur dont les mathématiciens ne pourront plus désormais se passer, et ils créaient, dans une région sûre, un vaste domaine de recherches qui devait suffire à l'activité de leurs contemporains et de leurs successeurs, qui ont laissé, quelque temps, dormir la question.

M. Borel, avant d'en apporter les solutions, au moins partielles, qui sont l'objet essentiel de son Livre, la pose dans des termes précis et clairs, dans des termes qui font prévoir la possibilité d'une solution :

« *Faire correspondre à chaque série divergente numérique un nombre tel que la substitution de ce nombre à la série, dans les calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts ou, du moins, presque toujours exacts.* Il y aura d'ailleurs lieu, une fois ce premier résultat acquis, de fixer des classes, les plus étendues possible, de méthodes de calcul dans lesquelles on est *certain* que la substitution du nombre à la série est légitime. Pour les résultats ne rentrant pas dans les classes étudiées, on devra regarder le résultat obtenu comme seulement probable, et chercher à le vérifier par d'autres méthodes....

» Il est cependant deux opérations que l'on devra se garder d'effectuer sur les séries divergentes : c'est le changement de l'ordre des termes et le remplacement des termes consécutifs par leur somme, *lorsque ces opérations seront faites une infinité de fois. On doit donc considérer, dans une série, le rang de*

*chaque terme comme faisant partie intégrante de ce terme.* »

C'est le développement de ce programme qui va maintenant occuper M. Borel.

Voici tout d'abord, après l'exemple classique de la série de Stirling et des indications concernant les *Recherches* de Stieltjes *sur quelques séries semi-convergentes,* la théorie de M. Poincaré sur les séries asymptotiques. On ne quitte pas, avec cette théorie, le domaine auquel on est habitué; on s'étonne seulement de voir que le cas de la série de Stirling, que l'on avait pu croire très singulier et comme isolé, ne l'est nullement. Quant à la possibilité de calculer avec les « expressions asymptotiques », cela, sans doute, a paru tout naturel à ceux qui n'y avaient pas pensé. Sur cet exemple simple, toutefois, la portée des termes dans lesquels M. Borel a posé le problème apparaît déjà nettement. D'un autre côté, l'importance des résultats de M. Poincaré s'aperçoit ou, au moins, se soupçonne quand on voit le moyen d'atteindre, par les développements asymptotiques, l'intégration de certaines classes d'équations différentielles, et cette importance s'augmente singulièrement en raison de l'intérêt qui s'attache à quelques-unes des équations différentielles auxquelles la méthode s'applique.

M. Borel ne pouvait songer à développer ces résultats : il étudie toutefois avec détail les équations du type considéré par M. Kneser,

$$y'' = y[a^2 + \varphi(x)],$$

où $\varphi(x)$ est une série entière en $\frac{1}{x}$ commençant par un terme en $\frac{1}{x^2}$; cette équation admet une intégrale *unique* qui, pour $x$ très grand, peut se mettre sous la forme

$$y = e^{-ax}[1 + \varepsilon(x)],$$

$\varepsilon(x)$ étant susceptible d'un développement asymptotique que l'on peut calculer. Cet exemple suffit à bien éclairer les deux points que l'on a à traiter en général : constater l'existence de séries asymptotiques qui satisfassent formellement à l'équation différentielle; démontrer qu'il y a des intégrales susceptibles d'une représentation asymptotique. En même temps, il met en évidence des particularités intéressantes. Le second Chapitre, consacré aux

fractions continues et à la théorie de Stieltjes, nous montre une tout autre face de la question et va nous fournir un premier exemple d'utilisation des séries vraiment divergentes (non plus asymptotiques) pour l'intégration effective des équations différentielles; si restreinte que soit la classe de fonctions auxquelles la méthode s'applique, la valeur d'un tel exemple n'est pas discutable.

Après avoir rappelé un cas très particulier, mais cependant très intéressant, signalé par Laguerre, puis les recherches de M. Padé qui, d'une part, éclairent beaucoup la façon dont on peut approcher d'une fonction donnée au moyen de fractions rationnelles et, de l'autre, posent nettement d'importantes questions relatives à ces séries divergentes qui donnent naissance à des suites convergentes de fractions rationnelles, M. Borel résume, en ajoutant à l'occasion quelques restrictions destinées à simplifier les résultats, les points essentiels du beau Mémoire des *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* dans lequel Stieltjes a étudié les fonctions de la variable $z$ définie par des fractions continues de la forme

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}},$$

$a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, ... étant des nombres positifs. Lorsque la série $\sum_1^\infty a_n$ est divergente, cette fraction continue définit une fonction analytique de $z$ qui admet en général pour coupure essentielle la partie négative de l'axe des abscisses. Elle peut, d'autre part, être développée formellement en une série telle que

$$F = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots,$$

les $a$ s'exprimant simplement au moyen des $c$, en sorte que, inversement, la série étant donnée, on peut construire la fraction continue qui lui est formellement égale. Or, il peut arriver que la série soit divergente et que la fraction continue soit convergente. S'il en est ainsi, il est bien naturel d'attribuer la valeur de cette fraction continue comme somme à la série divergente.

Si, d'autre part, on considère avec Stieltjes l'intégrale définie

$$J = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u},$$

on obtient sans peine le développement formel

$$J = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z_3} - \ldots,$$

en posant

$$c_n = \int_0^\infty f(u)\,u^n\,du \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

on admet, bien entendu, que toutes ces intégrales définies ont un sens. Stieltjes a montré que, si l'on regarde les $c_n$ comme donnés, ces équations ne déterminaient pas en général la fonction $f(u)$; elles la déterminent, au contraire, si l'on impose à la fonction $f(u)$ la condition d'être positive, lorsque les $a_n$, calculés au moyen des $c_n$ comme on l'a expliqué plus haut, sont positifs et que la série $\sum a_n$ est divergente, en sorte que la fonction continue correspondante soit convergente. De ces résultats M. Borel tire des conclusions importantes pour son objet propre.

Il est amené, par quelques considérations d'ailleurs naturelles, à substituer aux conditions que, d'après les propositions précédentes, il y aurait lieu d'imposer à une fonction $f(u)$ celle, plus restrictive, mais plus maniable, de l'existence de deux constantes positives A, $m$, telles que l'on ait, pour toutes les valeurs positives de $u$,

$$0 < f(u) < A\,e^{-m\sqrt{u}}$$

et il désigne sous le nom de *fonction de Stieltjes* une fonction réelle $\varphi(u)$ de la variable positive $u$, telle que la *valeur absolue* de cette fonction (et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $\lambda$) satisfasse à la condition précédente. Il montre ensuite que les relations

$$c_n = \int_0^\infty \varphi(u)\,u^n\,du \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

où les $c_n$ sont donnés, déterminent entièrement la fonction $\varphi(u)$ si on lui impose la condition d'être une fonction de Stieltjes. Inversement, si $\varphi(u)$ est une telle fonction, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{z+u}$$

donne naissance à une fonction analytique de $z$, régulière dans tout le plan, sauf sur l'axe des quantités négatives et admettant le point $\infty$ pour point singulier, en sorte que la série en $\frac{1}{z}$ (dite *série de Stieltjes*) à laquelle elle donne naissance, comme on l'a expliqué plus haut, est divergente. L'addition ou la soustraction de deux séries de Stieltjes conduit évidemment à une série de Stieltjes. La différentiation et surtout la multiplication présentent quelques difficultés que l'auteur lève par une analyse élégante : il parvient enfin à l'énoncé suivant :

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des séries de Stieltjes et

$$\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \ldots, y_n^{(\lambda)})$$

un polynome par rapport à ces fonctions et à leurs dérivées; ce polynome est une série de Stieltjes, que l'on obtient en calculant sur les séries comme si elles étaient convergentes; si, dès lors, on considère une équation différentielle algébrique

$$f(z, y_1, y', y'', \ldots, y^{(\lambda)}) = 0,$$

et si

$$y = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} - \ldots$$

est une série de Stieltjes qui la vérifie formellement, cette série définit une intégrale de l'équation différentielle.

Les résultats obtenus par M. Cesàro par la considération des *valeurs moyennes,* c'est-à-dire des expressions de la forme

$$\frac{a_0 s_0 + a_1 s_1 + \ldots + a_n s_n}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}$$

où,

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

étant une série donnée, on suppose

$$s_0 = u_0, \qquad s_1 = u_0 + u_1, \qquad \ldots, \qquad s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

et où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ désignent des nombres positifs convenablement choisis, sont d'autant plus intéressants qu'ils sont plus faciles et élémentaires; c'est à ces résultats que M. Borel rattache ses belles recherches sur la sommation *exponentielle*.

La série donnée étant divergente, si l'expression

$$\frac{s_0 + s_1 \frac{a}{1} + s_2 \frac{a^2}{1.2} + s_3 \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots}{1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots},$$

admet une limite pour $a$ infini, il est légitime de regarder cette limite comme la somme de la série proposée, puisque, dans le cas où cette série est convergente, cette limite existe et n'est autre que la somme de la série.

En supposant que la série

$$u(a) = u_0 + \frac{u_1}{1} a + \frac{u_2}{1.2} a^2 + \frac{u_3}{1.2.3} a^3 + \ldots,$$

soit convergente quel que soit $a$, c'est-à-dire que la fonction $u(a)$ de $a$ soit une fonction entière, cette fonction entière est dite *associée* à la série (divergente)

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

et celle-ci est dite *absolument sommable*, si les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a} |u(a)| \, da, \qquad \int_0^\infty e^{-a} |u^{(\lambda)}(a)| \, da,$$

où $\lambda$ désigne un indice de dérivation quelconque, ont un sens. S'il en est ainsi, la somme de la série divergente est, par définition,

$$s = \int_0^\infty e^{-a} u(a) \, da,$$

et il est aisé de voir que cette définition revient à celle qu'on a donnée tout à l'heure. Ceci posé, M. Borel montre que, si l'on a un polynome à coefficients numériques

$$F(u, v, w)$$

et que l'on y remplace $u$, $v$, $w$ par des séries absolument sommables, on obtient une série absolument sommable dont la somme est précisément égale à la valeur numérique que prendrait le polynome, si l'on y remplaçait $u$, $v$, $w$ par les sommes des séries correspondantes.

Si maintenant on considère une série

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances entières de la variable $z$, et si cette série est absolument sommable pour l'affixe $z_0$ d'un point M, la série est absolument sommable sur le segment OM qui part du point $z = 0$; de plus, la somme de cette série sur OM est une fonction analytique qui n'a pas de point singulier dans le cercle décrit sur OM comme diamètre; d'ailleurs, la série $\varphi(z)$ peut très bien n'être pas sommable en tous les points intérieurs au cercle. Cette proposition, ainsi que le remarque M. Borel, peut être regardée comme une généralisation du théorème fondamental d'Abel sur les séries entières. Elle conduit au théorème que voici :

Soient $u$, $v$, $w$ des séries entières en $x$, absolument sommables au point M dont l'affixe est $z_0$, et soit, d'autre part,

$$F[u, v, w, u', v', w', \ldots, u^{(\lambda)}, v^{(\lambda)}, w^{(\lambda)}, x]$$

un polynome par rapport à $u$, $v$, $w$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $\lambda$, dont les coefficients sont des séries entières en $x$ ayant un rayon de convergence supérieur à $|z_0|$.

Si, dans ce polynome P, on remplace $u$, $v$, $w$ par les séries correspondantes et si l'on effectue les calculs comme si ces séries étaient convergentes, on obtient une série S qui est absolument sommable sur OM (le point M pouvant être exclu) et qui définit par suite une fonction analytique F régulière à l'intérieur du cercle décrit sur OM comme diamètre. Cette fonction analytique est précisément ce que devient P quand on y remplace $u$, $v$, $w$ non plus par les séries, mais par les fonctions analytiques correspondantes. D'ailleurs la fonction F est identiquement nulle dans le cas, et dans le cas seulement, où la série S a tous ses coefficients nuls, c'est-à-dire dans le cas où les séries $u$, $v$, $w$ vérifient formellement la relation

$$F[u, v, w, u', \ldots, w^{(\lambda)}, x] = 0;$$

s'il en est ainsi, les fonctions analytiques qui correspondent à $u$, $v$, $w$ vérifient effectivement cette relation.

Soit, dès lors,

$$f[x, y, y', \ldots, y^{(\lambda)}] = 0$$

une équation différentielle, analytique par rapport à la variable $x$, algébrique par rapport à la fonction inconnue $y$ et ses dérivées; si

une série absolument sommable $y$ vérifie formellement l'équation différentielle, la fonction analytique définie par cette série est une intégrale de l'équation.

Comme exemple, M. Borel considère l'équation

$$x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 - y,$$

qui conduit au développement formel

$$y = x^2 - 2x^3 + 2.3x^4 - 2.3.4x^5 + 2.3.4.5x^6 - \ldots;$$

la considération de la fonction associée fournit l'intégrale

$$y = \int_0^\infty e^{-a}[ax - \log(1 + ax)]\,da;$$

à la vérité, dans cet exemple, la fonction associée n'est pas une fonction entière, et l'auteur se trouve utiliser ici une généralisation dont il a démontré la légitimité, non dans le présent Livre, mais bien dans son Mémoire sur les séries divergentes, inséré en 1899 dans les *Annales de l'École ormale Nsupérieure*.

La théorie des séries sommables a été présentée sans faire intervenir la théorie du prolongement analytique; ce sont les relations entre les deux théories qui constituent l'objet du Chapitre IV.

Il est bien clair en effet, ainsi que le remarque l'auteur, que la théorie du prolongement analytique fournit un procédé très naturel pour donner un sens à une série divergente

$$u_0 + u_1 z_0 + u_2 z_0^2 + \ldots$$

lorsque la série

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots$$

n'a pas un cercle de convergence nul et qu'elle définit une fonction analytique $\varphi(z)$ susceptible d'être prolongée jusqu'en $z_0$; la somme de la série divergente sera, si l'on veut, $\varphi(z_0)$. Le précédent exemple montre d'ailleurs que la théorie de M. Borel permet d'atteindre des cas qui ne rentrent pas dans celui-là et il convient aussi de remarquer que la méthode précédente conduit, lorsque la fonction analytique n'est pas univoque, à attribuer plusieurs valeurs à la somme d'une série divergente. On peut d'ailleurs éviter ce dernier inconvénient en se bornant à la branche univoque de la fonction $\varphi(z)$ définie dans l'*étoile* de M. Mittag-

Leffler. M. Borel démontre alors que, pour que la série $\varphi(z)$ soit sommable en M, il est nécessaire que la fonction analytique $\varphi(z)$ n'admette aucun point singulier à l'intérieur du cercle C, décrit sur OM comme diamètre, et suffisant que cette fonction n'admette aucun point singulier, soit à l'intérieur de C, soit sur C. Si maintenant l'on considère les points singuliers de $\varphi(z)$, que l'on mène par chacun d'eux la perpendiculaire à la droite qui le joint au point O, l'ensemble de ces droites pourra délimiter une portion du plan finie ou infinie située du même côté que O par rapport à chacune de ces droites. Cette région du plan est ce que l'auteur appelle le *polygone de sommabilité :* à l'intérieur du polygone la série $\varphi(z)$ est sommable; elle peut l'être ou non sur le contour, elle ne l'est pas pour les points extérieurs au polygone. Ce domaine de sommabilité dépasse d'ailleurs le cercle de convergence en tout point non singulier; il peut n'être pas beaucoup plus étendu.

On parvient à une extension beaucoup plus considérable en employant comme fonction sommatrice, au lieu de la fonction $e^a$, la fonction $e^{a^k}$, où $k$ est un entier positif, c'est-à-dire, si l'on désigne par $s_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la série

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$

en considérant la limite pour $a$ infini de l'expression

$$\sigma(a) = \frac{s_0 + \frac{s_k a^k}{1} + \frac{s_{2k} a^{2k}}{1.2} + \ldots}{e^{a^k}},$$

qui remplace l'expression analogue précédemment considérée. M. Borel avait, dès 1896, montré l'intérêt de cette généralisation; elle a été développée par lui-même dans son Mémoire sur les séries divergentes, et, d'autre part, par M. Servant dans sa thèse; il la reprend par une méthode nouvelle qui permet de faire un pas de plus, en établissant la sommmabilité absolue; je signalerai dans cette étude la curieuse intervention de propositions d'Arithmétique relatives à la possibilité de satisfaire approximativement en nombres entiers à certaines équations du premier degré à coefficients incommensurables.

La notion du polygone de sommabilité fournit un moyen de rechercher les points singuliers d'une fonction analytique $\varphi(z)$

définie par une série entière en $z$ dont le rayon de convergence n'est pas nul; M. Servant a en effet donné une formule qui, au moins théoriquement, permet d'obtenir le point du contour qui se trouve sur une demi-droite partant du point O. M. Borel établit rigoureusement cette formule ainsi qu'une proposition qui en facilite notablement l'usage; il l'applique à montrer que, conformément à une proposition énoncée pour la première fois par M. Pringsheim, une série de Taylor admet, en général, le cercle de convergence comme coupure. En disant qu'une série de Taylor est générale, M. Borel entend que la valeur du $n^{\text{ième}}$ coefficient est indépendante de la valeur des coefficients précédents.

Dans un très intéressant Mémoire inséré en 1899 dans le *Journal de M. Jordan,* M. Leau s'est occupé de cette recherche des points singuliers que M. Borel a attaquée au moyen de son polygone de sommabilité; M. Borel résume la méthode et les principaux résultats de M. Leau, dont il fait ressortir l'importance; signalons enfin quelques indications concernant un Mémoire de M. Le Roy, qui s'imprimait en même temps que le livre de M. Borel et qui vient de paraître dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.*

Le dernier Chapitre, enfin, se rapporte aux recherches récentes de M. Mittag-Leffler relatives à la représentation, par une série de polynomes, d'une branche uniforme d'une fonction analytique $\varphi(z)$, définie par une série de Taylor et prolongée dans toute l'*étoile* que l'on obtient en regardant comme une coupure, de chaque point singulier jusqu'à l'infini, la droite qui irait du point O à ce point singulier. Après avoir établi la proposition même de M. Mittag-Leffler, en suivant une voie analogue à celle de ce géomètre, M. Borel indique une méthode fondée sur la considération de l'intégrale de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(x)\,dx}{x-z},$$

qui permet d'obtenir une infinité de solutions du problème du prolongement analytique, solutions parmi lesquelles il y en a une infinité qui sont aussi générales que la solution de M. Mittag-Leffler. Il montre en outre que les développements de M. Mittag-Leffler, comme aussi les développements en séries de polynomes

pour les fonctions analytiques de variable réelles qu'a fait connaître M. Painlevé (*Comptes rendus,* 31 janvier 1898), s'appliquent à une classe étendue de *fonctions non analytiques.* C'est là un fait important et assez inattendu. M. Borel termine par d'intéressantes remarques sur la portée du théorème dû au savant suédois.

J. T.

---

# MÉLANGES.

## QUELQUES NOUVEAUX THÉORÈMES SUR L'APPROXIMATION DES QUANTITÉS A L'AIDE DE NOMBRES RATIONNELS;

PAR M. H. MINKOWSKI.

Dans plusieurs de ses Mémoires classiques sur la théorie des nombres M. Hermite s'est occupé de la recherche des minima de formes algébriques pour des valeurs entières des variables. Cette recherche l'a conduit à certaines approximations, dont il a mis parfaitement en évidence le *caractère algébrique.* Mais pour la plupart des inégalités que l'on obtient dans ce domaine, il y a encore une grande difficulté à déterminer les *limites les plus étroites* des inégalités et les *formes extrêmes* auxquelles en chaque cas ces limites sont rattachées. Dans quelques cas particulièrement simples je donnerai ici de telles limites précises; pour les démonstrations, un peu longues, je dois renvoyer le lecteur au deuxième cahier de ma *Géométrie des nombres*, qui paraîtra prochainement chez B.-G. Teubner.

### I.

1. THÉORÈME. — *Soient* $\varphi$, $\chi$, $\psi$, $\omega$ *quatre formes linéaires à trois variables* $x$, $y$, $z$, *à coefficients réels quelconques et de sorte que l'on ait*

$$\varphi + \chi + \psi + \omega = 0.$$

*Supposons que le déterminant de trois de ces formes soit toujours différent de zéro et désignons sa valeur absolue par* $4D$.

*Alors il existe toujours trois nombres entiers* $x$, $y$, $z$, *qui ne sont pas tous égaux à zéro et de sorte que toutes les quatre formes* $\varphi$, $\chi$, $\psi$, $\omega$ *soient en valeur absolue moindres que*

$$\sqrt[3]{\frac{4D}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3}}.$$

La limite $d = \sqrt[3]{\frac{108}{19}D}$ donnée ici est précise. En général, on peut aussi trouver des nombres entiers $x$, $y$, $z$ différents du système 0, 0, 0 et tels que les valeurs absolues de $\varphi$, $\chi$, $\psi$, $\omega$ soient toutes $< d$. Mais il y a un cas d'exception, où il sera impossible de satisfaire à cette autre condition, c'est lorsqu'il existe une substitution linéaire à coefficients entiers et à déterminant $\pm 1$, transformant les formes $\varphi$, $\chi$, $\psi$, $\omega$, abstraction faite de l'ordre, en

$$d\left(X - \frac{2}{3}Y\right), \quad d\left(Y - \frac{2}{3}Z\right), \quad d\left(-\frac{2}{3}X + Z\right), \quad -\frac{1}{3}d(X + Y + Z).$$

2. Le théorème que nous venons d'énoncer est susceptible d'une interprétation géométrique, qui peut-être trouvera une application dans la cristallographie :

Imaginons un système d'octaèdres, tous congruents entre eux et parallèlement orientés, en nombre infini et placés dans l'espace de manière que deux de ces corps n'aient jamais une partie commune et que leurs centres de gravité forment un réseau parallélépipédique de points, comme Bravais l'a considéré dans sa théorie de la structure des cristaux. (Tous les octaèdres peuvent alors être déduits de l'un quelconque d'entre eux par le même système de translations.) Il y aura une situation où les lacunes laissées par les octaèdres seront les plus étroites, ou, ce qui est la même chose, l'espace occupé par les corps sera le plus grand possible; c'est la situation où chacun des octaèdres a au moins un point commun avec quatorze autres de ces corps, et alors *le rapport de l'espace occupé par les octaèdres à l'espace laissé libre par ces corps sera de* 18 *à* 1.

3. Soient $\xi$, $\eta$, $\zeta$ trois formes en $x$, $y$, $z$ à coefficients réels et à déterminant $\pm D$, où $D > 0$. On pourra prendre dans le théorème du n° 1 :

$$\varphi = -\xi + \eta + \zeta, \quad \chi = \xi - \eta + \zeta, \quad \psi = \xi + \eta - \zeta, \quad \omega = -\xi - \eta - \zeta.$$

*Il existe alors des nombres entiers $x$, $y$, $z$ différents du système* 0, 0, 0 *et de sorte que l'on ait*

$$|\xi| + |\eta| + |\zeta| \leqq \sqrt[3]{\frac{108}{19} D}.$$

Dans le cas limite, pour lequel le signe $=$ est réservé, on peut toujours faire en sorte que l'on n'ait pas à la fois $|\xi| = |\eta| = |\zeta|$.

On en tire alors

$$|\xi\eta\zeta| < \frac{4}{19} D.$$

Or on doit remarquer que, dans cette dernière inégalité, le facteur $\frac{4}{19}$ pourrait encore être remplacé par un nombre plus petit.

4. D'autre part, on peut aussi prendre dans le n° 1 :

$$\frac{\varphi}{\sqrt[3]{2}}, \quad \frac{\chi}{\sqrt[3]{2}}, \quad \frac{\psi}{\sqrt[3]{2}}, \quad \frac{\omega}{\sqrt[3]{2}} = \xi + \zeta, \quad -\xi + \zeta, \quad \eta - \zeta, \quad -\eta - \zeta.$$

On voit alors qu'*il existe des nombres entiers $x$, $y$, $z$ différents du système* 0, 0, 0 *de sorte que l'on ait*

$$|\xi| + |\zeta| \leqq \sqrt[3]{\frac{54}{19} D}, \qquad |\eta| + |\zeta| \leqq \sqrt[3]{\frac{54}{19} D}.$$

Dans le cas limite où l'on doit prendre ici un des deux signes $=$, on peut toujours faire en sorte que l'on n'ait ni $\pm \xi = \zeta$ ni $\pm \eta = \zeta$.

En faisant usage alors des inégalités

$$\left|\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 \zeta\right| \leqq \left(\frac{2\left|\frac{\xi}{2}\right| + |\zeta|}{3}\right)^3, \qquad \left|\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \zeta\right| \leqq \left(\frac{2\left|\frac{\eta}{2}\right| + |\zeta|}{3}\right)^3,$$

on trouve

$$|\xi^2 \zeta| < \frac{8}{19} D, \qquad |\eta^2 \zeta| < \frac{8}{19} D.$$

Dans ces dernières inégalités, la limite n'est plus précise.

5. Soient $a$, $b$ *deux quantités réelles* quelconques. Posons, dans les inégalités du n° 4 :

$$\xi = x - az, \qquad \eta = y - bz, \qquad \zeta = \frac{z}{t^3},$$

$t$ étant un paramètre positif. On voit qu'on peut trouver des nombres entiers $x$, $y$, $z$, parmi lesquels $z$ est positif, et de sorte que $x - az$, $y - bz$ soient en valeur absolue plus petites qu'une quantité $\varepsilon$ donnée à volonté, et *que dans cette approximation on ait en même temps*

$$\left|\frac{x}{z} - a\right| < \sqrt{\frac{8}{19}}\,\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}, \qquad \left|\frac{y}{z} - b\right| < \sqrt{\frac{8}{19}}\,\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}.$$

La constante $\sqrt{\frac{8}{19}} = 0{,}648\ldots$, qui entre ici, est plus petite que $\frac{2}{3}$.

## II.

6. Théorème. — *Soient* $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ *deux formes linéaires à coefficients complexes quelconques et soit* $D = |\alpha\delta - \beta\gamma| > 0$. *On peut toujours trouver, dans le corps algébrique de* $i = \sqrt{-1}$, *des nombres entiers complexes* $x$, $y$ *différents du système* 0, 0 *de sorte que l'on ait*

$$|\xi| \leqq \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}\,D}, \qquad |\eta| \leqq \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}\,D}.$$

La limite $d = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}\,D}$ donnée ici est précise. En général, on aura aussi des nombres entiers complexes $x$, $y \neq 0{,}0$ de sorte que $|\xi| < d$, $|\eta| < d$. Mais dans un seul cas il sera impossible de satisfaire à ces autres inégalités; c'est lorsqu'il existe une substitution

$$x = pX + rY, \qquad y = qX + sY,$$

où $p$, $q$, $r$, $s$ sont des nombres entiers dans le corps de $i$ et le déterminant $ps - qr = \pm 1$ ou $\pm i$, de sorte que, par cette sub-

stitution, $\xi$, $\eta$ soient transformées en

$$\lambda d\left\{X + \left[\frac{1}{2} - i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]Y\right\}, \qquad \mu d\left\{\left[\frac{i}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]X + Y\right\},$$

$\lambda$ et $\mu$ étant des quantités dont la valeur absolue est égale à 1.

7. Théorème. — *Soient* $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ *deux formes linéaires à coefficients complexes quelconques et soit* $D = |\alpha\delta - \beta\gamma| > 0$. *On peut toujours trouver, dans le corps algébrique de* $j = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, *des nombres entiers complexes* $x, y$ *différents du système* 0, 0 *de sorte que l'on ait*

$$|\xi| \leqq \sqrt{D}, \qquad |\eta| \leqq \sqrt{D}.$$

Cette limite $d = \sqrt{D}$ est ici précise. En général, il y aura aussi des nombres entiers $x, y \neq 0, 0$ de sorte que $|\xi|$ et $|\eta|$ soient $< d$, excepté dans le cas où, dans le corps de $j$, il existe une substitution linéaire à coefficients entiers et à déterminant égal à une unité du corps, à l'aide de laquelle $\xi$, $\eta$, abstraction faite de l'ordre, se changent en $\lambda dX$, $\mu d(\tau X + Y)$, $\lambda$ et $\mu$ étant des quantités dont la valeur absolue est égale à 1, et $\tau$ une quantité complexe quelconque.

On remarquera ce fait intéressant que, de ces deux théorèmes correspondants, l'un, qui est relatif au corps algébrique de la *troisième racine de l'unité*, est beaucoup plus simple que l'autre, relatif au corps algébrique de la *quatrième racine de l'unité*.

8. Soit *a une quantité complexe* quelconque. En posant

$$\xi = x - ay, \qquad \eta = \frac{y}{t^2},$$

$t$ étant un paramètre réel quelconque $> 1$, on voit que, *dans le corps de* $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ (mais pas dans le corps de $\sqrt{-1}$), *il y aura toujours des nombres entiers complexes* $x, y$ *tels que*

$$0 < |y| \leqq t, \qquad |x - ay| < \frac{1}{t},$$

d'où l'on tire encore

$$|(x - ay)y| < 1.$$

1re Partie

## COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

VOGT (H.). — Éléments de Mathématiques supérieures a l'usage des physiciens, chimistes et ingénieurs et des élèves des facultés des Sciences. Un vol. in.-8°: VII-619 p. Paris, Nony, 1901.

Voici un livre qui mérite quelque succès, parce qu'il est bien fait, et qui l'obtiendra peut-être, parce qu'il répond à un besoin réel. Tous ceux qui sont un peu au courant des choses de notre enseignement savent, d'une part, que l'enseignement des Facultés des sciences et l'enseignement des lycées, terminé au baccalauréat, ne se raccordent pas, et, d'autre part, que la classe de Mathématiques spéciales, qui devrait relier les deux enseignements, n'a pour objet ni la formation scientifique des jeunes esprits, ni la préparation aux carrières; on y passe trois ou quatre ans et il n'est douteux pour personne que ceux qui, au bout de ces trois ou quatre années, n'ont pas réussi au concours qu'ils avaient en vue, et même quelques-uns de ceux qui ont réussi, auraient pu mieux employer leur temps et leurs efforts. Il est donc très désirable et très naturel qu'il s'organise dans les Universités des enseignements que puissent suivre les élèves qui sortent de la classe normale de Mathématiques élémentaires et où ceux-ci puissent acquérir les connaissances mathématiques indispensables aujourd'hui pour suivre un cours un peu élevé de Physique ou de Chimie, ou pour se préparer à une carrière industrielle. Cela s'est fait dans plusieurs centres universitaires, et en particulier à Nancy, où l'on sait que la préparation aux études physico-chimiques, dirigée par des savants éminents, est fortement organisée.

C'est à cet enseignement que correspond le volume que publie aujourd'hui M. Vogt. Son livre contient un peu moins de cinquante chapitres, dont chacun équivaut, à très peu près, à une leçon de Faculté. On y trouve de l'Algèbre, de la Géométrie analytique, de l'Analyse. Il commence par la résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues et se termine par l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. On y rencontrera, ici des notions sur le système C. G. S. ou sur le calcul numérique, là

des notions sur la construction des courbes d'après leur équation, plus loin les formules de Green et de Stokes. L'auteur s'est préoccupé de dire ce qui était nécessaire, de le dire clairement, et de ne dire que cela. Il n'a tenu aucun compte des habitudes ou des routines de l'enseignement ; il a même eu le courage de sacrifier ces arrangements esthétiques, ces beaux enchaînements, où le professeur cherche volontiers sa jouissance. M. Vogt guide son lecteur tantôt sur une route, tantôt sur une autre : ce n'est pas une route qu'il prétend lui faire connaître, mais un pays. On se dit parfois qu'il aurait pu suivre un autre ordre, et cela n'est pas douteux ; mais on finit par reconnaître que celui qu'il a adopté est parfaitement raisonnable. Comment a-t-il fait le départ des matières? Il l'a fait en se préoccupant surtout des besoins ultérieurs de ses élèves, non des jolies choses qu'il pourrait leur dire sur chacun des sujets qu'il traitait. Disons franchement qu'il s'est moins proposé de former des mathématiciens, que de donner à ses élèves des connaissances qui pussent leur servir. Évidemment aussi, il n'a pas craint de demander conseil à ses collègues, de leur emprunter des exemples et il s'est résigné à ne pas parler des sujets dont ceux-ci n'avaient pas besoin : il a su avoir du désintéressement. Son exposition, toutefois, reste rigoureuse, sans excès et sans scrupules puérils, mais toujours claire et scientifique.

En fermant son livre, après l'avoir feuilleté, on s'étonne de tout ce qu'il contient. Eh quoi! tout cela en moins de cinquante leçons? Cela pourrait donc s'apprendre en deux mois? Et combien d'années y passent la plupart des étudiants, avant même de savoir tout ce qu'il y a dans le livre de M. Vogt? Et alors que de temps perdu!... Il ne faut rien exagérer : pour ceux qui veulent être mathématiciens, l'auteur serait le premier à proclamer l'insuffisance de ces leçons; même pour les autres, qui ne veulent apprendre que ce qu'il faut de Mathématiques pour s'en servir, ces *Éléments de Mathématiques supérieures* représentent le travail d'une bonne année, et un travail soutenu. Il ne suffit pas d'avoir entendu, compris, appris une leçon; il faut s'habituer à appliquer les méthodes. A la fin de son livre, M. Vogt a réuni un peu plus de deux cents problèmes sur lesquels ses lecteurs pourront s'exercer, et qui leur permettront de reconnaître s'ils sont réellement en possession de ce qu'ils ont étudié.

Sauf pour les formules relatives aux centres de gravité, l'auteur n'a pas touché à la Mécanique. Je ne verrais pas d'inconvénient, quitte à grossir encore un peu un livre de ce genre, à voir figurer quelques notions de Cinématique dans les chapitres consacrés aux applications géométriques du Calcul différentiel, et dans le chapitre de Géométrie analytique consacré au plan et à la ligne droite, quelques-unes des formules que l'on utilise en statique. Mais peut-être l'auteur nous réserve-t-il un petit Traité de Mécanique, conçu dans le même esprit, et a-t-il voulu réserver des sujets qui figureraient naturellement dans un pareil livre? Celui qu'il vient de publier le ferait désirer.

J. T.

---

RUSSELL (B.). — Essai sur les fondements de la Géométrie. Traduction par A. Cadenat, Revue et annotée par l'auteur et par L. Couturat. Un vol. in-8°: x-272 p. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

M. Couturat a signalé dans le *Bulletin* l'intérêt et l'importance du travail de M. Russell; nous sommes heureux d'en annoncer la traduction française. Je crois avoir eu déjà l'occasion de dire que la traduction de ces sortes de livres est particulièrement désirable : celui-ci, comme on sait, s'adresse à la fois aux philosophes et aux mathématiciens; ceux qui s'intéressent à la Philosophie et à la Mathématique, sans être très familiers avec l'une ou avec l'autre, et qui n'ont pas à leur disposition le répertoire complet des deux sciences dans une langue étrangère sont, par cela même, assez empêchés de lire le texte original : ils seront heureux d'avoir à leur disposition l'élégante traduction de M. Cadenat.

M. Russell signale quelques améliorations de détail qu'il a pu introduire dans l'Édition française. « Les précieuses critiques de M. Poincaré ([1]), ajoute-t-il, me sont malheureusement parvenues trop tard pour que j'en pusse tenir compte dans cette revision. »

---

([1]) *Revue de Métaphysique et de Morale*, mai 1899.

M. Coutural a ajouté un petit *lexique philosophique;* les mathématiciens lui en seront particulièrement reconnaissants. Les mots du langage philosophique y sont expliqués avec une parfaite clarté.

J. T.

KIEPERT (L.). — GRUNDRISS DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG. I Theil : Differential-Rechnung. Neunte vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von Weil. Dr. Max Steyemann. Mit 171 Figuren im Texte.

Les éditions de ce Livre, destiné aux techniciens, se succèdent très rapidement, et il convient de dire qu'elles vont toujours en s'améliorant : les qualités *pratiques* qui ont sans doute fait le succès de l'Ouvrage persistent sous les remaniements, et M. Kiepert a tenu à lui conserver son caractère élémentaire : les subtilités théoriques sont écartées, et de nombreuses figures viennent continuellement éclairer les raisonnements; mais l'exposition n'en est pas moins une exposition scientifique.

Parmi les additions contenues dans cette nouvelle édition, il convient de signaler en particulier le Chapitre consacré aux fonctions hyperboliques et les tables numériques de ces fonctions placées à la fin du Volume, la formule d'interpolation de Lagrange, et la résolution des équations numériques.

Avec ces additions, le présent Volume contient, outre les sujets qu'on fait rentrer dans toute exposition du Calcul différentiel, l'introduction des nombres complexes (formule de Moivre, exponentielle à argument complexe, etc.), les éléments de la Géométrie analytique, à deux et trois dimensions, ceux de l'Algèbre (plus grand commun diviseur, théorème de Sturm, déterminants, etc.). Les applications y sont extrêmement nombreuses. Enfin les trente dernières pages résument les formules et les théorèmes fondamentaux. On sent chez l'Auteur le souci très net des besoins des lecteurs auxquels il s'adresse.

J. T.

# MÉLANGES.

## SUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS A DEUX VARIABLES A L'AIDE DE FONCTIONS RATIONNELLES ET SUR UN THÉORÈME DE M. NOETHER;

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Dans diverses questions se rattachant à la théorie des fonctions algébriques de deux variables, il y aurait intérêt à savoir résoudre le problème suivant. *Soit donné un polynome $f(x, y, z)$ en $x, y, z$, et formons l'équation*

$$f(x, y, z) = 0.$$

*Est-il possible de satisfaire identiquement à cette équation en prenant pour $y$ et $z$ des fractions rationnelles de $x$?* Ce problème semble offrir quelques difficultés; en me réservant d'y revenir, je veux présenter seulement ici quelques remarques à son sujet. Tout d'abord *il n'admettra pas en général de solution;* il suffira, pour s'en convaincre, de considérer un cas particulier suffisamment étendu. Soit l'équation

$$z^m = a(x)\,y^m + b(x) \qquad (m > 2),$$

où $a$ et $b$ sont des polynomes arbitraires en $x$. On peut voir, comme il suit, qu'il n'est pas possible de satisfaire à cette équation en prenant pour $y$ et $z$ des fractions rationnelles de $x$. Supposons en effet que la chose soit possible, et posons

$$(1) \qquad z = \sqrt[m]{b}\,Z, \qquad y = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}\,Y;$$

on aura

$$(2) \qquad Z^m = Y^m + 1.$$

D'après les équations (1), Y et Z sont des fonctions rationnelles de

$$(3) \qquad x, \quad \sqrt[m]{b(x)}, \quad \sqrt[m]{a(x)};$$

mais, d'après une proposition élémentaire, on peut trouver deux

paramètres $\xi$ et $\eta$ liés par une relation algébrique irréductible

$$F(\xi, \eta) = 0, \tag{4}$$

telles que les quantités (3) soient fonctions rationnelles de $\xi$ et $\eta$. Par suite les courbes (2) et (4) se correspondent rationnellement, de telle sorte que Z et Y sont des fonctions rationnelles de $\xi$ et $\eta$. Or si les polynomes $a(x)$ et $b(x)$ sont arbitraires, il est clair que ceci ne sera pas possible, et l'impossibilité annoncée est ainsi mise en évidence.

2. Le problème sera évidemment possible dans certains cas particuliers; étudions plus en détail un cas très simple qui montrera la complexité de la question. Je suppose que la relation se réduise à

$$z^2 = f(x)F(y),$$

$f$ et F étant des polynomes du troisième degré respectivement en $x$ et en $y$. *Trois* solutions apparaissent immédiatement en prenant $z = 0$ et $y$ égal à une racine de l'équation $F(y) = 0$. Supposons qu'il existe d'autres solutions $y$ et $z$ rationnelles en $x$; on a

$$\frac{dy}{\sqrt{F(y)}} = \frac{dy}{dx}\,\frac{f(x)}{z}\,\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

De là on déduit que l'intégrale de première espèce

$$\int \frac{dy}{\sqrt{F(y)}}$$

se transforme, en prenant pour $y$ une fonction rationnelle de $x$, en l'intégrale

$$\int R(x)\,\frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

$R(x)$ étant rationnelle en $x$. Comme cette intégrale doit être aussi de première espèce, il faut que $R(x)$ se réduise à une constante, et par suite les fonctions rationnelles $y$ de $x$ répondant à la question doivent satisfaire à la relation

$$\frac{dy}{\sqrt{F(y)}} = C\,\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \tag{5}$$

C étant une constante non nulle. Réciproquement d'ailleurs, si une fonction rationnelle $y$ de $x$ satisfait à une telle relation, on aura

$$\sqrt{f(x)F(y)} = \frac{CF(y)}{\frac{dy}{dx}}$$

et par suite $z$ sera rationnelle en $x$. *L'équation* (5) *se rencontre dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques;* il est évident, d'après cette équation, que si les deux polynomes du troisième degré $f(x)$ et $F(y)$ sont arbitraires, il ne sera pas possible de déterminer une fonction rationnelle $y$ de $x$ (ne se réduisant pas à une constante) satisfaisant aux conditions voulues.

De plus, en suivant la théorie de la transformation, on aura tous les polynomes associés $f(x)$ et $F(y)$ ayant la propriété cherchée. Un cas très simple sera celui où les deux polynomes sont identiques, soit

$$f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

De ce qui précède on conclut qu'on pourra trouver une infinité de fonctions rationnelles $y$ de $x$, telles que l'équation

$$z^2 = f(x)f(y)$$

donnera pour $z$ des fonctions rationnelles de $x$. En désignant par $\wp(u)$ la fonction elliptique (avec les notations de Weierstrass) correspondant au polynome $f(x)$, posons

$$y = \wp(mu), \qquad x = \wp(u),$$

$m$ étant un entier arbitraire; $y$ est une fonction rationnelle de $x$ répondant à la question.

3. Reprenons l'équation considérée au § 1, dans le cas où $m = 2$

$$z^2 = a(x)y^2 + b(x), \tag{6}$$

et supposons que ni $a$ ni $b$ ne soient nuls. On pourra ici satisfaire à cette équation en prenant pour $z$ et $y$ des fonctions rationnelles de $x$. Nous l'établirons simplement en montrant qu'on peut déterminer deux polynomes $u$ et $v$ tels que

$$a(x)u^2 + b(x)v^2$$

soit un carré parfait. Supposons, pour fixer les idées, que $a(x)$ et $b(x)$ soient de degré pair $2m$, et désignons par $\mu$ le degré de $u$ et $v$. L'expression précédente est un polynome de degré $2m + 2\mu$; on obtiendra $m + \mu$ conditions en écrivant qu'il se réduit à un carré parfait. Or dans les deux polynomes $u$ et $v$, il y a $2\mu + 1$ coefficients indéterminés, en supposant qu'un des coefficients ait une valeur numérique arbitraire; si donc

$$2\mu + 1 > m + \mu \qquad \text{ou} \qquad \mu > m - 1,$$

on pourra trouver les polynomes $u$ et $v$.

Le fait, que l'on peut trouver des fractions rationnelles $z$ et $y$ de $x$ satisfaisant à la relation (6), revient au fond à une proposition de M. Noether qui est fondamentale dans la théorie des surfaces unicursales. L'illustre géomètre d'Erlangen a considéré (*Math. Annalen,* t. III) des surfaces possédant un faisceau linéaire de courbes *unicursales*. Dans le cas où il n'y a qu'*une seule* courbe mobile de rencontre du faisceau linéaire

$$P + \lambda Q = 0$$

avec la surface envisagée, il établit d'abord que la surface correspond birationnellement soit à une surface réglée d'ordre $n$ avec droite multiple d'ordre $n - 1$, soit à une surface d'ordre $n$ avec droite multiple d'ordre $n - 2$. Dans ce dernier cas, qui seul présente quelques difficultés, M. Noether considère particulièrement le cas où la section de la surface par un plan arbitraire contenant la droite multiple d'ordre $n - 2$ est une conique indécomposable, et il établit qu'alors la surface est unicursale, en cherchant sur la surface une courbe *unisécante* de cette conique. Or, à notre point de vue, nous pouvons, en plaçant convenablement la droite multiple et faisant sur $z$ une transformation linéaire immédiate, mettre l'équation de la surface sous la forme (6), et le problème de M. Noether revient à la résolution de l'équation (6) dans les conditions indiquées; on en déduit immédiatement que la surface est unicursale.

1re Partie.

## COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GINO LORIA. — Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro III. Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci; Modène, Società tipografica; 1900. 138 p., gr. in-4°.

Le savant professeur de Gênes poursuit, par ce nouveau Livre, l'exposé historique de la Mathématique grecque dont il a commencé la publication dans les Mémoires de l'Académie de Modène. Le sous-titre de cette troisième partie, digne en tout point des deux précédentes, indique que l'auteur n'a pas, comme Moritz Cantor, limité son plan à la Mathématique pure, mais qu'il a au moins fait, cette fois, une longue excursion dans le domaine des applications. Son œuvre n'en mérite que mieux la bienvenue : sans doute l'unité de ce Livre III est un peu lâche, par suite de la variété des questions abordées; mais cela était inévitable, et M. Gino Loria n'avait pas besoin de présenter toutes ces questions comme se rattachant à la découverte des lois de la dynamique céleste (p. 133). Ce rattachement, pour l'Hydrostatique et la Géodésie (c'est-à-dire l'Arpentage), paraîtra un peu forcé; l'unité véritable du Livre est certainement plutôt chronologique. Après l'épanouissement de la Géométrie grecque, de Pythagore à Apollonius, devait fleurir à son tour l'Astronomie scientifique. C'est donc la période d'Hipparque à Ptolémée que nous raconte aujourd'hui M. Gino Loria, après avoir naturellement rappelé tout d'abord les premières tentatives cosmologiques des Grecs.

Le Chapitre I passe en effet rapidement en revue, en premier lieu, les hypothèses niant la sphéricité de la Terre, puis celles de Pythagore et des Italiques, et la première conception du système héliocentrique. Il s'arrête un peu plus longuement sur les idées astronomiques de Platon et à ce sujet sur le *Liber de astronomia* de Théon de Smyrne, expose clairement le système des sphères homocentriques d'Eudoxe et consacre deux pages à l'histoire des cycles luni-solaires. Malgré le témoignage d'Hérodote, qui doit avoir été amené par une fausse tradition sur la réforme du calendrier due à Solon, je ne crois pas que, dans cette histoire, l'auteur

ait eu raison de suivre l'opinion courante qui admet l'existence, à un moment donné, d'un cycle de deux ans, correspondant à une année solaire moyenne de 369 jours. Bœckh et Ideler ont vu la vérité sur ce point, sans l'exprimer assez nettement. Les calendriers grecs ont été réglés longtemps sur la seule observation des nouvelles lunes et des solstices d'été. Que sur la date d'*un* solstice (observé d'après le lieu de l'horizon où le Soleil se lève le plus au nord), on se soit trompé de quatre jours, cela n'est sans doute pas invraisemblable. Mais ce qui l'est, c'est qu'un cycle de deux ans, dont l'inexactitude devait être très rapidement reconnue, ait jamais pu prévaloir dans l'ensemble des cités grecques. Les Hellènes n'ont en fait pratiqué que deux cycles, celui de 8 ans, qui paraît remonter à une antiquité légendaire, et celui de 19 ans, introduit par Méton et Euctémon.

Le Chapitre I se termine par une étude détaillée du mode de démonstration employé par Aristarque de Samos dans l'écrit qui nous reste de lui *Sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune*. M. Gino Loria en rapproche les déductions analogues de l'*Arénaire* d'Archimède.

Le Chapitre II, après avoir indiqué les preuves de l'existence d'un ancien Traité de *Sphérique* remontant au IVe siècle avant notre ère, analyse l'opuscule d'Antolycos de Pitane sur la *Sphère mobile,* les *Phénomènes* d'Euclide, l'*Anaphoricos* d'Hypsiclès, les *Sphériques* de Théodose, celles de Ménélas. Le Chapitre III expose complètement la Trigonométrie des anciens, telle qu'on la trouve chez Ptolémée (et son commentateur, Théon d'Alexandrie); suivent quelques indications sur les autres travaux mathématiques de l'auteur de l'*Almageste,* en particulier sur les systèmes de projection connus dans l'antiquité.

Le Chapitre IV est consacré aux écrits sur l'Optique et la Mécanique; il passe en revue la double recension de l'*Optique* (perspective) d'Euclide, le *Résumé des hypothèses optiques* de Damianos Héliodore, la *Catoptrique* faussement attribuée à Euclide, celle de Héron d'Alexandrie (dont nous n'avons qu'une traduction latine de Guillaume de Mœrbeke et qui a longtemps été connue sous le titre de *Ptolemæus de Speculis*); enfin l'*Optique* de Ptolémée (version sur l'arabe d'Eugenius Ammiratus, malheureusement incomplète), qui nous renseigne sur les connaissances des

anciens concernant la réfraction. Viennent ensuite quelques aperçus sur deux autres traités dont le texte grec est également perdu : celui des *Corps flottants* d'Archimède et la *Mécanique* de Héron d'Alexandrie.

Je remarque, au sujet de l'opuscule de Damianos, que l'édition de Danti (Florence, 1573) en donne, non pas seulement quelques fragments, mais bien le texte entier. Les additions publiées par Érasme Bartholin (Paris, Cramoisy, 1657) sont tirées d'un manuscrit de la Barberine (I, 131), qui est un faux d'Ange Vergèce, ainsi que je l'ai reconnu en 1886.

A propos de l'Ouvrage d'Archimède, M. Gino Loria reproduit cette phrase de Thurot : « Il est étrange que Pappus ait cité le *Traité des corps flottants* comme un Ouvrage de Mécanique appliquée et amusante avec ceux de Héron; évidemment il n'en connaissait que le titre. » Je ne partage nullement cette opinion et, tout au contraire, si singulier qu'il paraisse à première vue, le passage en question de Pappus me semble indiquer très justement le mobile de ces profondes recherches sur la stabilité des corps flottants, auxquelles les modernes, comme le reconnaît Lagrange, n'ont guère ajouté. Ce segment de paraboloïde qui, suivant les proportions de sa figure et suivant le rapport de sa densité à celle du liquide où il est immergé, prend diverses positions d'équilibre et parfois se renverse complètement, qu'est-ce autre chose qu'un *joujou* mathématique? C'est pour cet objet, et non pas pour étudier les conditions de stabilité d'un navire, qu'a été constituée la doctrine du métacentre. Évidemment notre siècle industriel a peine à comprendre que les seuls Ouvrages qui nous soient parvenus en grec sur la Mécanique concernent un matériel de guerre ou un matériel d'amusement. Mais il n'y a point là un effet du hasard : c'étaient les sujets qui avaient le plus d'importance pour l'homme libre.

Le Chapitre V, sur Héron d'Alexandrie, après l'exposé de ce qu'on appelle la *question héronienne*, donne : une analyse complète du Traité de la *Dioptra;* le relevé, dans le Commentaire sur Euclide d'*Anaritius* (el-Nirizi) récemment publié par Curtze (Leipzig, Teubner, 1899), des principales indications concernant les travaux de Héron sur la Géométrie élémentaire; l'analyse de la compilation des *Définitions*, faussement attribuée à Héron; enfin

une intéressante communication sur le grand Ouvrage authentique d'Arpentage du même auteur, les *Métriques,* récemment révélé par la découverte d'un manuscrit dans la bibliothèque du Sérail de Constantinople, et dont il faut attendre la publication pour porter un jugement définitif sur la véritable valeur de Héron.

En ce qui concerne la question de savoir si Héron a ou non commenté Euclide, l'affirmative n'est plus douteuse depuis la publication de Curtze. J'ajoute que, d'après les indications de L. Nix dans l'introduction du second Volume de l'édition Teubner des Œuvres de Héron (1901), les Arabes ont possédé ce commentaire et que, d'après la désignation qu'en donnent les bibliographes, il devait porter un titre comme : *Apories* (difficultés) *et solutions concernant les Éléments d'Euclide.* Il n'aurait donc pas eu proprement la forme exégétique.

Après avoir, dans le Chapitre VI, consacré quelques pages aux opuscules et fragments d'Arpentage qui subsistent en grec en dehors des écrits de Héron, M. Gino Loria soulève la question des causes qui ont amené le déclin de la Géométrie dans l'antiquité, après ce qu'il appelle l'*âge d'or* (d'Euclide à Apollonius). Il a grande raison de se refuser à admettre qu'il y ait eu à ce déclin une cause unique, et il a bien posé la question en la rapprochant, comme analogue et aussi difficile, de celle de savoir « pourquoi l'Algèbre, après avoir eu sa résidence propre en Italie à l'époque de Tartaglia et de Cardan, a quitté ce beau pays, comme si elle n'y trouvait plus un milieu qui lui fût favorable ». Peut-être cependant aurait-il pu aboutir à des conclusions un peu plus précises que celles qu'il a formulées.

Il y a là, tout d'abord, un fait qui s'est répété si constamment dans l'histoire des sciences (quoique sans doute d'une façon plus ou moins frappante suivant les circonstances) qu'il doit être considéré comme naturel. Une carrière nouvelle est ouverte dans un milieu intellectuel; on s'y porte avec ardeur, les découvertes se multiplient, puis l'élan se ralentit; on est arrivé au tuf improductif. On se dirige alors d'un autre côté; la « mode » se porte d'ordinaire, conformément à une règle énoncée par Auguste Comte, sur le terrain scientifique le plus voisin dans l'ordre de complexité, en y adaptant les notions nouvelles acquises sur le premier terrain. On ne revient au premier qu'une fois un cycle

parcouru; le milieu intellectuel est alors renouvelé et la tyrannie scolastique résultant de l'application exclusive des anciennes méthodes ayant pris fin, le génie d'invention reprend son libre jeu. Mais si les résultats acquis dans un milieu intellectuel sont transportés dans un autre suffisamment favorable et n'ayant pas subi la même discipline scolastique, le travail d'assimilation est précisément de nature à provoquer l'éclosion de génies qui, sur le même terrain, renouvelleront la face de la Science. C'est ainsi qu'au XVII^e siècle la Géométrie analytique s'élèvera brusquement sur les fondements préparés par les anciens, mais d'après un autre plan que le leur.

Toute forme spéciale de la Science n'est susceptible, par elle-même, que d'un développement limité : elle se cristallise pour et par l'enseignement et ne se prête plus dès lors à la création, tant qu'elle n'est pas métamorphosée par l'action d'idées nouvelles. En fait, la Géométrie cartésienne aura vécu deux siècles; aujourd'hui c'est le tour de la Géométrie projective, en attendant l'avenir inconnu. Il est à peine utile de remarquer d'ailleurs que, depuis que les communications entre les milieux intellectuels des différents peuples civilisés sont devenues assez rapides pour rendre la Science internationale, la règle historique sur laquelle j'appelle l'attention ne peut plus s'appliquer à ces milieux comme s'ils étaient isolés.

La Géométrie grecque, comme toute forme spéciale, portait donc en elle-même « un vice interne dérivant de sa propre constitution »; ce vice, M. Zeuthen l'a merveilleusement décrit, mais si ce n'avait été celui-là c'en eût été un autre. Le surprenant, dans son histoire, n'est pas que sa floraison se soit arrêtée, c'est qu'elle ait duré aussi longtemps, et je n'hésite pas à en chercher la raison dans cette circonstance que, quoique le milieu scientifique de l'hellénisme ait été toujours très restreint, si on le compare à ceux des peuples modernes, il a été renouvelé à la suite des conquêtes d'Alexandre; après la période véritablement hellène, la Grèce proprement dite se désintéresse sensiblement de la Science, qui se transplante dans les pays hellénisés.

Quant à la décadence finale, il y a là un fait d'un autre ordre; elle atteint non seulement la production géométrique, mais toute la production scientifique; c'est donc l'indice d'une maladie du

corps social, et cette maladie est trop bien constatée historiquement d'autre part pour qu'il soit nécessaire de la préciser en ce qui concerne la Science. De même pour l'Italie au XVIII^e siècle, pour l'Espagne depuis le XVI^e, on ne peut nier que la faiblesse de la production scientifique ne soit liée à des causes profondes d'ordre politique.

Mais il est une autre question, beaucoup plus obscure à mon sens, et que M. Gino Loria n'a pas abordée. Il me paraît également certain qu'une science n'est réellement vivante que si les recherches y sont poursuivies d'une façon absolument désintéressée, et que cependant elle est condamnée à déchoir, si elle n'est pas soutenue par les besoins de la pratique, qui lui fournissent incessamment de nouvelles questions propres à la rajeunir. C'est dans la conciliation de ces deux formules, d'apparence contradictoire, que réside la difficulté. Mais, en fait, la technique ancienne paraît avoir été trop pauvre, la production industrielle trop peu développée dans l'antiquité pour avoir suscité assez d'intérêt autour de questions qui nous paraissent aujourd'hui primordiales. Les applications de la Mécanique étaient trop restreintes pour que le problème de la composition des forces concourantes ait été réellement posé, l'artillerie des balistes et des catapultes trop imparfaite pour que le génie d'un Archimède s'attachât à rechercher la loi de la chute des corps et la trajectoire des projectiles. Sans la croyance à l'Astrologie, les recherches astronomiques auraient-elles prospéré?

Ce sont incontestablement deux questions de technique, la construction de solides semblables dans un rapport donné, et la division de l'angle, qui ont suscité les travaux théoriques de la Géométrie supérieure chez les Grecs. Mais quand ils se sont trouvés poussés assez loin de la pratique pour ne plus apparaître que comme des recherches simplement curieuses, l'intérêt général devait forcément s'en détacher.

PAUL TANNERY.

ANDRÉ (DÉSIRÉ). — ORGANISATION ET COMPTABILITÉ DES ASSAUTS COMPLETS. Manuel pratique. Un vol., 76 p., petit in-8°. Paris, Belin frères; 1900.

Bien que, par son titre et par son langage, ce petit livre semble se rapporter uniquement à l'escrime, il convient, en réalité, à une foule d'autres exercices. Sous le nom d'*Assauts complets*, il désigne, en effet, tous les modes de concours où chacun des rivaux lutte successivement avec tous les autres.

La lutte, le combat entre deux concurrents, est ce que l'auteur appelle un *jeu*. L'assaut est l'ensemble de plusieurs jeux; l'assaut complet, l'ensemble de tous les jeux possibles. Si le nombre des concurrents, ou, comme on dit en escrime, le nombre des *tireurs* est $n$, l'assaut complet comprend autant de jeux qu'il existe de combinaisons simples de $n$ objets deux à deux. Ce nombre des jeux croît beaucoup plus vite que le nombre des tireurs. De là, lorsque ce dernier nombre est un peu grand, certaines difficultés pour organiser les assauts complets et pour en tenir la comptabilité. L'auteur fait connaître pour ces deux opérations quelques-unes des règles, très faciles et très simples, qu'il a obtenues par des considérations mathématiques, et exposées dans deux Mémoires insérés au *Bulletin* (1) *de la Société Philomathique de Paris*.

Pour la comptabilité, il indique l'usage d'une table à double entrée ou abaque contenant autant de lignes et autant de colonnes qu'il y a de tireurs. Quelle que soit la façon de marquer les résultats des différents jeux, chaque ligne donne le nombre de coups reçus par le tireur correspondant; chaque colonne, le nombre de coups donnés. C'est un procédé tout à fait général. Il comprend, comme cas particulier, celui que la Société *l'Escrime à l'épée de Paris* emploie, depuis sa fondation, pour les poules qu'elle organise. L'auteur fait remarquer que les deux classements effectués, l'un, d'après le plus petit nombre de coups reçus; l'autre, d'après le plus grand nombre de coups donnés, coïncident rarement. C'est là un fait curieux et qui n'avait peut-être point encore été signalé. Dans son petit livre, M. D. André ne s'y

(1) Année 1898-1899; année 1899-1900.

arrête guère; mais depuis, dans un troisième Mémoire [1], il a donné des moyens équitables pour rendre identiques ces deux classements différents.

La question de l'organisation des assauts complets est beaucoup plus compliquée. Elle comprend deux parties se rapportant, la première, à l'ordre de succession des jeux; la seconde, à leur mode de groupement. Dans la première, il s'agit de former, avec tous les jeux composant l'assaut complet, une série linéaire où deux jeux consécutifs ne comprennent jamais un même tireur. Dans la seconde, de distribuer ces différents jeux en groupes, qui en comprennent tous le même nombre; où, autant que possible, figurent tous les tireurs; et où chaque tireur ne se batte qu'une fois.

Disposer les jeux en une série linéaire suivant l'ordre que nous venons d'indiquer, c'est une condition qui s'impose, car il serait injuste qu'un même tireur se battît deux fois de suite. Elle avait attiré l'attention des Sociétés d'escrime, car celle que nous avons citée plus haut possède, depuis plusieurs années, des tableaux donnant un pareil ordre dans les cas où le nombre des tireurs n'est pas grand, c'est-à-dire dans les cas les plus usuels.

Il semble, au contraire, en escrime du moins, qu'on n'avait pas encore considéré le groupement des jeux : peut-être même n'y avait-on pas songé. C'est un problème difficile, que M. D. André s'est posé et qu'il a résolu. Lorsque $n$ est pair et égal à $2\nu$, il partage le système entier des jeux en $n-1$ groupes de $\nu$ jeux, dans lesquels tous les tireurs figurent, et ne figurent chacun qu'une fois. Lorsque $n$ est impair et égal à $2\nu+1$, il partage ce même système en $n$ groupes de $\nu$ jeux; dans l'un quelconque de ces groupes figurent tous les tireurs, excepté un; mais le tireur qui ne figure pas dans un groupe figure dans tous les autres.

L'auteur a trouvé une méthode générale, en quelque sorte mécanique, pour former tous ces groupes, quel que soit le nombre pair ou impair des tireurs. Cette méthode résout à elle seule, et en même temps, la question de la disposition des jeux et celle de leur groupement. Elle conduit, en effet, à ranger tous les jeux en une série linéaire où deux jeux consécutifs ne comprennent

---

[1] *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, année 1899-1900.

jamais un même tireur; et où des vides, convenablement espacés, séparent les uns des autres les différents groupes de jeux.

Cette division de la série en groupes successifs présente de grands avantages. Lorsque les jeux sont nombreux, en effet, on ne peut pas les effectuer tous en une seule fois, en une seule séance. Il faut, de temps en temps, s'interrompre. A quels moments opérer ces interruptions ou, plutôt, en quels points de la série linéaire exécuter ces coupures? Aux points qui séparent les groupes successifs. Lorsqu'on opère ainsi, tout se passe de la façon la plus équitable. En chaque séance, autant qu'il est possible, les tireurs sont tous traités de même. Le partage en groupes permet, en outre, si l'on institue plusieurs jurys, de faire exécuter simultanément plusieurs jeux d'un même groupe, ou même la totalité de ces jeux. C'est le moyen d'effectuer le concours entier dans un minimum de temps.

Les Mémoires et le livre de M. D. André nous paraissent être les premiers travaux où l'on ait traité scientifiquement, et dans leur ensemble, ces questions de la comptabilité et de l'organisation des Assauts complets. Grâce à eux, ces questions ont pris, dans les Mathématiques appliquées, pour la garder et s'y développer, la place qu'elles méritent. A la vérité, la comptabilité des Assauts complets n'offrant guère de difficultés, ne présente pas, au point de vue mathématique, un intérêt très grand; mais il en est tout autrement de l'organisation de ces mêmes assauts. Les deux problèmes de la disposition des jeux en série et de leur distribution en groupes sont, en effet, deux problèmes d'Analyse combinatoire, relatifs aux combinaisons simples de $n$ objets deux à deux, et déjà assez difficiles. La méthode donnée par l'auteur en constitue une solution complète. Ils peuvent, d'ailleurs, immédiatement être généralisés, et ils l'ont été, par M. D. André lui-même [1], en ces deux énoncés :

I. *Étant données toutes les combinaisons simples de $n$ éléments $p$ à $p$, placer ces combinaisons les unes à la suite des autres sur une même ligne, de telle façon que deux combinai-*

[1] *Intermédiaire des Mathématiciens*, t. VII, p. 265.

*sons consécutives quelconques ne comprennent jamais plus de k éléments communs;*

II. *Le nombre* N *des combinaisons simples, p à p, de n éléments étant divisible par h, distribuer ces* N *combinaisons en h groupes pareils, c'est-à-dire en h groupes contenant tous le même nombre de combinaisons et formés tous de la même manière à l'aide des n éléments considérés.*

En même temps que l'organisation des Assauts complets conduit à la considération de ces problèmes, il est bien évident qu'elle touche à une question très générale aussi, qui se présente souvent dans l'armée, la marine et surtout l'industrie : la question si importante de la formation des *équipes* et de leur roulement.

---

BRIOSCHI (Francesco). — Opere mathematiche pubblicate per cura del Comitato per le Onoranze a Francesco Brioschi (*G. Ascoli, E. Beltrami, C. Colombo, L. Cremona, C. Negri, C. Schiaparelli*). Tomo Primo con Retratto di F. Brioschi, in-4°, XII-416 p. Milan, U. Hoepli, 1901.

Immédiatement après la mort de F. Brioschi, l'éminent fondateur et professeur de l'Institut technique de Milan, de nombreux élèves, amis et admirateurs de ce grand géomètre italien, constituèrent un Comité chargé de recueillir des souscriptions pour honorer dignement sa mémoire.

Les sommes nécessaires ayant été rapidement recueillies, les souscripteurs confièrent à un Comité le soin de les employer de la manière la plus propre à perpétuer le souvenir de F. Brioschi.

Ce Comité décida d'employer une partie de la somme disponible à élever une statue de bronze au grand géomètre et à placer deux inscriptions commémoratives, l'une, à l'Institut Lombard des Sciences et Lettres, l'autre au Collège des Ingénieurs de Milan; une autre partie de la souscription a été consacrée à l'achat de sa bibliothèque; le reste servira à assurer la publication de toute son œuvre mathématique.

C'est le premier Volume de cette publication, orné d'un beau

et ressemblant portrait de Brioschi, qui est offert aujourd'hui au public savant.

Le Comité avait délégué à MM. Beltrami et Cremona le soin de recueillir les nombreux écrits que Brioschi avait donnés dans les différents recueils scientifiques, de les classer, de procéder à leur revision en faisant appel au concours des amis et des élèves de Brioschi. C'est ainsi qu'ont été préparés les deux premiers volumes avec le concours de MM. Cerruti, Bianchi, Capelli, Gerbaldi, Loria, Pascal, Pittarelli, Reina et Tonelli. M. Gerbaldi s'est de plus chargé de la seconde et définitive revision de l'ensemble.

Après la mort prématurée de Beltrami, le Comité a fait appel, pour le remplacer, aux professeurs V. Cerruti et Pascal, qui auront, avec M. Gerbaldi, à surveiller et à préparer le reste de la publication.

On le voit, le Comité a pris toutes les mesures nécessaires pour remplir dignement la mission qui lui était confiée et pour élever à la mémoire de Brioschi un monument vraiment digne de ses travaux. Il nous reste maintenant à faire connaître à nos lecteurs quel a été le plan adopté pour la publication actuelle dont la disposition typographique fera vraiment honneur à l'éditeur milanais, M. Hoepli.

On aurait pu classer les Mémoires si nombreux de Brioschi, soit par ordre chronologique, soit par ordre de matières. Le Comité a préféré adopter une méthode toute différente et rapprocher tous les Mémoires publiés dans le même Recueil; en commençant par ceux qui sont les plus nombreux et qui ont été publiés dans les *Annales de Tortolini,* et ensuite dans les *Annali* de Milan qui en furent la continuation. A la fin de la publication seulement, seront données les classifications des Mémoires, soit par ordre chronologique, soit par ordre de matières, en même temps qu'une étude sur la vie scientifique de l'auteur.

Le premier Volume, que nous avons sous les yeux, ne comprend pas moins de 54 Mémoires se rapportant aux sujets les plus variés. Nous n'avons pas besoin de dire que leur réunion intéressera vivement les géomètres et que leur lecture offrira le plus vif intérêt. Ces Mémoires touchent à toutes les questions véritablement importantes. Les uns se rapportent à l'Analyse infinitésimale, à la théorie des équations différentielles et aux dérivées

partielles, à la théorie des séries, à celle des intégrales définies; mais les plus nombreux traitent de différentes questions de Géométrie infinitésimale, de la théorie des déterminants, où Brioschi a laissé une trace si féconde, de la Mécanique analytique, etc. On verra réunis avec plaisir les écrits où Brioschi, après Lagrange et Bertrand, est revenu sur l'importante théorie des courbes tautochrones et surtout ses importants Mémoires sur la théorie des formes algébriques et sur la résolution de l'équation du cinquième degré. L'étude de tous ces travaux sera éminemment faite pour donner aux jeunes géomètres la souplesse et l'agilité, la variété de connaissances qui sont indispensables dans les recherches. C'est avec grand plaisir que nous avons revu au passage tant d'écrits excellents dont l'apparition avait été accueillie avec faveur et avait suscité, soit en Italie, soit ailleurs, de nombreuses études. Leur réunion sous une forme attrayante renouvellera leur effet et leur influence, de sorte que le Comité, en même temps qu'il aura rendu à Brioschi un hommage mérité, aura trouvé moyen de rendre un incontesté service aux études qui ont été la préoccupation de toute la vie du grand géomètre italien.

G. D.

---

BÜHL (Adolphe.). — Sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe. Paris, Naud, 1901; in-8° de 61 p.

Le Travail de M. Bühl est relatif à l'étude des deux propositions suivantes :

I. *Étant donné un système d'équations différentielles simultanées tel que*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

*il existe, au moins théoriquement, une forme linéaire aux dérivées partielles telle que*

$$Y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + Y_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n},$$

*laquelle est une intégrale du système considéré, si* $\Phi$ *en est une.*

II. *A tout système que l'on sait intégrer, tel que*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

*correspond une infinité d'autres systèmes de même forme, tels que si* $\Phi$ *est une intégrale de l'un deux la forme linéaire aux dérivées partielles*

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$$

*en est une autre.*

La première de ces propositions comprend comme cas particulier le célèbre théorème de Poisson qui, comme on le sait, donne une troisième intégrale d'un système *spécial* d'équations différentielles, appelé système *canonique* dès qu'on en connaît deux.

L'auteur envisage un système non plus canonique, mais quelconque d'équations simultanées, et arrive à donner un énoncé simple du théorème de Poisson, énoncé s'appliquant à un système quelconque. Le théorème de Poisson s'applique uniquement aux équations canoniques. Pour l'appliquer à un système quelconque, il fallait ramener ce système à la forme canonique. La possibilité de cette transformation a été déjà indiquée par Liouville dans une Note du *Journal de Mathématiques*. Mais cette transformation a paru à M. Bühl peu avantageuse en ce qu'elle consiste à introduire des variables parasites.

Dans un premier Chapitre, M. Bühl s'occupe des fonctions adjointes et de la forme adjointe d'un système d'équations différentielles. Il a étudié en outre cette forme adjointe et en a indiqué les principales propriétés fondamentales. L'auteur établit ensuite la réciprocité entre les fonctions adjointes. En d'autres termes, si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont les fonctions adjointes du système

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont aussi les fonctions adjointes du système

$$\frac{dx_1}{Y_1} = \frac{dx_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dx_n}{Y_n}.$$

Il fait en particulier, pour l'éclaircissement de la théorie, une application numérique au système d'équations

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}.$$

Enfin, dans un dernier Chapitre, M. Bühl étudie les équations canoniques, en les considérant comme des cas particuliers des équations générales qu'il a étudiées précédemment. Il retrouve ainsi les principales propriétés de ces équations particulières.

En résumé, pour appliquer le théorème de Poisson à un système quelconque d'équations différentielles, deux moyens se présentaient à l'esprit : celui de ramener le système considéré à un système d'équations canoniques, ou celui de modifier l'énoncé du théorème de Poisson pour le rendre applicable à un système quelconque.

C'est cette dernière voie qu'a suivie M. Bühl; la première, peut-être moins avantageuse, avait été déjà signalée par M. Liouville.

E. E.

---

## MÉLANGES.

### MÉCANIQUE.
### NOTE SUR LA TENSION DE LA TIGE D'UN PENDULE SPHÉRIQUE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Dans son *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 134, Halphen donne une condition nécessaire et suffisante pour que la tension de la tige d'un pendule sphérique puisse changer de signe en passant par zéro, la projection horizontale de la trajectoire du pendule ayant alors des points d'inflexion. Il n'est peut-être pas sans intérêt de montrer que le résultat peut se déduire très facilement des formules élémentaires, mais surtout qu'il implique

algébriquement une double condition pour les hauteurs des deux parallèles entre lesquels oscille le pendule.

Soit M un point pesant, relié au point fixe O par une tige rigide, de longueur $l$ et de masse négligeable : si on lui donne un mouvement initial quelconque, il se meut sur une sphère et, quand il est à la cote $z$ *au-dessous* du plan horizontal mené par O, sa vitesse est de la forme $\sqrt{2g(z-a)}$, la tension N de la tige OM étant $mg\,\frac{3z-2a}{l}$.

Il s'agit de voir dans quels cas la valeur $\frac{2a}{3}$ de $z$ qui annule l'expression de N est parmi celles que peut atteindre la cote du point M. On sait que cette cote oscille entre les deux plus grandes racines $\alpha$, $\beta$, d'un polynome de la forme

$$\varphi(z) = 2g(z-a)(l^2-z^2) - C^2 = -2g\left(z^3 - az^2 - l^2 z + al^2 + \frac{C^2}{2g}\right).$$

$\varphi(z)$ a toujours trois racines réelles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, satisfaisant aux conditions suivantes (*Voir*, par exemple, M. Appell, *Mécanique*, t. I, p. 486) :

$$\gamma = -\frac{l^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \qquad l > \alpha > \beta > -l > \gamma, \quad \alpha > 0, \quad \alpha+\beta > 0.$$

Pour que N s'annule, il faut qu'on ait $\alpha - \frac{a2}{3} > 0$, $\beta - \frac{2a}{3} < 0$. Si je remarque que $a$ est égal à la somme des racines $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, j'ai

$$\alpha - \frac{2a}{3} = \alpha - \frac{2}{3}\left(\alpha+\beta-\frac{l^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right) = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+2l^2-2\beta^2}{3(\alpha+\beta)};$$

la première inégalité est visiblement toujours satisfaite : considérons la seconde. Nous savons que la vitesse $v$ au point le plus haut de la trajectoire, où $z=\beta$, est $\sqrt{2g(\beta-a)}$; on en conclut

$$\beta - \frac{2a}{3} = \beta - \frac{2}{3}\left(\beta - \frac{v^2}{2g}\right) = \frac{v^2+g\beta}{3g};$$

nous verrons bientôt que $\beta$ doit être $< 0$; cela étant, l'inégalité $v^2 + g\beta < 0$ revient précisément à celle que donne Halphen à la fin de ses calculs.

Mais nous pouvons aussi écrire

$$\beta - \frac{2a}{3} = \frac{\beta^2 + \alpha\beta + 2l^2 - 2\alpha^2}{3(\alpha + \beta)};$$

pour que cette différence soit négative, il faut que $\beta$ soit compris entre les racines du numérateur considéré comme un trinome en $\beta$, savoir

$$\begin{matrix}\beta' \\ \beta''\end{matrix} = -\frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 8l^2}).$$

Il faut d'abord que $\beta'$ et $\beta''$ soient réelles, $\alpha \geqq \frac{l\sqrt{8}}{3}$; M doit descendre au-dessous du parallèle de cote $\frac{l\sqrt{8}}{3}$, dont le rayon, $\frac{l}{3}$, est vu du centre sous l'angle de $19^\circ 28' 16'',4$. Cette condition remplie, $\beta'$ et $\beta''$ seront négatives et nous avons dit que $\beta$ doit être compris entre elles. Lorsque $\beta$ atteint ces limites, $a$ est respectivement égal à $\frac{3}{2}\beta'$ ou à $\frac{3}{2}\beta''$ : comme d'ailleurs $\frac{\partial a}{\partial \beta}$ est $> 0$, $a$ étant exprimé en fonction de $\alpha$ et de $\beta$, on voit que, pour les valeurs intermédiaires de $\beta$, $a$ sera compris entre $\frac{3\beta'}{2}$ et $\frac{3\beta''}{2}$. Quand $\alpha$ croît de $\frac{l\sqrt{8}}{3}$ à $l$, $\beta'$ décroît de $-\frac{l\sqrt{2}}{3}$ à $-l$, $\beta''$ croît de $-\frac{l\sqrt{2}}{3}$ à zéro. Pour $\alpha = l$, cas du pendule simple, $a$ doit être compris entre zéro et $-\frac{3}{2}l$.

On peut dire enfin que la condition $\varphi\left(\frac{2a}{3}\right) > 0$ suffit pour que N passe par zéro, étant donné que $\frac{2a}{3} - \gamma$, égal à $\frac{2\alpha + 2\beta - \gamma}{3}$, est certainement négatif.

1re Partie

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FOUCAULT (M.) — La Psychophysique. Thèse pour le doctorat ès lettres, présentée devant la Faculté des Lettres de l'Université de Paris. Un vol. in-8°; 491 p. Paris. F. Alcan, 1901.

La Psychophysique, conçue comme une *science exacte de l'âme et du corps,* a donné de grandes espérances à son fondateur, et peut-être à quelques autres personnes. En reste-t-il quelque chose, aujourd'hui? C'est ce qu'il n'est pas très facile de décider, après la lecture du consciencieux travail que M. Foucault vient de consacrer à l'histoire de cette curieuse tentative. Il n'en reste peut-être rien, au point de vue philosophique, et il semble que ce soit là l'opinion des philosophes; mais M. Foucault ne s'est pas borné à raconter les faits, à résumer les Mémoires et les conclusions, telles quelles, de leurs auteurs, il a voulu être vraiment l'historien de cet essai de science, et comprendre quelle réalité pouvaient atteindre les expériences et les mesures que l'on avait faites. D'après lui, cette réalité n'est nullement l'*intensité de la sensation,* pour la bonne raison que cette intensité n'existe pas : la plupart des recherches psychophysiques se rapportent aux *erreurs d'observation,* et ce dernier jugement est bien, en effet, la conclusion qui semble se dégager de l'histoire que M. Foucault a retracée avec une parfaite conscience et un grand luxe d'informations; on lui saura d'autant plus gré de ces informations qu'il faut plus de vertu pour aller les chercher ailleurs que dans son travail: en fait, ce sont les erreurs d'observation qui se trouvent, d'ordinaire, avoir été étudiées par les psychophysiciens. Ceux-ci ne s'en sont pas toujours doutés et semblent, tout au contraire, s'être figuré parfois que les physiciens et les astronomes, qui se sont toujours préoccupés et se préoccuperont toujours des erreurs d'observation, avaient, en étudiant ces erreurs, fait de la Psychophysique sans le savoir, si bien que, d'après Fechner, le problème fondamental de la Psychophysique aurait été résolu avant que d'être posé. Mais peu importe ceux qui ont su, ou n'ont pas su, ce qu'ils faisaient. L'étude des erreurs d'observation n'en

est pas moins capitale, et il est peut-être bon qu'elle soit entreprise et repr se par des esprits divers ayant des habitudes différentes, par des hommes de science, rompus au maniement des instruments de précision comme à l'interprétation des tableaux numériques, par des psychologues familiers avec les analyses subtiles, par des physiologistes aussi qui connaissent à fond les organes des sens et même, s'il s'en trouve après Helmholtz, par des gens qui possèdent toutes ces qualités, et d'autres encore. C'est une simple truisme que de dire que le progrès des sciences physiques est lié aux résultats d'une étude qui peut fournir les moyens de diminuer ou d'éliminer quelque peu les erreurs d'observation. L'imperfection de nos sens et des instruments de mesure a joué un rôle utile dans la constitution des sciences physiques en obligeant les savants à porter uniquement leur attention sur la partie la plus grosse des phénomènes, et, pour ainsi dire, sur le premier terme des séries qui les représentent : ainsi a pu naître et se confirmer cette croyance dans la simplicité des lois naturelles qui a soutenu pendant longtemps l'enthousiasme des travailleurs. Aujourd'hui les sciences sont assez avancées, la valeur théorique et pratique de leurs résultats est assez éprouvée pour que les travailleurs puissent abandonner cette croyance naïve : la foi dans le déterminisme des phénomènes qu'ils étudient leur suffit; mais à mesure qu'ils veulent pénétrer plus avant dans ces phénomènes, ils doivent inventer des procédés de mesure de plus en plus précis : si le mouvement qu'a créé Fechner ne s'arrête pas et permet quelque jour d'obtenir cette précision désirée, peut-être faudrait-il conserver quelque reconnaissance pour le fondateur de la Psychophysique. « S'il est vrai, dit en terminant M. Foucault, qu'il a échoué dans son entreprise spéciale de fonder la Psychophysique comme science exacte, son échec est de ceux que seuls peuvent subir les hommes de génie. » Je ne sais si cette consolation aurait suffi à Fechner, ni s'il y avait droit; mais il faut pardonner aux historiens de s'éprendre un peu trop de ceux qu'ils étudient; c'est encore là une illusion utile, qu'ils peuvent perdre, sans inconvénient, dès qu'ils l'ont exprimée et qu'ils ont terminé leur œuvre.

L'idée dont s'est enthousiasmé Fechner a germé dans la tête de très grands mathématiciens, parmi lesquels M. Foucault cite

Daniel Bernoulli, Laplace et Poisson. Laplace veut que l'on distingue, dans le bien espéré, la valeur relative de la valeur absolue : « celle-ci, dit-il, est indépendante des motifs qui la font désirer, au lieu que la première croît avec ces motifs.

» On ne peut espérer de règle générale pour apprécier cette valeur relative; cependant il est naturel de supposer la valeur relative d'une somme infiniment petite en raison directe de sa valeur absolue, en raison inverse du bien total de la personne intéressée. En effet, il est clair qu'un franc a très peu de prix pour celui qui en possède un grand nombre et que la manière la plus naturelle d'estimer sa valeur relative est de la supposer en raison inverse de ce nombre », et plus loin « .... mais l'avantage moral que peut procurer une somme espérée dépend d'une infinité de circonstances propres à chaque individu et qu'il est impossible d'évaluer. La seule considération générale que l'on puisse employer à cet égard est que, plus on est riche, moins une somme très petite peut être avantageuse, toutes choses égales d'ailleurs. Ainsi, la supposition la plus naturelle que l'on puisse faire est celle d'un avantage moral réciproque au bien de la personne intéressée. C'est à cela que se réduit le principe de Daniel Bernoulli, principe qui, comme on vient de le voir, fait coïncider les résultats du calcul avec les indications du sens commun, et qui donne le moyen d'apprécier avec quelque exactitude ces indications toujours vagues [1] ».

On voit combien les paroles de Laplace étaient prudentes : assurément, il n'était pas dupe de la relation

$$y = k \log \frac{x}{h}$$

entre la *fortune physique* $x$ et la *fortune morale* $y$, qu'il déduit des principes précédents. La loi de Fechner, qui relierait l'intensité de la sensation $y$ à l'excitation $x$, a la même forme; mais ceux qui, pour donner plus d'autorité à cette loi, veulent la placer sous l'invocation de Laplace, ne feraient pas mal de rappeler la réserve du grand géomètre, et de s'en pénétrer.

On trouvera, dans le livre de M. Foucault, d'intéressants détails

[1] *Œuvres*, t. VII, p. 190 et 449.

sur les différents travaux dont les conclusions se rapprochent plus ou moins de la loi célèbre que Ernest Henrich Weber a formulée d'une façon précise, et sur laquelle je voudrais m'arrêter un instant.

Si l'on observe une quantité A qui varie très peu à partir d'une valeur fixe $\alpha$, on ne s'aperçoit d'aucun changement quand les variations sont très petites; le changement n'est apprécié qu'à partir d'un minimum de variation de la quantité observée : ce *minimum perceptible* dépend de $\alpha$, et l'on peut ainsi le représenter par $\varphi(\alpha)$; que ce minimum perceptible soit assez difficile à déterminer, c'est ce dont personne ne doutera, et ce que les expériences décrites par M. Foucault montrent clairement. Il paraît toutefois qu'on parvient, dans un grand nombre de cas, à le mesurer avec une exactitude suffisante. Les psychophysiciens, Fechner, Wundt, et bien d'autres, ont imaginé et réalisé pour cela un très grand nombre d'expériences, dont quelques-unes sont fort ingénieuses. La loi de Weber consiste en ce que le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ est constant. Les expériences montrent que cette loi n'est qu'approchée. Qu'il en soit ainsi, c'est ce qui ne peut étonner personne; la façon approximative dont elle se vérifie, entre certaines limites, n'en reste pas moins très intéressante.

En dehors du défaut de précision avec laquelle peut être obtenu le numérateur du rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$, la forme même de la loi de Weber et la généralité avec laquelle on prétend l'énoncer montrent assez qu'elle ne peut être qu'approximative, qu'elle ne peut être qu'une sorte de loi de tendance : En effet, si elle est vraie avec un mode particulier de mesure adopté pour la grandeur A, elle ne sera pas vraie pour tous les autres modes de mesure que l'on peut imaginer : le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ ne jouit sans doute pas de la propriété de rester constant quand on y fait un changement de variable quelconque. Dans chaque série d'expériences instituées pour confirmer ou infirmer la loi de Weber, on dit bien, sans doute, quel mode de mesure on a adopté, mais pourquoi est-ce ce mode-là qu'on a adopté, pourquoi cette graduation plutôt qu'une autre et comment arrive-t-il que, dans des ordres de recherches très différentes, cette loi se vérifie, même grossièrement? Dans

certains cas, il y a des modes de mesure qui s'imposent naturellement, en quelque sorte. S'il a à mesurer une longueur, un physicien prendra, par exemple, une règle divisée en millimètres; il ne lui viendra pas à l'esprit de prendre une règle où seraient marqués, à la place des nombres de millimètres, les logarithmes de ces nombres; mais chacun sait que, pour bien des quantités, la graduation est arbitraire, et les raisons plus ou moins profondes qu'il y a pour adopter une graduation plutôt qu'une autre ne sont point en cause ici. Ce qui importe essentiellement, c'est de faire correspondre toujours le même nombre à la même quantité, et toujours un plus grand nombre à une quantité plus grande. Les nombres que l'on fait ainsi correspondre aux divers états de la grandeur ne sont pas, à proprement parler, des *mesures* de ces états, comme dans le cas des longueurs, mais des *signes,* au moyen desquels on marque et l'on reconnaît ces états. Si la loi de Weber reste à peu près vraie, entre certaines limites, pour des phénomènes d'ordre très différent, cela tient sans doute à ce que, sous des conditions mathématiques bien connues, la graduation adoptée est à peu près indifférente : si l'on reste entre des limites où les différences entre les nombres marqués sur la première échelle sont proportionnelles aux différences entre les nombres correspondants marqués sur la seconde échelle, il peut être indifférent d'adopter une échelle ou une autre. Mais si c'est grâce à cette raison que la loi de Weber reste vraie, son caractère apparaît clairement : elle ne peut être qu'une loi grossièrement approchée; au reste, en consultant les nombreux Tableaux contenus dans le Livre de M. Foucault, on reconnaîtra que, sur ce point, pour parler comme Laplace, les résultats de l'expérience coïncident avec les indications du sens commun.

Ces indications, que j'ai essayé de développer, supposent que dans le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ qui figure dans la loi de Weber, le dénominateur $\alpha$ est une de ces différences, dont il vient d'être question, et qui pourraient être remplacées sans inconvénient par des différences proportionnelles. Dans un passage de son Livre, lorsqu'il parle de la *clarté des perceptions différentielles* (p. 295), M. Foucault regarde effectivement comme une différence le dénominateur du rapport : mais il ne paraît pas que beaucoup de ceux

qui ont étudié la loi de Weber se soient préoccupés de ce point : où est le zéro, l'origine de la grandeur A, mesurée par le nombre $\alpha$ qui figure dans le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$? J'entends bien que, pour certaines grandeurs, les longueurs par exemple, il y a un zéro naturel; mais l'on sait assez qu'il n'en est pas toujours ainsi. Les psychophysiciens appellent habituellement cette grandeur A, que l'on veut mesurer, l'*excitation;* $\alpha$ est la mesure de l'excitation. Cette terminologie est assez fâcheuse, et l'on ne voit guère, à vrai dire, en quoi une longueur de $10^{mm}$ est plus *excitante* qu'une longueur de $5^{mm}$; quoi qu'il en soit, c'est peut-être l'emploi de ce terme, dont je ne craindrai pas de me servir dans la suite, qui a empêché les psychophysiciens de se poser cette question : où est le zéro de l'excitation? la réponse sous-entendue était trop claire : l'excitation est nulle quand nous ne percevons rien, dans le silence s'il s'agit de son, dans l'obscurité s'il s'agit de lumière; il y aurait à dire sur cette réponse que je prête bénévolement à des gens qui n'y ont peut-être pas pensé : car, enfin, s'il sagit, par exemple, de la hauteur des sons, y aura-t-il deux zéros, là où nous commençons de percevoir les sons, et là où nous cessons de les entendre, grâce à leur acuité? Mais laissons ces cas singuliers; même s'il y a une origine naturelle, ce n'est peut-être pas à partir de cette origine qu'il convient de compter les *excitations*, et il semble que la loi de Weber, en l'admettant, donne un renseignement sur la place de l'origine qu'il convient d'adopter. Si le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ reste constant, $\varphi(\alpha)$ doit devenir nulle en même temps que $\alpha$; d'où il suit que, pour le zéro de l'excitation, nous pouvons percevoir les plus petits accroissements de l'excitation, que notre sensibilité est infinie. Elle n'est infinie nulle part, cela est bien certain; mais si elle est maximum quelque part, c'est là, sans doute, qu'il faut placer l'origine, pour que la loi de Weber soit le moins fausse possible. Cette origine variera peut-être avec les gens, avec leurs habitudes, avec leur degré d'exercice; pour tel ordre de phénomènes, il y aura peut-être plusieurs maximums de la sensibilité, et il conviendra, entre certaines limites, de choisir une origine, et une autre origine entre d'autres limites. Qu'il soit possible de tirer quelque chose, dans la voie que j'ai essayé d'indiquer,

des recherches sur le maximum de la sensibilité qu'a relatées M. Foucault, c'est ce que je me garderais bien d'affirmer.

Quoi qu'il en soit, c'est de cette loi de Weber, regardée comme générale, que Fechner est parti; il en a transformé l'expression grâce à une hypothèse, ou à une affirmation, que je n'ai jamais pu regarder que comme une pure définition : cette affirmation, c'est que le minimum perceptible $\varphi(\alpha)$ correspond à des accroissements égaux de l'intensité de la sensation. « La différence de sensation, dit-il, reste égale quand le rapport des excitations reste égal », et ailleurs « Une différence entre deux excitations, différence que l'on peut regarder comme une addition positive ou négative à l'une ou à l'autre des excitations, est toujours sentie comme également grande, ou bien donne la même différence de sensation, le même accroissement de sensation, si son rapport aux excitations entre lesquelles elle existe reste constant, de quelque façon que sa grandeur absolue se modifie ([1]). » Si ces affirmations avaient un sens précis, et si elles étaient vraies, il est bien évident que le nombre qui mesure l'intensité de la sensation serait proportionnel au logarithme du nombre qui mesure l'intensité de l'excitation; mais les mots *différence* et *accroissement de la sensation* n'ont pas de signification claire : en tous cas ils n'ont pas par eux-mêmes de signification mathématique; sans doute nous parlons bien de la différence entre une sensation et une autre sensation, comme nous parlons de la différence entre une vache et un ruisseau; cette différence-là n'a rien à faire avec la soustraction; de même pour l'accroissement, il n'est nullement conçu comme résultant d'une addition. Ces mots ne peuvent prendre une signification mathématique qu'en introduisant des définitions. C'est la façon même dont Fechner déduit sa loi logarithmique de la loi de Weber qui peut nous renseigner sur le sens de ces définitions. Je modifierai quelque peu, d'ailleurs, la forme de cette déduction, mais avec le seul désir, si je l'ai bien comprise, de mettre en lumière les conventions qu'elle implique.

Admettant qu'à chacune des sensations qui correspondent aux diverses valeurs $\alpha$ de l'excitation A corresponde un nombre $\beta = f(\alpha)$, ce nombre devra rester le même tant que A reste com-

([1]) *Elemente der Psychophysik*, p. 154, citation de M. Foucault.

pris entre $\alpha$ et $\alpha + \varphi(\alpha)$, puisque, alors, la sensation reste la même; il devra changer quand A atteint $\alpha + \varphi(\alpha)$, et deviendra alors $\beta' = f[\alpha + \varphi(\alpha)]$. Fechner admet que la différence

$$\beta' - \beta = f[\alpha + \varphi(\alpha)] - f(\alpha)$$

est indépendante de $\alpha$; il est clair que c'est là une condition, imposée arbitrairement, et *par définition*, à ce qu'il appellera l'*intensité* $\beta$ *de la sensation :* cette définition semble avoir été justifiée par la vue suivante : la différence (au sens vague) entre les sensations qui correspondent aux excitations $\alpha$ et $\alpha + \varphi(\alpha)$ est également sentie, quel que soit $\alpha$; les mots *également sentie* veulent dire, en admettant, bien entendu, la loi du seuil, que l'on ne s'aperçoit d'aucune différence (au sens vague), que la sensation reste la même, tant que l'excitation variant à partir de $\alpha$, on n'a pas atteint la valeur $\alpha + \varphi(\alpha)$, et au contraire, qu'on s'aperçoit de quelque chose, que la sensation change, dès que l'on atteint cette valeur, et cela quel que soit $\alpha$ : en remplaçant alors la différence (au sens vague) par une différence arithmétique, et les mots, vagues aussi, *également sentie* par le signe $=$, on parvient à l'énoncé mathématique qui précède. Qui ne voit là des conventions arbitraires? Les conventions sont libres, et si Fechner s'était borné à dire que les siennes étaient les plus simples de toutes, et même naturelles, il n'y aurait eu qu'à juger la valeur des conclusions qu'il en aurait tirées; mais il y a quelque exagération à les présenter comme nécessaires.

Le reste est facile : Si l'on regarde dans l'expression

$$f[\alpha + \varphi(\alpha)] - f(\alpha)$$

(supposée indépendante de $\alpha$), $\varphi(\alpha)$ comme une quantité infiniment petite et si l'on remplace cette expression par $\varphi(\alpha) f'(\alpha)$, si l'on se rappelle enfin que $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ est une constante, d'après la loi de Weber, il est clair que $\alpha f'(\alpha)$ devra être regardé comme indépendant de $\alpha$ et que, par conséquent, $\beta = f(\alpha)$ sera de la forme

$$\beta = k \log \frac{\alpha}{h},$$

$k$ et $h$ étant des constantes. Cela revient, en somme, à définir l'in-

tensité de la sensation par la formule précédente [1] et à justifier cette définition par quelques considérations que le lecteur ne regardera peut-être pas comme dénuées de toute valeur, bien qu'il s'y mêle quelques confusions de mots. Le caractère de la loi de Fechner apparaît nettement dans une application que l'on en fait en Astronomie; j'emprunte au *Cours d'Astronomie* de M. Baillaud [2] les quelques lignes qui suivent. Il s'agit de l'échelle des grandeurs des étoiles :

« L'échelle des grandeurs, depuis l'invention des télescopes, a été prolongée successivement par d'habiles observateurs qui, dans notre siècle, se sont accordés mieux que l'on ne pourrait le croire *a priori*. Il est à signaler cependant que la plupart des étoiles de 6e grandeur du Catalogue de Lalande sont notées à la 7e grandeur par Piazzi. Les mesures photométriques faites depuis un petit nombre d'années par des méthodes très diverses ont donné des résultats peu différents de ceux qu'avait obtenus Argelander à Bonn par l'estimation directe.

» On pourrait aujourd'hui adopter la définition suivante :

» *La différence* $\Delta M$ *des grandeurs de deux étoiles d'éclats* A *et* B *est*

$$\Delta M = \frac{1}{0,4} \log \frac{A}{B}.$$

» Cette règle, proposée par Pogson, indique que les grandeurs croissent en progression géométrique. La différence d'une grandeur correspond à un rapport d'éclats égal à $10^{0,4}$ ou sensiblement 2,5. »

Il n'est pas douteux que cette *définition*, arbitraire si l'on veut, est justifiée, dans une certaine mesure, par le classement des étoiles en étoiles de première, seconde, troisième, etc., grandeurs, et par ce fait que la série des grandeurs, qui constitue une progression arithmétique, correspond, au moins grossièrement, à une progression géométrique d'intensités lumineuses, mesurées par la photométrie. Ce dernier fait était, pour Fechner, un argument essentiel en faveur de sa théorie, pour les besoins

---

(1) *Revue Scientifique*, 2e série, t. VIII, p. 877; 1875.
(2) Seconde Partie, p. 484.

de laquelle il n'a sûrement pas été inventé. Il n'est vrai sans doute que grossièrement, et encore convient-il d'ajouter que l'*éclat*, pour ce qui est des étoiles, dont les rayons lumineux sont très différemment constitués, n'est pas une quantité bien définie. Si cette notion de l'*éclat* était précise, la définition de Pogson, qui ne diffère pas de celle de Fechner, transformerait en loi précise un fait grossier. Qu'y a-t-il dans ce fait? Mais, aussi bien, y a-t-il quelque chose, autre qu'une règle mnémonique, dans la loi de Bode sur les distances des planètes au Soleil?

En restant dans le classement des étoiles en diverses grandeurs, on peut s'amuser à chercher des lois analogues à celle que Fechner prisait si haut, comme apportant à ses vues une éclatante confirmation. En reprenant, par exemple, le dénombrement des 314925 étoiles de la *Bonnerdurchmusterung* qu'a fait Littrow, on remarquera, si l'on veut, que les nombres d'étoiles de grandeur au moins égale à la seconde, à la troisième, à la quatrième, etc., forment grossièrement une progression géométrique de raison 3,5. Veut-on aller plus loin? on remarquera que 3,5 ne diffère pas beaucoup du nombre 3,1, lequel, d'après M. Baillaud [1], est, à peu près, le rapport des temps de pose photographique qui, pour une même étoile, correspond au passage d'une étoile à l'autre. Il serait évidemment imprudent de tirer des conclusions théoriques de faits aussi grossiers.

Fechner s'est enivré de sa loi logarithmique, et ce breuvage lui a procuré des rêves bizarres et qui, sans doute, lui paraissaient grandioses. Ces rêves ont embrassé l'homme tout entier, puis rien moins que le monde et la « conscience de l'esprit universel, qui ne s'endort jamais.... où la conscience humaine s'élève quand l'activité psychophysique de l'homme a atteint une certaine valeur par rapport à l'activité psychophysique du système universel [2] ». La patience avec laquelle il a institué et conduit ses expériences, la sincérité avec laquelle il les décrit sont d'ailleurs admirables. Faisant sans collaborateur ses expériences sur les poids, il devait placer lui-même le poids additionnel (afin de déterminer le minimum perceptible), de sorte qu'il savait lequel des deux poids

---

(1) *Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 1094.
(2) FOUCAULT, p. 121.

était réellement le plus lourd : on pourrait croire que cette connaissance exerçait une influence sur le jugement; mais Fechner affirme qu'il n'en était rien. « On s'en tient, déclare-t-il, à ce que disent les sensations comme à quelque chose d'objectif (1) ». Après tout, il avait peut-être raison, et les observations qu'il faisait sur lui-même, avec une si parfaite naïveté, valaient peut-être mieux que les réponses arrachées par d'autres savants à la complaisance inconsciente ou malicieuse de leurs aides ou de leurs *sujets*.

En parlant de la loi de Fechner, j'ai, pour me conformer à l'usage, employé les mots *excitation, sensation*. Mais M. Foucault observe très justement, à ce qu'il me semble, que, dans les expériences que l'on a faites à propos de cette loi, il ne s'agit pas de sensations à proprement parler, mais bien de perceptions, de jugements portés, non sur nos propres sensations, mais sur la grandeur d'objets extérieurs. S'il en est ainsi, tout l'édifice de Fechner s'écroule, car, si nous ne savons guère ce qu'est l'intensité d'une sensation, nous ne savons pas du tout ce qu'est l'intensité d'une perception. Dire qu'un jugement est plus grand qu'un autre, parce que nous jugeons qu'un objet est plus grand qu'un autre, serait assurément parler d'une façon peu raisonnable. Il peut bien entrer dans la perception des éléments mesurables (comme la durée), et M. Foucault en énumère un assez grand nombre, dont quelques-uns sont assez mal définis, mais le jugement lui-même est une opération trop complexe pour que le nombre lui soit applicable. Dans cette opération, la sensation que nous éprouvons, et son intensité (si elle en a une), interviennent sans doute, mais mêlées à bien d'autres éléments, en particulier aux images que nous fournit la mémoire. La prétention de dégager, de cette opération compliquée, la pure sensation, semble insoutenable.

Si même cela était possible, le nombre serait-il, même théoriquement, applicable à la sensation? En d'autres termes, celle-ci a-t-elle une intensité? M. Foucault le nie absolument (2). Peut-être convient-il de faire sur ce point quelques réserves. Sans doute

(1) FOUCAULT, p. 39.

(2) Pages 267 : ailleurs (p. 144), il est un peu moins radical.

la sensation n'appartient pas à cette classe de grandeurs dont on peut définir l'égalité et l'addition, et auxquelles l'idée de mesure est directement applicable ([1]). Rien n'autorise à affirmer qu'elle soit homogène et que, lorsqu'elle se renforce, quelque chose de pareil à ce qu'elle était s'ajoute à elle. Si, en changeant, elle change de nature, elle ne reste guère comparable à elle-même. Tout cela est entendu. Toutefois, il suffirait, en considérant des sensations d'une certaine espèce, que, de deux sensations de cette espèce, l'une pût être regardée comme égale, inférieure ou supérieure à l'autre, en supposant vérifiées les conditions qu'implique l'usage de ces mots, pour que le nombre s'appliquât à ces sensations, pour que chacune d'elles pût être numérotée, spécifiée et reconnue par son nombre. Il ne faut pas s'étonner que M. Foucault n'ait su démontrer ni la possibilité théorique ni l'impossibilité d'une correspondance entre la sensation et le nombre. Au reste, si même la possibilité théorique d'une telle correspondance était établie, la possibilité d'une *Psychophysique* n'en résulterait nullement : car s'il s'agit d'une sensation à peu près pure, à laquelle ne se mêle aucune perception claire, le moyen d'établir une relation entre cette sensation et l'excitation apparaît encore moins que le moyen de graduer la sensation. Il ne viendra sans doute à personne la prétention de chercher une relation numérique entre l'intensité d'un mal de dents et la nature de l'abcès qui le cause. S'il s'agit, comme dans les expériences que relate M. Foucault, de sensations qui sont masquées par les perceptions correspondantes, où notre attention est fixée sur le dehors, non sur le dedans, il semble bien impossible de se débrouiller dans la complication du phénomène.

D'après l'auteur, ce n'est pas l'intensité des sensations qui est mesurable, mais la *clarté des perceptions*. Le mot *clarté* est, paraît-il, mal choisi, et son emploi présente, au point de vue philosophique, quelques inconvénients. Si le mot *précision* n'avait pas pris, dans la théorie des erreurs de Gauss, une signification déterminée, M. Foucault l'aurait sans doute adopté. Quoi qu'il en soit, pour définir cette *clarté*, M. Foucault commence par définir l'*erreur de reconnaissance*. Celle-ci est la

---

([1]) *Revue scientifique, loc. cit.*, p. 1019.

différence entre la quantité qui est l'objet réel de la perception et la quantité qui est indiquée comme égale à la première : c'est à peu près la même chose que ce que l'on appelle d'habitude *erreur d'observation;* mais quand on parle d'observations, on entend habituellement des mesures faites avec des instruments plus ou moins compliqués, et l'erreur dépend, d'une part des instruments, d'autre part de nous-mêmes et de nos sens. C'est cette dernière partie de l'erreur que l'auteur entend étudier, et l'introduction d'un mot nouveau n'est pas à blâmer. La clarté des représentations est, par définition, inversement proportionnelle à l'erreur de reconnaissance qu'elles nous font commettre. Ainsi, comme je le disais en commençant, la Psychophysique, d'après l'auteur, aboutirait à une théorie, ou au moins à une étude des erreurs.

Sans doute, l'erreur de reconnaissance, ainsi définie, est un élément physique, susceptible d'être étudié et mesuré. Il reste fort compliqué. Il dépend de l'échelle de mesure. Si l'on entend que l'observateur n'a pas cette échelle à sa disposition, l'erreur de reconnaissance dépendra de la mémoire de cet observateur; s'il l'a sous les yeux, sans pouvoir l'appliquer à la quantité qu'il veut mesurer, l'erreur de reconnaissance dépendra de l'éloignement de l'objet à mesurer et de l'instrument de mesure. S'il applique celui-ci à celui-là, le problème change encore.

Quoi qu'il en soit, le livre de M. Foucault constitue un effort méritoire pour débrouiller une matière très obscure. Il vaut non seulement par les idées propres de l'auteur, mais encore par la masse de renseignements qu'il contient. S'il nous raconte l'histoire d'une chose morte, l'auteur peut se dire que les choses mortes sont l'objet de l'histoire; si la Psychophysique, en se transformant, est susceptible de revivre, je souhaite que M. Foucault y contribue.

J. T.

# MÉLANGES.

## SUR UN CAS DE RÉDUCTIBILITÉ DES INTÉGRALES ABÉLIENNES;

PAR M. J. DOLBNIA.

1. Je me propose ici de donner quelques nouveaux exemples de la réductibilité des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. Suivant la méthode, exposée ci-après, on peut former un grand nombre d'intégrales réductibles; entre autres, entrera dans cette catégorie le cas indiqué par Hermite [1].

Prenons l'équation

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = y^2, \tag{1}$$

définissant entre $x$ et $y$ une dépendance du premier genre. Si nous considérons $x$ comme une fonction de $y$, les points critiques seront donnés par l'équation

$$x^2 + 2ax + b = 0, \tag{2}$$

dont nous désignerons les racines par $x_1$, $x_2$, de sorte que

$$x_1 + x_2 = -2a, \qquad x_1 x_2 = b.$$

Par conséquent, l'équation (1) fournit deux nouvelles équations

$$(x - x_1)^2(x + 3a + 2x_1) = y^2 - c + 2x_1^3 + 3ax_1^2,$$
$$(x - x_2)^2(x + 3a + 2x_2) = y^2 - c + 2x_2^3 + 3ax_2^2.$$

Multipliant ces équations et remplaçant les fonctions symétriques des quantités $x_1$, $x_2$ par les coefficients de l'équation (2), nous obtenons

$$(x^2 + 2ax + b)^2(x^2 + 2ax + 4b - 3a^2)$$
$$= y^4 + (5ab - 4a^3 - 2c)y^2 + (4a^3c - 3a^2b + 4b^3 - 5abc),$$

[1] PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 218.

d'où

$$(x^2+2ax+b)\sqrt{x^2+2ax+4b-3a^2}$$
$$=\sqrt{y^4+(5ab-4a^3-2c)y^2+(4a^3c-3a^2b+4b^3-5abc)}.$$

Différentiant l'équation (1), nous avons

$$\frac{3}{2}\,\frac{x^2+2ax+b}{\sqrt{x^3+3ax^2+3bx+c}}=dy.$$

Par conséquent,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^3+3ax^2+3bx+c)(x^2+2ax+4b-3a^2)}}$$
$$=\frac{2}{3}\int\frac{dy}{\sqrt{y^4+(5ab-4a^3-2c)y^2+(4a^3c-3a^2b+4b^3-5abc)}}.$$

Posant ici

$$a=0,$$

nous avons le cas indiqué par Hermite

$$(3)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{(x^3+3bx+c)(x^2-4b)}}=\int\frac{dy}{\sqrt{y^4-2cy^2+4b^3}}.$$

**2.** Prenons maintenant l'équation

$$(4)\qquad x^4+2ax^2+4bx=y,$$

définissant entre $x$ et $y$ une dépendance unicursale. Si nous considérons $x$ comme une fonction de $y$, les points critiques de l'équation (4) seront donnés par l'équation

$$(5)\qquad x^3+ax+b=0,$$

dont nous désignerons les racines par

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,$$

de sorte que

$$x_1+x_2+x_3=0,\qquad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a,\qquad x_1x_2x_3=-b.$$

De l'équation (4) nous tirerons trois nouvelles équations

$$(x-x_1)^2(x^2+2x_1x+2a+3x_1^2)=y+(3x_1^4+2ax_1^2),$$
$$(x-x_2)^2(x^2+2x_2x+2a+3x_2^2)=y+(3x_2^4+2ax_2^2),$$
$$(x-x_3)^2(x^2+2x_3x+2a+3x_3^2)=y+(3x_3^4+2ax_3^2).$$

Multipliant ces équations et remplaçant les fonctions symétriques des racines par les coefficients de l'équation (5), nous obtenons

$$(x^3 + ax + b)\sqrt{x^6 + 4ax^4 + 10bx^3 + 5a^2x^2 + 18abx + 2a^3 + 27b^2}$$
$$= \sqrt{y^3 + 2a^2y^2 + (a^4 + 18ab^2)y + 2a^3b^2 + 27b^4}.$$

Différentiant maintenant l'équation (4), nous trouvons

$$4(x^3 + ax + b)\,dx = dy.$$

C'est pourquoi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 4ax^4 + 10bx^3 + 5a^2x^2 + 18abx + 2a^3 + 27b^2}}$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{dy}{\sqrt{y^3 + 2a^2y^2 + (a^4 + 18ab^2)y + 2a^3b^2 + 27b^4}}.$$

Si $a = 0$, nous obtenons un exemple intéressant par sa simplicité

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 10bx^3 + 27b^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^3 + 27b^4}}.$$

Ici la réduction s'obtient par la substitution

$$x^4 + 4bx = y.$$

Par conséquent, l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 10bx^3 + 27c}}$$

se ramène à une intégrale elliptique si

$$c = b^2.$$

1re Partie

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

STRUTT (JOHN-WILLIAM), Baron RAYLEIGH, D. Sc., F.R.S., Honorary Fellow of Trinity College Cambridge, Professor of natural Philosophy in the Royal Institution. — SCIENTIFIC PAPERS. Vol. II, 1881-1887, Cambridge. At the University Press, 1901.

Le Tome II des *Travaux Scientifiques de Lord Rayleigh*, qui vient de paraître, renferme (en 598 pages grand in-4°) les Mémoires publiés par l'Auteur de 1881 à 1887.

En voici la brève préface :

*Plusieurs des Mémoires de ce Volume, relatifs aux unités électriques, ont été écrits en collaboration avec le professeur Schuster et avec Mrs Sidgwick. Il est peut-être bon de rappeler au lecteur qu'à l'époque de ces recherches, la valeur de l'ohm était incertaine à près de* 4 *pour* 100, *et que la valeur de l'équivalent électrochimique de l'argent, généralement adoptée à cette époque, différait de* 2 *pour* 100 *de la valeur à laquelle nous sommes arrivés.*

Ce que Lord Rayleigh ne dit pas, c'est qu'après ses propres recherches, l'équivalent électrochimique de l'argent se trouvait connu à moins de 1 pour 1000 près, précision vingt fois supérieure à celle qui avait été obtenue avant lui.

Ce que Lord Rayleigh ne dit pas non plus, c'est que les nombres qu'il a fournis dans ses déterminations de l'ohm sont, peut-être, les plus dignes de confiance que nous ayons. En tous cas ils se tiennent *à quelques dix millièmes* des meilleurs résultats connus. Ainsi, les Travaux de Lord Rayleigh sur les unités électriques sont tout à fait de premier ordre. Leur réimpression constitue le principal intérêt de ce Volume. Ils en occupent près de la moitié; plus de la moitié même, si l'on y joint une douzaine de courts Mémoires concernant l'Électricité.

En dehors de deux discours inauguraux, le reste de l'Ouvrage se rapporte au groupe : Hydrodynamique, Optique, Acoustique-vibrations; la plupart des Mémoires sur l'Acoustique et les vibra-

tions se retrouvent dans la deuxième édition de la *Théorie du son*.

Parmi bien d'autres Mémoires importants, je signalerai seulement l'article *Optique* de l'*Encyclopédie Britannique*, très intéressant et très élevé, sous une forme très élémentaire. On lira avec intérêt l'étude sur le *vol plané des oiseaux* où l'Auteur calcule que si, imitant l'oiseau, l'homme voulait se soutenir dans l'air par la rotation d'une hélice qu'il actionnerait par ses propres forces, il devrait être muni d'une hélice de $90^m$ de diamètre.

...Quelle belle chose que la statistique! Ce Volume renferme environ 150 Mémoires scientifiques. Lord Rayleigh publiait donc, *en moyenne*, un Mémoire scientifique tous les dix-sept jours.

H. A.

---

H. POINCARÉ, Membre de l'Institut. — Cours de Physique mathématique. Électricité et Optique. — La lumière et les théories électrodynamiques. Leçons professées à la Sorbonne en 1888, 1890 et 1899. Deuxième édition, revue et complétée par *J. Blondin* et *E. Néculcéa*. Paris, Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine, 1901.

« Ce Livre contient le résumé des leçons que j'ai professées à la Sorbonne en 1888, en 1890 et en 1899, dit M. Poincaré dans l'Avertissement. Mes cours de 1888 et de 1890 ont déjà été publiés, mais l'édition étant épuisée, je ne crois pas inutile de les faire réimprimer avec quelques remaniements et modifications. J'en ai seulement supprimé ce qui se rapportait aux expériences de Hertz; car j'ai eu l'occasion de revenir avec beaucoup de détails sur ces expériences dans une série de leçons reproduites dans mon Ouvrage intitulé : *Les oscillations électriques*. Le reste de mes leçons remplit la première Partie du Volume, où se trouvent exposées les théories de Maxwell et de Helmholtz, et j'y rappelle en outre les principes essentiels d'Ampère et de Weber. Cette première Partie contient donc tout ce qui se rapporte à l'électrodynamique des corps en repos.

» La seconde Partie contient mes leçons de 1899, qui n'avaient pas encore été publiées et qui ont été rédigées par M. Néculcéa, à qui je suis très heureux d'adresser ici tous mes remerciements.

J'y compare les différentes théories relatives à l'électrodynamique des corps en mouvement et dont les principales sont celles de Hertz, de Lorentz et de Larmor.

» Bien qu'aucune de ces théories ne me semble entièrement satisfaisante, chacune d'elles contient sans doute une part de vérité et la comparaison peut être instructive.

» De toutes, celle de Lorentz me paraît celle qui rend le mieux compte des faits.

» Depuis que l'impression est commencée, sont venues les expériences de M. Crémieu qui, peut-être, modifieront complètement nos idées sur l'électrodynamique des corps en mouvement. Mais elles sont encore trop récentes pour qu'une théorie nouvelle en ait pu sortir. Elles seront d'ailleurs probablement très discutées, et toute tentative pour en tirer une conclusion quelconque serait prématurée. »

L'Ouvrage nouveau de M. Poincaré comprend donc deux Parties : une déjà ancienne (I^re^ et II^e^ Partie) représentée par 17 Chapitres (346 pages); une nouvelle (III^e^ et IV^e^ Partie), 8 Chapitres et un Complément (290 pages), dans laquelle sont discutées d'une manière originale et approfondie les théories de Hertz, de Lorentz et de Larmor. C'est seulement de cette seconde Partie que nous parlerons.

La théorie de Hertz pour l'électrodynamique des corps en repos, exposée conformément au Mémoire original de l'auteur, dans le premier Chapitre (p. 345-363) n'est à vrai dire qu'une forme condensée et corrigée de la théorie de Maxwell; les hypothèses essentielles sont les mêmes; la seule différence de quelque importance tient à ce que Hertz laisse systématiquement de côté toute aimantation permanente, tandis que Maxwell en tenait compte ou la négligeait, suivant les Chapitres, d'où pouvait résulter quelque confusion.

Pour l'électrodynamique des corps en mouvement (Chap. II, p. 363-423), M. Poincaré suit de beaucoup moins près l'exposé de Hertz lui-même. Dans son Mémoire, très bref, Hertz avertit soigneusement son lecteur qu'il développe l'hypothèse physique, non la plus probable, ces mots n'ayant guère de sens pour lui, mais la plus simple, et à la fin de son Mémoire il revient sur le caractère arbitraire et provisoire de son hypothèse; s'il convient

donc de lui conserver le nom de Hertz, il ne faut pas oublier que lui-même y aurait probablement fait bien des retouches s'il eût vécu. Les hypothèses essentielles sont :

1° Que l'éther électromagnétique et la matière sont invariablement liés, et ont même vitesse, mêmes déformations, rigoureusement;

2° Que la force électrique induite dans un circuit quelconque est la dérivée du flux d'induction magnétique par rapport au temps à travers ce circuit; et que le travail magnétique le long d'un circuit fermé est égal à $4\pi$ fois le courant de conduction, augmenté du flux d'induction électrique à travers le circuit; cette dernière hypothèse est à peine énoncée par Hertz, qui écrit les équations correspondantes par analogie avec celles de l'induction électromagnétique.

Pour un corps qui se déforme, Hertz a développé l'influence des dilatations et des glissements, mais il a supposé que les rotations élémentaires disparaissaient d'elles-mêmes, ce qui est faux, comme l'a remarqué M. Heaviside. Laissant de côté toute complication de ce genre, M. Poincaré suppose explicitement dès le début de ce Chapitre que les corps étudiés se meuvent comme des solides, sans dilatations ni déformations.

Après avoir établi les équations différentielles d'une manière un peu différente de celle de Hertz, M. Poincaré en poursuit la discussion approfondie. D'après ces équations le courant total producteur de champ magnétique se compose du courant de conduction, du courant de déplacement de Maxwell, du courant de convection de Rowland et du courant de polarisation variable de Röntgen. Ce dernier courant n'a été qu'entrevu expérimentalement par Röntgen; et le courant de convection qui semble plus facile à déceler, après avoir été regardé comme démontré par les expériences de Rowland, paraît maintenant après les expériences de M. Crémieu n'avoir aucune réalité. Ce n'est d'ailleurs pas une particularité de la théorie de Hertz pour les corps en mouvement qui donne ce courant de convection; toute théorie qui donne la propagation des ondes hertziennes, expérimentalement certaine, donne du même coup le courant de convection, à moins d'hypothèses correctrices bien artificielles et peu vraisemblables par elles-mêmes. De là l'intérêt capital de ces expériences, et l'attente où

nous sommes de l'interprétation que M. Poincaré pourra nous en donner.

D'après l'énoncé même qu'elles traduisent, les équations de Hertz gardent la même forme dans le mouvement absolu et dans le mouvement relatif : « De là, dit M. Poincaré (p. 389), deux conséquences : l'une heureuse, l'autre fâcheuse. La conséquence heureuse c'est que les équations de Hertz sont conformes au principe de l'égalité de l'action et de la réaction ; la conséquence fâcheuse, c'est que ces équations ne peuvent pas rendre compte de certains phénomènes optiques. ». . . « Les ondes seront entraînées totalement dans le mouvement de la matière. ». . . « Les équations de Hertz sont impuissantes à expliquer l'entraînement partiel observé par Fizeau. » M. Poincaré donne ensuite un aperçu du sens dans lequel il faudrait modifier les équations de Hertz pour retrouver le phénomène de Fizeau.

Quant aux actions mécaniques du champ électromagnétique, puisque, dans l'expression de l'énergie de l'unité de volume dans les équations différentielles, on n'a eu à introduire que la force électrique et la force magnétique en un point de l'espace, c'est naturellement de la force électrique totale, et de la force magnétique totale (sans distinction d'origine électrostatique, ou d'induction, par variation d'intensité ou par mouvement, etc.) que dépendent les actions mécaniques. La force électrique, qui produit un courant induit dans un circuit, doit aussi agir mécaniquement sur un petit corps électrisé ; etc. Ceci encore n'est pas particulier à la théorie de Hertz, mais résulte de l'identité que tous les physiciens s'accordaient à admettre, comme fait d'expérience, entre les forces magnétiques d'origines diverses, ainsi qu'entre les forces électriques d'origines diverses ; exactement, comme il y a identité de nature de la vitesse d'un point d'un liquide, qu'elle provienne d'un mouvement tourbillonnaire ou non. C'est cette identité physique qui semble contredite par tout l'ensemble des expériences de M. Crémieu.

Revenons au Livre de M. Poincaré et aux autres conséquences de la symétrie parfaite des équations et de la forme de l'énergie ; un champ électrique variable se comporte comme un courant, il exerce les mêmes actions électriques ; il subit les mêmes actions mécaniques ; un diélectrique, pendant l'état variable, et

l'éther lui-même subissent des actions mécaniques suivant les lois d'Ampère. Un corps magnétique, dans l'état variable, et l'éther lui-même, pendant la variation du champ magnétique, subissent de la part d'un champ électrique des actions *correspondantes* aux forces électromagnétiques d'Ampère. Toutes ces actions théoriques dérivent de l'*unité de la force électrique* et de l'*unité de la force magnétique* de toute origine. Extrêmement petites, inabordables à l'expérience, ces forces sont précisément nécessaires pour l'égalité de l'action et de la réaction (matière et éther compris).

Ce qui distingue essentiellement la théorie de Lorentz de celle de Hertz, c'est que de toutes ces forces mécaniques il ne conserve que celle due au courant de convection ; il supprime les forces dues aux variations de champ électrique ou magnétique. Par opposition à l'éther de Hertz qui était totalement entraîné, l'éther de Lorentz est absolument immobile; aucune action mécanique ne lui est appliquée. De cette différence essentielle résulte, comme l'a montré M. Lienard, et comme M. Poincaré le montre avec la plus grande précision, que dans un système complet, matière et éther, s'étendant à l'infini, le mouvement du centre de gravité n'est pas nécessairement rectiligne et uniforme; que le principe de l'égalité de l'action et de la réaction n'est pas rigoureusement satisfait, dès que le rayonnement de l'énergie électrique est variable. Si inaccessibles à l'expérience que soient les différences, c'est là un résultat théorique qui mérite la plus grande attention, d'autant plus que la théorie de M. Lorentz semble se montrer la plus féconde dans le domaine optique. On lira avec le plus grand intérêt la discussion étendue et précise de M. Poincaré, dans son Livre (p. 448 et suiv.) et surtout dans l'article qu'il a donné au jubilé de Lorentz.

L'absence d'influence du mouvement de translation de la Terre sur les phénomènes optiques en première approximation est une conséquence rigoureuse de la théorie de M. Lorentz, théorie qu'il a exposée à diverses reprises, en français (1892), en allemand (1895) et en anglais (1900) sous des formes de plus en plus simples. Dans son second Mémoire (1895), M. Lorentz s'est occupé aussi de l'influence de ce mouvement de translation sur les phénomènes électriques et a fourni les éléments de la discus-

sion plutôt que la discussion elle-même; car il a conclu, un peu vite, à l'absence d'influence apparente, tandis que les recherches de M. Lienard ont montré que la compensation, parfaite en électrostatique, n'est théoriquement pas complète en induction ([1]); mais d'ailleurs la différence étant hors de portée de l'expérience.

Six Chapitres sont consacrés à cette théorie et à sa comparaison avec les autres, celle de Hertz en particulier. En dehors de ceux relatifs à l'influence du mouvement de la Terre, il faut signaler particulièrement le Chapitre V sur la dispersion optique et électrique et surtout le Chapitre VIII sur le phénomène de Zeeman, dont M. Poincaré a discuté tous les détails.

La partie la plus importante et la plus originale de tout l'Ouvrage est la quatrième : *A propos de la théorie de Larmor,* que M. Poincaré avait déjà publiée dans la *Lumière électrique* (t. LII). Nous allons l'analyser en détail. Au début, M. Poincaré rappelle les deux principales théories élastiques de la lumière, celle de Fresnel, et celle de Neumann, l'énergie potentielle de l'une étant l'énergie cinétique de l'autre, l'élasticité de tous les milieux isotropes étant la même dans l'une, tandis que c'est la densité qui est uniforme dans l'autre. Pour toutes deux on peut remplacer l'énergie potentielle par une énergie cinétique cachée, celle des gyrostats de lord Kelvin, qui est mise en jeu par des rotations et non, comme l'élasticité des solides ordinaires, par des déformations. Dans un milieu continu indéfini comme est l'éther, le caractère un peu singulier de ce genre d'élasticité disparaît, car une déformation localisée produit nécessairement autour d'elle des rotations, et réciproquement.

Pour passer des équations optiques pour les milieux isotropes transparents, aux équations électriques complètes, on doit ajouter un terme correspondant à la conductibilité des métaux, ce qui fournira un premier aperçu de leur opacité et de leurs autres caractères optiques, comme l'a déjà remarqué Maxwell.

Ce qu'a tenté Larmor, après Maxwell, c'est de rattacher les deux groupes d'équations à un pur mécanisme; c'est aussi ce que M. Poincaré examine avec plus de généralité.

---

([1]) Bien que l'expérience type proposée par M. Lienard doive donner une compensation parfaite.

Le vecteur de Fresnel est la force électrique, voilà ce qui résulte avec certitude de l'ensemble des expériences.

Si donc le vecteur de Fresnel est la vitesse de l'éther (théorie de Fresnel), un petit corps chargé d'électricité positive est une source permanente d'éther; un petit corps chargé d'électricité négative absorbe constamment de l'éther. Dans l'un, la densité de l'éther diminue constamment; dans l'autre, elle augmente constamment. A la vérité, dans la théorie de Fresnel, où l'élasticité est indépendante de la densité, où la compression a une vitesse de propagation nulle, la même hypothèse était déjà comprise, mais seulement pour des mouvements périodiques d'amplitude très petite. Ce qui la rend singulière en électricité, c'est la persistance des mouvements d'émission, pendant des heures au moins, pour des corps chargés et bien isolés.

Dans la théorie optique de Lamé, Neumann, Mac Cullagh, la vitesse de l'éther est le vecteur de Neumann, qui correspond à la force magnétique. Adoptant l'hypothèse d'Ampère sur les aimants, nous en concluons que l'éther est incompressible; au voisinage d'un courant, tout l'éther est en circulation. C'est le point de vue de Larmor. La charge électrique d'un conducteur apparaît ici comme due à une modification profonde dans l'élasticité du milieu diélectrique, pendant l'échange des charges : modification que M. Poincaré compare à celles produites par la trempe dans nos solides.

La *résistance électrique,* qui, pour la théorie de Fresnel, serait assimilable à celle que produit un corps poreux, pour un courant liquide, a pour les théories de Mac Cullagh le caractère d'une résistance à l'orientation, qui nous est moins familière.

Dans l'un et l'autre cas, la persistance de courants de sens déterminé devrait avoir des conséquences mécaniques importantes, et des conséquences optiques : l'entraînement des ondes lumineuses par un champ magnétique constant. Le résultat négatif d'expériences faites par M. Lodge, à la demande de M. Larmor, n'étonne nullement M. Poincaré, qui ne prend guère au sérieux l'existence d'un éther mécanique. Pour poursuivre son étude, M. Poincaré soumet à un nouvel examen l'électrodynamique des corps en mouvement, et passant en revue (p. 592-610) les théories de Hertz, de von Helmholtz, de Reif, de Lorentz, de J.-J.

Thomson, il montre que *seule* la théorie de Hertz satisfait aux deux conditions qui semblent nécessaires : être compatible avec le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, et conforme au principe de la conservation de l'électricité et du magnétisme. Les conditions qui s'imposent aux termes complémentaires qu'on pourrait songer à y introduire conduisent en effet à des valeurs nulles de ces termes.

Or, la théorie de Hertz ne donne pas l'entraînement des ondes lumineuses.

Aucune théorie ne peut donc satisfaire aux trois conditions.

En présence de cette difficulté décourageante, M. Poincaré adopte la théorie de Lorentz, sans dissimuler les difficultés auxquelles elle donne lieu :

« Il paraît bien difficile d'admettre que le principe de réaction soit violé, même en apparence, et qu'il ne soit plus vrai si l'on envisage seulement les actions subies par la matière pondérable et si on laisse de côté la réaction de cette matière sur l'éther. »...

Il me semble qu'il y a là une répugnance excessive à admettre la réalité de l'éther ; car le dernier membre de phrase ne se rapporte plus seulement à la théorie de Lorentz, mais à toutes les théories électromagnétiques qui localisent de l'énergie dans l'éther. De même un peu plus loin :

« L'expérience a révélé une foule de faits qui peuvent se résumer dans la formule suivante : il est impossible de rendre manifeste le mouvement absolu de la matière ou mieux le mouvement relatif de la matière pondérable par rapport à l'éther : tout ce qu'on peut mettre en évidence c'est le mouvement de la matière pondérable par rapport à la matière pondérable.

» L'impossibilité de mettre en évidence un mouvement relatif de la matière par rapport à l'éther, et l'égalité qui a sans doute lieu entre l'action et la réaction, sans tenir compte de l'action de la matière sur l'éther, sont deux faits dont la connexité semble évidente.

» Peut-être les deux lacunes seront-elles comblées en même temps. »

Après cette digression, M. Poincaré revient à l'examen des hypothèses mécaniques. Deux sphères pulsantes de même phase de Bjerknes, dans un liquide, donnent au liquide des vitesses qui

correspondent exactement aux forces électriques de deux corps chargés; mais elles s'attirent. Deux anneaux de fumée de Lord Kelvin donnent au milieu environnant des vitesses qui correspondent exactement aux forces électromagnétiques de deux courants, mais leurs actions mutuelles apparentes sont inverses. D'où provient cette opposition de signe entre les actions apparentes alors que le champ est exactement représenté? M. Poincaré montre qu'on retrouve les signes électriques quand on suppose pour les sphères pulsantes que le changement de distance des sphères ne change pas l'amplitude du *moment vibratoire* des sphères pulsantes, tandis que Bjerknes conservait l'amplitude des vitesses. Inversement, pour les anneaux, Lord Kelvin supposait constant le *moment de rotation* de chaque anneau; on retrouve les signes en supposant que c'est la vitesse qui se conserve.

Les *moments* dont il est question ici sont ceux des équations de Lagrange ($q$ les coordonnées, $q'$ les vitesses, T la force vive; le moment $p$ est $\partial T : \partial q'$).

C'est donc le *moment de vibration* qui donne une image de la charge électrique (encore imparfaite à cause de la nécessité du synchronisme); c'est la vitesse de rotation tourbillonnaire qui donne une image de l'intensité des courants électriques.

Peu après que M. Poincaré eut publié cette discussion dans la *Lumière électrique,* M. Larmor a donné à sa théorie une forme définitive qu'il a exposée dans son Livre *Æther and Matter* (1901), qui se rapproche beaucoup de celle de Lorentz mais dont le langage reste différent. L'éther gyrostatique de Lord Kelvin réagit contre une rotation par un couple proportionnel à cette rotation; pour pouvoir séparer des charges électriques, M. Larmor, adoptant l'hypothèse des *ions* indépendants, est obligé de supposer qu'un *ion* en mouvement change l'orientation d'équilibre de l'éther qu'il traverse.

La difficulté relative à l'inégalité de l'action et de la réaction est ici considérablement accrue, parce que la vitesse de l'éther, pour Larmor, est proportionnelle à la force magnétique; d'où la conclusion qu'un simple morceau de verre en mouvement à travers l'éther devrait montrer la polarisation rotatoire magnétique, comme auprès d'un aimant.

D'une manière générale, l'adoption d'une représentation méca-

nique déterminée est une cause grave de trouble, qui peut se résumer en deux mots; les trois groupes de variables indépendantes : force magnétique, force électrique, vitesse de l'éther, sont réduits à deux, par l'assimilation de la force magnétique à la vitesse de l'éther. A vrai dire, Lorentz, en immobilisant l'éther, Hertz, en le liant aux corps matériels, réduisent aussi à deux les groupes de variables indépendantes; mais ils nous laissent libres de faire des essais un peu différents sans abandonner complètement leur point de vue.

C'est par l'exposé de ces difficultés de la forme définitive de la théorie de Larmor que se termine le Livre de M. Poincaré.

Il n'en est aucun où soient exposées plus de théories intéressantes, où elles soient comparées et scrutées avec plus de pénétration; aucun, en somme, qui donne plus à réfléchir au physicien-géomètre désireux d'embrasser dans une même théorie cohérente un vaste ensemble de phénomènes. MARCEL BRILLOUIN.

---

ESTANAVE (EUGÈNE). — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE MINCE DONT DEUX BORDS OPPOSÉS AU MOINS SONT APPUYÉS SUR UN CADRE. (Thèse de Doctorat). In-4° de 72 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Dans ce Travail, l'Auteur examine avec les ressources de l'Analyse le déplacement d'un point quelconque du feuillet moyen d'une plaque rectangulaire mince dont deux bords opposés au moins sont appuyés simplement sur un cadre fixe, les deux autres pouvant être individuellement ou simultanément libres, appuyés ou encastrés.

Le problème d'élasticité d'une plaque rectangulaire mince de contexture homogène et isotrope, qui est sollicitée par des forces normales au feuillet moyen, a été traité par Navier en 1820 dans l'hypothèse où les quatre bords de la plaque sont appuyés sur un cadre fixe. Navier a exprimé dans ce cas le déplacement d'un point quelconque du feuillet moyen à l'aide d'un développement en série double.

M. Maurice Lévy a montré récemment que l'on pouvait adopter, pour l'expression de ce développement, un développement en série simple et ceci dans le cas où la plaque n'a plus nécessairement ses quatre bords, mais seulement deux bords opposés appuyés, les deux autres étant libres, appuyés ou encastrés.

Le premier Chapitre du travail de M. Estanave est consacré à la démonstration de l'identité du développement en série double de Navier, et du développement en série simple dans le cas où l'on tient compte des conditions d'appui des quatre bords.

Dans les Chapitres suivants, l'Auteur traite, par le développement en série simple, les six problèmes d'équilibre d'élasticité auxquels donnent lieu les diverses combinaisons des conditions au contour. Ces six problèmes sont relatifs aux cas où la plaque a :

1° 4 bords appuyés (problème de Navier);
2° 3 bords appuyés, le quatrième libre (cas de Vannes);
3° 3 bords appuyés, le quatrième encastré;
4° 2 bords appuyés, 2 bords opposés libres;
5° 2 bords appuyés, 2 bords opposés encastrés;
6° 2 bords appuyés, 1 bord libre, 1 bord encastré.

En particulier dans le cas examiné par Navier, qui est un de ces six problèmes, le seul qui avait déjà été étudié, M. Estanave a comparé les résultats donnés par les deux développements en séries, et a montré que le développement en série simple donne un résultat plus rapidement approché.

Dans les questions de Mécanique, il arrive fréquemment que, pour pouvoir pousser le calcul jusqu'au bout, il est nécessaire de faire des hypothèses. La vérification expérimentale des formules est intéressante dans ces cas, car elle montre du même coup l'exactitude du calcul et la légitimité des hypothèses. L'auteur a fait cette vérification expérimentale dans le cas d'une plaque appuyée sur ses quatre bords et celui où elle a un bord libre. Il prend pour cela une plaque de verre carrée et mesure le déplacement du centre, en supposant la charge uniformément répartie sur la plaque. Il montre que ce dispositif expérimental pourrait servir, à défaut de moyens plus simples, à déterminer le coefficient d'élasticité de la plaque.

Dans le cas où la plaque a trois bords appuyés et un bord libre,

la vérification expérimentale a une importance toute particulière, car elle montre l'exactitude des conditions au contour déduites par Kirchhoff du calcul des variations.

Après avoir examiné ces six problèmes, dont un seul, le problème de Navier, avait été traité, M. Estanave résume dans un Tableau les résultats relatifs à une plaque carrée.

| Conditions au contour. | Déplacement du centre de la plaque. | Déplacement du milieu du bord libre. |
|---|---|---|
| 2 bords appuyés, 2 bords opposés encastrés..... | $\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}0,134$ | » |
| 3 bords appuyés, 1 bord encastré..... | $\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}0,212$ | » |
| 4 bords appuyés..... | $\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}0,310$ | » |
| 2 bords appuyés, 1 bord encastré, 1 bord libre.. | $\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}0,430$ | $\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}0,825$ |
| 3 bords appuyés, 1 bord libre..... | $\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}0,602$ | $\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}0,915$ |
| 2 bords appuyés, 2 bords libres..... | $\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}0,994$ | $\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}1,110$ |

Dans ces formules, $p$ désigne la charge que supporte la plaque par unité d'aire, $a$ la longueur du côté de la plaque et E le coefficient d'élasticité de traction de la matière constitutive. Enfin I est égal à $\frac{\varepsilon^3}{12}$, $\varepsilon$ désignant l'épaisseur de la plaque.

Ce Tableau permet de comparer les valeurs des déplacements du centre et des milieux des bords libres d'une plaque carrée soumise à une charge uniforme dont les conditions au contour sont différentes, et montre que, pour une même plaque carrée, la valeur des déplacements du centre va en croissant avec le degré de liberté de la plaque.

Dans une deuxième Partie, l'auteur donne quelques aperçus sur certaines séries trigonométriques et indique les services que pourrait rendre, au point de vue de la sommation de ces séries, l'identité qu'il a démontrée dans le premier Chapitre de son Mémoire.

Ces séries offrent une certaine variété, car les coefficients renferment une fonction arbitraire qui est la charge supportée par la

plaque. Il examine le cas où cette charge est constante ou représentée par une fonction entière des coordonnées du point et indique les séries obtenues. Il parvient à vérifier l'exactitude des résultats en sommant directement ces séries. E. E.

DAVIDOGLOU (ANTOINE), Élève étranger de l'École Normale supérieure. — SUR L'ÉQUATION DES VIBRATIONS TRANSVERSALES DES VERGES ÉLASTIQUES. Paris, Gauthier-Villars, 1900; in-4, de 86 pages.

Ce Travail est consacré à l'étude de l'équation des vibrations transversales des verges élastiques non homogènes. Il contient l'étude d'une équation du quatrième ordre, étude faite à l'aide de la méthode des approximations successives. Cette méthode se présente d'ailleurs assez naturellement quand on envisage les intégrales comme fonctions d'un certain paramètre. C'est en appliquant cette méthode aux équations du second ordre que M. Picard a obtenu des résultats très importants et d'une grande simplicité.

M. Davidoglou considère l'équation linéaire

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k\varphi(x)y \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction positive dans un intervalle $(a, b)$. Il s'agit d'étudier les valeurs de $k$ pour lesquelles il existe une intégrale de l'équation précédente (continue ainsi que ses dérivées des quatre premiers ordres), s'annulant ainsi que sa première dérivée en $a$ et $b$. L'auteur montre qu'il existe une infinité de valeurs positives de $k$ jouissant de cette propriété, et indique le moyen de les trouver de proche en proche.

Dans un autre Chapitre, M. Davidoglou résout le problème de la verge encastrée en $a$ et $b$; il faut pour cela intégrer l'équation

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \varphi(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

par la condition que la fonction $w$ et la dérivée $\frac{\partial w}{\partial x}$ s'annulent en $a$

et $b$ quel que soit $t$ et que l'on ait de plus $w(x, 0) = f(x)$. La difficulté de la question revient à établir la possibilité du développement de $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i Y_i(x),$$

les fonctions $Y_i(x)$ étant les intégrales particulières correspondant aux diverses valeurs de $k$.

M. Davidoglou examine aussi le cas où la verge élastique est appuyée en $a$ et encastrée en $b$. Ces nouvelles conditions limites entraînent des différences assez sensibles au point de vue analytique.

Enfin, dans une seconde Partie de son Mémoire, l'auteur étudie un développement asymptotique des intégrales de l'équation (1) qu'il écrit

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k^4 \varphi(x) y,$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui par hypothèse admet des dérivées de tout ordre.

E. E.

---

GODEFROY (Maurice), Bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille. — La fonction gamma. Théorie, histoire, bibliographie. (Thèse de Doctorat de l'Université de Paris.) Un volume grand in-8°, 94 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Ce travail, comme son titre l'indique, a pour objet une monographie à la fois théorique, historique et bibliographique de la fonction gamma. On sait quel intérêt s'attache à cette transcendante; les plus grands géomètres depuis Euler et Legendre jusqu'à Weierstrass et Hermite s'en sont occupés, et l'on peut dire que son histoire est intimement liée à celle de l'Analyse mathématique, car chaque progrès réalisé dans la théorie des intégrales définies et dans la théorie générale des fonctions a eu ses applications à la fonction gamma.

L'auteur donne d'abord l'historique détaillé des recherches relatives à la fonction gamma dont il fait remonter l'origine à Wallis et à Stirling, puis il expose la théorie d'une manière élémentaire grâce à l'emploi exclusif de la méthode des séries. Il prend, en effet, pour définition de $\Gamma(x)$ celle adoptée par Gauss et en déduit toutes les propriétés de cette transcendante. Les fonctions $P(x)$ et $Q(x)$ de Prÿm, la fonction de Binet $\varpi(x)$, puis les deux premières dérivées de $\log\Gamma(x)$ qui sont désignées par $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont successivement étudiées d'une façon très complète. Un chapitre est consacré aux développements en séries entières et là encore des simplifications sont apportées aux procédés ordinaires. L'Ouvrage se termine par un exposé substantiel des applications de la fonction gamma au calcul de la limite de produits infinis ou de séries dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice et à la résolution de certaines équations fonctionnelles dans lesquelles entre une fonction rationnelle de la variable; à cette dernière question, M. Godefroy rattache la résolution de l'équation de Lindhagen et celle des équations de Crelle, point de départ de la théorie des facultés analytiques. E. E.

PASCAL (E.). — Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formen, Theoreme, Literatur). Autorisierte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Schepp. I. Theil : die Analysis. Un vol. in-16; xii, 636 p. Leipzig, Teubner, 1900.

Nous avons eu l'occasion de dire la grande utilité, et la grande commodité du *Répertoire des hautes Mathématiques,* publié par M. Pascal; le succès qu'il obtient est fort naturel; nous sommes heureux de signaler la traduction qui vient d'être faite, et qui paraît à la librairie Teubner; le livre a été amélioré et complété sur plusieurs points. Il est d'ailleurs à souhaiter que des ouvrages de cette nature aient de nombreuses éditions, afin qu'ils puissent être mis à jour, et que, dans le cas où il s'y serait glissé quelques incorrections, celles-ci puissent être corrigées.

J. T.

1re Partie

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GUSTAVE ROBIN. — ŒUVRES SCIENTIFIQUES RÉUNIES ET PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, par Louis Raffy (*Physique mathématique*). Gauthier-Villars; 1899.

Ce fut une nature singulièrement originale que celle de Gustave Robin. M. Raffy a dit, sur la tombe de son ami, quelle était la hauteur de son caractère, et avec quel désintéressement il aimait et cultivait la science. La mémoire de Robin restera toujours chère à ceux qui l'ont approché et auxquels il a bien voulu se livrer un peu. Ce sera, pour ma part, un des meilleurs souvenirs de ma carrière, que de l'avoir eu pour auditeur pendant bien des années. Quoique la Physique générale et la Chimie générale fissent surtout depuis dix ans l'objet de ses méditations, Robin ne voulait pas rester étranger au mouvement mathématique contemporain, et ce n'est pas sans émotion que je me rappelle aujourd'hui nos longues conversations mathématiques; sur les sujets qui lui étaient le moins familiers, il voyait rapidement les points essentiels, et sa critique toujours pénétrante se plaisait à mettre chaque chose à sa place. Doué comme il l'était, et avec son énorme puissance de travail, Robin aurait pu acquérir rapidement une grande notoriété scientifique, mais il n'en avait aucun souci, et, comme l'a dit M. Raffy, « il s'attacha toujours à faire l'ombre sur ses découvertes avec le même zèle que d'autres mettent à faire valoir les leurs ».

Les Mémoires publiés par Robin sont peu nombreux, mais il a laissé des manuscrits étendus, et il faut aussi comprendre dans son Œuvre une partie des cours qu'il a professés à la Sorbonne sur la Thermodynamique et la Chimie physique. M. Raffy s'est donné la pieuse tâche de rassembler les travaux de son ami. Les *Œuvres scientifiques* de Robin comprendront trois volumes.

Le premier fascicule du premier volume est consacré aux recherches de Physique mathématique. Il s'ouvre par le Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts, qui, en 1886, a servi de thèse à Robin. Dans cet important travail, qui apportait des vues nou-

velles dans une question restée longtemps stationnaire, l'Auteur se sert systématiquement, au lieu de l'équation de Laplace, d'une équation fonctionnelle à deux variables indépendantes seulement, qui est aujourd'hui désignée sous le nom d'*équation de Robin*. Celle-ci est tout d'abord employée dans l'étude de la distribution de l'électricité à la surface d'un sphéroïde conducteur. C'est surtout dans le cas des conducteurs ouverts que Robin obtient des résultats remarquables. Après avoir montré comment la recherche de la répartition de la charge entre les deux faces revient à une quadrature, il indique une réduction importante qui ramène l'équilibre électrique des surfaces conductrices avec un contour multiple à celui des surfaces à contour simple. Il emploie là un de ces procédés d'exhaustion, qui jouent aujourd'hui un rôle si important dans plusieurs questions d'Analyse, et dont le premier exemple avait jadis été donné par Murphy précisément dans une question d'électricité. Cette réduction permet à Robin de traiter le problème de la distribution électrique d'une sphère percée d'ouvertures circulaires en nombre quelconque, et en particulier sur une zone, en prenant pour point de départ la solution donnée par Thomson pour l'équilibre électrique de la calotte sphérique. Le beau résultat de Robin restera à côté de celui de l'illustre physicien anglais.

Robin a fait usage de son équation fonctionnelle pour obtenir la distribution de l'électricité sur une surface fermée convexe, la couche électrique étant en équilibre, soit d'elle-même, soit sous l'action de charges extérieures fixes; il suppose d'ailleurs établie la possibilité de l'équilibre. Plusieurs géomètres sont depuis revenus sur ce problème, tant au point de vue de l'existence même de la solution qu'au point de vue de la forme de la surface conductrice; celle-ci peut n'être pas convexe, et la méthode est encore applicable moyennant seulement quelques hypothèses très générales. Dans cet ordre d'idées, Robin fut naturellement conduit à traiter le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace, quand on se donne à la surface la valeur de la fonction ou la dérivée normale. La *méthode de Robin* dans ce problème est aujourd'hui classique, comme celle de Neumann, et a été l'origine de nombreuses recherches.

En 1887, Robin avait publié dans les *Comptes rendus* une

Note sur l'*Explosion au sein des liquides*. Le Mémoire développé a été retrouvé dans ses papiers; il débute par un principe général de la théorie des percussions, corrélatif de celui de Hamilton dans la dynamique des forces ordinaires, et comprenant comme cas particulier un théorème jadis énoncé par Thomson et Tait. Ce principe est extrêmement fécond, et Robin en fait de très intéressantes applications, en particulier aux explosions dans un liquide, en supposant qu'une sphère très petite éclate au sein de celui-ci : le cas de l'explosion sous un corps flottant est longuement développé.

On trouvera encore dans ce volume quelques fragments de moindre étendue, notamment sur la théorie du *replenisher* de Thomson, et sur une expérience de Hertz. Les travaux que nous venons de parcourir rapidement témoignent d'un réel esprit d'invention et d'une grande fécondité de ressources analytiques; ils montrent à quelles hauteurs Robin aurait pu atteindre en Mathématiques pures, si son activité ne s'était surtout portée sur d'autres études.

Au moment où j'écris ces lignes, je reçois le second fascicule du Tome I, consacré à la Thermodynamique générale. Il demandera une étude très approfondie, et c'est surtout aux physiciens qu'il appartiendra de discuter ce qu'il renferme de nouveau et d'original. Je veux seulement ici faire une remarque qui m'est suggérée par la lecture de l'Introduction et de la Leçon inaugurale du cours de Robin en 1896, publiée en 1898 dans la *Revue générale des Sciences*. Robin, frappé, comme beaucoup d'autres, des difficultés que l'on rencontre quand on veut préciser la notion d'explication mécanique des phénomènes naturels, et des bizarreries que présentent maintes théories mécaniques, insiste vigoureusement sur l'étrangeté qu'il y a à expliquer le connu par l'inconnu, le visible par l'invisible, et à imaginer, par exemple, comme il le dit, un éther que nul œil humain ne verra jamais. La Science, pour lui, doit résolument abandonner toutes ces hypothèses et toutes ces entités, pour s'orienter dans la voie que lui trace la Thermodynamique générale convenablement organisée. Je ne puis à cet égard être d'un avis aussi exclusif. Toutes les accusations contre le mécanisme sont certes justifiées, si l'on prend le mot d'*explication* dans le sens où il a été longtemps entendu, mais elles perdent

de leurs forces si l'on ne cherche dans une explication qu'une image, plus ou moins grossière, mais utile et féconde, sans avoir la prétention d'atteindre la réalité. La Science peut suivre à la fois des voies diverses, et la multiplicité des points de vue est non seulement légitime, mais indispensable. Le désir impérieux de chercher, des explications mécaniques a été un stimulant d'une très grande fécondité, et rien ne prouve que celle-ci soit épuisée. Bien au contraire: nous voyons en Chimie physique naître des théories audacieuses extrêmement fécondes, dont la discussion quelquefois passionnée donne à certaines parties de la Chimie et de la Physique une vie intense, et, récemment encore, les hypothèses de Lorentz sur les électrons ne le conduisaient-elles pas à prévoir dans un cas simple le phénomène découvert ensuite par Zeemann? Ce n'est qu'en suivant à leur heure des tendances différentes, quelquefois opposées, que les Sciences progressent; il ne faut pas mutiler l'esprit humain dans la tâche immense qui s'ouvre devant lui. C'est dans les parties, déjà bien constituées, comme la Statique générale des équilibres physiques et chimiques, qu'une exposition peut être faite d'une manière systématique, et, sans aucun doute, l'effort vigoureusement poursuivi par Robin marquera dans l'histoire de la Science; dans les parties encore inexplorées, l'esprit souffle où il peut. ÉMILE PICARD.

---

AUPETIT (A.). — ESSAI SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DE LA MONNAIE. 1 vol. in-8°; 297 p. Paris, Guillaumin et Cie; 1901.

L'Auteur, dans l'Introduction de son Ouvrage, caractérise comme il suit le but qu'il a eu en vue :

« L'étude rationnelle des phénomènes monétaires — limitée en l'état actuel aux questions d'équilibre — trouvera sa base logique dans la statique générale des systèmes économiques telle qu'elle résulte des remarquables travaux de MM. Léon Walras et Vilfredo Pareto. Elle comprendra trois parties consacrées aux trois fonctions essentielles de la monnaie, la fonction de numéraire, la fonction de circulation, la fonction d'épargne. Sur la plupart des

points la théorie rationnelle était faite; il n'y avait qu'à reprendre des éléments dès maintenant acquis. Notre effort personnel a surtout porté sur la difficulté essentielle que recèle toute interprétation mathématique des sensations ou des besoins humains : la définition d'une unité. L'obstacle était sérieux. Dans ses plus récents travaux, M. V. Pareto n'a cru pouvoir mieux faire que de la tourner. Nous avons tenté de l'aborder de front.

» L'étude expérimentale de la monnaie — encore qu'aucune loi n'ait été, peut-être, consacrée par une adhésion unanime — est depuis longtemps constituée dans ses parties essentielles. Pour remonter des phénomènes à leurs connexions générales et nécessaires, nous n'avons eu qu'à résumer d'excellentes études descriptives, à accorder aux procédés statistiques de mesure la place qui leur revient, à tenter enfin d'obtenir, par l'emploi des procédés graphiques, une expression plus saisissante des mouvements naturels de la circulation monétaire.... »

HANCOCK (Harris), Professeur à l'Université de Cincinnati (États-Unis). — Mémoire sur les systèmes modulaires de Kronecker. In-4° de 115 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901. (Thèse de Doctorat de l'Université de Paris.)

Le Mémoire de M. Hancock comprend deux parties : la première, qui occupe cinquante-cinq pages, est consacrée à la partie purement historique. L'auteur signale les points communs à la théorie de Dedekind et à celle de Kronecker, qui sont dus à ce qu'il y a de commun aux domaines de rationalité d'où ces théories tirent leur origine. C'est pour cela que, après avoir donné un historique de la théorie des nombres algébriques, il examine brièvement quelques-uns des points essentiels des domaines algébriques de rationalité en cherchant surtout à mettre en évidence les propriétés caractéristiques qui sont communes à la fois aux modules et aux idéaux de Dedekind, d'une part, et aux systèmes modulaires de Kronecker, de l'autre. Il peut ainsi étendre beaucoup de théorèmes sur les modules et les idéaux à la théorie des systèmes modulaires.

La seconde partie est personnelle à M. Hancock. Dans ses

recherches, il considère des polynomes dont les coefficients sont des entiers d'un corps algébrique. Il traite de la réduction des systèmes de modules à des formes simples. Dans cette réduction les ideaux de Dedekind jouent, comme on pouvait le prévoir, un rôle important.

L'auteur insiste sur l'importante notion des systèmes modulaires premiers qui, dans cette Arithmétique généralisée, sont les analogues des nombres premiers de l'Arithmétique élémentaire et indique des congruences intéressantes rappelant les théorèmes de Fermat et de Wilson.

Les principaux Chapitres de cette deuxième Partie traitent des systèmes modulaires de première espèce.

Réduction du système modulaire de seconde espèce lorsque la seconde puissance ou des puissances plus hautes de l'idéal premier $p$ entrent comme éléments.

Réduction des systèmes modulaires de troisième espèce dans lesquels la seconde puissance ou une puissance plus élevée de la fonction irréductible $g(x) \pmod{p}$ entre comme élément.

E. E.

---

MICHEL (Ch.), Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Douai (Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences de Paris, 1901). — Sur les applications géométriques du théorème d'Abel. In-4° de 54 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Le théorème d'Abel n'a pas été moins fécond pour la Géométrie que pour l'Analyse. Il suffit en effet de prendre des intégrales abéliennes ayant une signification géométrique simple, pour parvenir à des énoncés où tous les éléments ont eux-mêmes une interprétation géométrique. Le nombre des relations que l'on peut ainsi obtenir est évidemment illimité, et l'effort principal de ceux qui se sont occupés de ce sujet a eu pour but de choisir des éléments géométriques et des conditions particulières, de façon à parvenir à des énoncés aussi simples que possible.

Les méthodes qu'a suivies M. Michel sont particulièrement appropriées au but qu'il se propose; son point de départ repose uniquement sur une propriété élémentaire des équations algé-

briques. Le théorème d'Abel est obtenu par cette voie sous une forme un peu plus générale que celle qu'on lui donne ordinairement, en considérant, non plus une seule courbe fixe, mais un système de deux courbes fixes coupées par une courbe variable. Avec deux intégrales abéliennes de même espèce attachées respectivement à chacune de ces courbes. En particularisant ensuite l'une des courbes fixes on obtient immédiatement le théorème relatif aux intégrales de troisième et de seconde espèce, sous une forme qui met en évidence la signification géométrique des divers éléments figurant dans les formules.

La démonstration générale suppose essentiellement que la courbe sécante variable ne passe pas constamment par un point singulier commun aux deux intégrales. L'auteur montre ensuite comment on peut, dans certains cas, lever l'indétermination en restreignant la variation de la courbe sécante autour du point singulier. Ceci permet d'étendre les énoncés qui traduisent géométriquement le théorème d'Abel, à certains cas spéciaux où ces énoncés paraissent au premier abord devenir illusoires. Ce point conduit à des discussions assez délicates.

Dans une autre partie, M. Michel fait des applications aux arcs des courbes de direction, aux angles, aux distances, aux courbes unicursales et aux courbes gauches.

Il signale, une suite de théorèmes relatifs à l'orientation de certains systèmes de droites, dont quelques-uns avaient déjà été énoncés par Laguerre et par M. Humbert. E. E.

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Encyklopädie *der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* Herausgeg. von H. Burkhardt u. W. F. Meyer. I. Thl. : *Reine Mathematik*, 2 Bd. : *Analysis*. Redig. von H. Burkhardt. 2. u. 3. Heft. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 7 m. 50 pf.

Lubsen (H.-B.). — *Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung* (Diffe-

rential- u. Integral-Rechnung). Zum Selbstunterricht. 8e édit. gr. in-8°, IV-383 p. avec 54 fig. Leipzig, Brandstetter. 8 m.

ROUCHÉ (E.) et DE COMBEROUSSE (C.). — *Traité de Géométrie,* 7e édit. In-8°, LX-1212 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 17 fr.

SERRET (J.-A.). — *Cours de calcul différentiel et intégral,* 5e édit. 2 vol. in-8°, XIII-617 p. et XIII-904 p. Paris, Gauthier-Villars. 25 fr.

DRUDE (P.). — *Lehrbuch der Optik.* gr. in-8°, XIV-498 p. avec 110 fig. Leipzig, Hirzel. 10 m.; relié. 11 m. 20 pf.

COLSON (R.). — *Traité élémentaire d'électricité avec les principales applications.* 3e édit. In-18° jésus, VI-272 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 75 c.

BERTRAND (J.) et GARCET (H.). — *Traité d'Algèbre.* 2e Partie. Nouv. édit. In-8°, 392 p. Paris, Hachette. 5 fr.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA. *Zeitschrift f. Geschichte d. mathemat. Wissenschaften.* Herausgeg. von G. Eneström. 3. Folge. 1. Bd. 4 Hefte, gr. in-8° (1. u. 2. Heft), 296 p. avec 1 Heliograv., 3 portraits et 28 fig. Leipzig, Teubner. 20 m.

BRÜCKNER (M.). — *Vielecke und Vielflache. Theorie u. Geschichte,* gr. in-8°, VIII-227 p. avec 12 planches et de nombreuses figures. Leipzig, Teubner. Cart. 16 m.

FEDOROW (E.-V.). — *Reguläre Plan- u. Raumtheilung.* (Sonderdr.). Gr. in-4°, 124 p. avec 13 planches. München, Franz. 6 m.

HAGEN (J.-G.). — *Synopsis der höheren Mathematik.* 3. Bd. *Differential- u. Integralrechnung.* (In 6 Lfgn.) 1. Lfgn. Gr. in-4°, p. 1-64. Berlin, Dames. 5 m.

JAHRESBERICHT *der deutschen Mathematiker-Vereinigung.* Herausgeg. im Auftrage des Vorstandes von G. Hauck u. A. Gutzmer. 8. Bd. 1, Heft. gr. in-8°, 234 p. avec Fig. Leipzig, Teubner. 8 m.

LAURENT (H.). — *L'élimination.* In-16°, 75 p. Paris, Carré et Naud.

PIETSCH (C.). — *Katechismus der Nivellirkunst.* 5e édition. In-12, VIII-105 p. avec 61 fig. Leipzig, Weber. 2 m.

1re Partie

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PEANO (G.), professeur à l'Université de Turin. — FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES. Introduction (1894); t. I (1895); t. II, n° 1 (1897); n° 2 (1898); n° 3 (1899); t. III (1901). Turin, Bocca et Clausen.

Il est bien tard pour rendre compte d'un Ouvrage dont la première édition a paru en 1895; et pourtant, il n'est pas trop tard, puisque la troisième édition vient de paraître cette année, et qu'elle nous permet d'apprécier plus complètement cette œuvre originale, monument de patience et d'érudition, qui est d'ailleurs « toujours en construction ». On sait qu'elle consiste à réunir toutes les vérités mathématiques connues, en les classant d'abord dans l'ordre des matières (c'est-à-dire des notions qui y figurent), puis dans l'ordre où elles se déduisent les unes des autres, accompagnées (au moins les principales) de leur démonstration. Pour y parvenir, les auteurs emploient un système de *pasigraphie* ou mieux d'*idéographie* inventé par M. G. Peano en 1888 (1), appliqué d'abord par lui à l'Arithmétique et à la Géométrie (2), puis développé et perfectionné par lui et ses collaborateurs (3).

Avant d'analyser le *Formulaire* lui-même, nous devons étudier la langue dans laquelle il est écrit, et dont les principes forment d'ailleurs la première Partie de ce *Formulaire* (4).

## I.

Les idées fondamentales du Calcul logique sont celles d'*individu* et de *classe* (5). La première relation à considérer est donc

(1) *Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre *di H. Grassmann*, preceduto dalle operazioni della Logica deduttiva. Torino, Bocca, 1888.

(2) *Arithmetices principia, nova methodo exposita; I Principii di Geometria, logicamente esposti*. Torino, Bocca, 1889.

(3) Dans la *Revue de Mathématiques* (*Rivista di Matematica*), publiée depuis 1891. Le Tome VII a commencé en 1900.

(4) Nous avons étudié la *Logique mathématique* de M. Peano à un point de vue exclusivement logique dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* de septembre 1899 (t. VII, p. 616-646). Ici, au contraire, nous nous attacherons surtout aux applications mathématiques de cette Logique, et aux parties mathématiques du *Formulaire*.

(5) L'idée logique de *classe* (dont le symbole est K ou Cls) coïncide exacte-

celle de l'individu à la classe à laquelle il appartient : elle se représente par le symbole $\varepsilon$ [1], qui se lit : *est un*.

Ainsi, soit $a$ le symbole d'une classe, on écrira :

$$x \varepsilon a$$

pour dire que $x$ est un $a$, et

$$x, y, z \varepsilon a$$

pour dire que $x$, $y$, $z$ sont des $a$ [2].

La Logique étudie deux relations fondamentales entre les classes : la *contenance* ou *inclusion*, et l'*égalité*. Une classe $a$ est contenue dans une classe $b$, si tout $a$ est un $b$, et l'on écrira alors

$$a \supset b \quad [3].$$

Une classe $a$ est égale à une classe $b$, si tout $a$ est un $b$, et si inversement tout $b$ est un $a$; et l'on écrit alors :

$$a = b.$$

On voit immédiatement que l'*égalité*

$$a = b$$

équivaut aux deux inclusions inverses réunies

$$a \supset b, \qquad b \supset a.$$

Les mêmes relations sont applicables aux propositions. Nous allons d'abord définir leur sens; nous l'expliquerons et le justifierons ensuite.

Si $p$ et $q$ désignent des propositions contenant une même lettre variable $x$, l'inclusion

$$p \cdot \supset x \cdot q$$

---

ment avec l'idée mathématique d'*ensemble;* aussi le Calcul logique n'est-il pas autre chose qu'une théorie des ensembles au point de vue de leur inclusion et de leur exclusion mutuelles.

(1) Initiale du mot ἐστί.

(2) Par suite, une formule telle que $x \varepsilon a$ implique *ipso facto* que $a$ est une classe, selon M. Padoa.

(3) $\supset$ est l'initiale renversée du mot *continet* : $b \subset a$.

signifie :

*Quel que soit $x$, de $p$ on déduit $q$, ou la vérité de $p$ entraîne celle de $q$;*

ou enfin :

*Si $p$ est vraie, $q$ est vraie.*

L'égalité

$$p \cdot =_x \cdot q$$

équivaut aux deux inclusions inverses réunies

$$p \cdot \supset_x \cdot q, \qquad q \cdot \supset_x \cdot p.$$

Elle signifie que, *quel que soit $x$, les deux propositions $p$ et $q$ se déduisent réciproquement l'une de l'autre* (1).

Voici maintenant comment on passe de l'un à l'autre sens de ces notations. La proposition catégorique (entre classes) :

*Tout $a$ est $b$ :*

$$a \supset b,$$

équivaut à la proposition hypothétique (entre propositions) :

$$x \in a . \supset . x \in b,$$

c'est-à-dire :

*Si $x$ est un $a$, $x$ est un $b$;*

et cette équivalence peut s'écrire :

$$a \supset b . = : x \in a . \supset . x \in b \quad (2).$$

Inversement, si l'on désigne par $(x \ni p)$ la classe des $x$ qui véri-

(1) On les appelle alors *équivalentes;* mais cela ne veut pas dire qu'elles soient *synonymes;* car une telle équivalence a lieu entre une proposition quelconque et ce qu'on appelle sa *condition nécessaire et suffisante.*

(2) Notons à ce propos que M. Peano remplace fort avantageusement les parenthèses par des points (suivant un usage inspiré de Leibniz). On doit grouper d'abord les formules séparées par un point, puis celles séparées par deux points, et ainsi de suite. La copule principale d'une formule est le signe qui est encadré du plus grand nombre de points (par exemple, le signe $=$ dans la formule ci-dessus). Il va sans dire que le point n'est plus employé comme signe de multiplication, ni les deux points comme signe de division.

fient la proposition $p$ [1], la proposition hypothétique (entre propositions)

$$p \supset_x q$$

équivaut à la proposition catégorique (entre classes)

$$x \varepsilon p . \supset . x \varepsilon q,$$

c'est-à-dire :

*Les $x$ qui vérifient $p$ font partie des $x$ qui vérifient $q$,*

et cette équivalence s'écrira

$$p \supset q . = : x \varepsilon p . \supset . x \varepsilon q.$$

Nous connaissons les trois *relations* ou *copules* fondamentales du Calcul logique ($\varepsilon$, $\supset$, $=$). Il reste à définir les trois *opérations* de ce Calcul.

Les deux premières sont l'*addition* et la *multiplication* logiques.

La *somme logique* de deux classes $a$ et $b$ ($a \smile b$) est l'ensemble des individus contenus dans chacune de ces classes (dans l'une *ou* dans l'autre) [2]. Le *produit logique* de deux classes $a$ et $b$ ($a \frown b$) est l'ensemble des individus contenus à la fois dans les deux (dans l'une *et* dans l'autre) [3].

La *somme logique* de deux propositions est leur *alternative*, c'est-à-dire l'affirmation que l'une *ou* l'autre (au moins) est vraie. Le *produit logique* de deux propositions est leur position *simultanée* [4], c'est-à-dire l'affirmation que l'une *et* l'autre sont vraies (à la fois).

---

[1] Cette notation (qui exprime la relation inverse de la relation $\varepsilon$) traduit ce qu'on appelle en Grammaire les *pronoms relatifs*, et par suite les propositions relatives (les $x$ qui ..., les $x$ tels que ...).

Si l'on a

$$p = x \varepsilon a,$$

on a, inversement,

$$a = x \ni p.$$

[2] De là vient que le signe $\smile$ traduit souvent (mais pas toujours) la conjonction *ou*.

[3] De là vient que le signe $\frown$ traduit souvent (mais pas toujours) la conjonction *et*.

[4] Dans le sens où l'on parle d'un système d'équations *simultanées*.

Quel est le rapport entre ces deux sens des opérations logiques? Il est très simple, et s'exprime par les équivalences suivantes

$$x \varepsilon a \smile b . = . x \varepsilon a . \smile . x \varepsilon b .$$

*Dire que x est un « a ou b », c'est dire que, ou bien x est un a, ou bien x est un b.*

$$x \varepsilon a \frown b . = . x \varepsilon a . \frown . x \varepsilon b .$$

*Dire que x est un « a et b », c'est dire que x est un a et (en même temps) x est un b* (1).

Ces deux équivalences peuvent servir à définir le sens de chacune de ces opérations pour les classes, quand on l'a défini pour les propositions, ou *vice versa,* par exemple au moyen des formules suivantes

$$a \smile b . = . x \varepsilon (x \varepsilon a . \smile . x \varepsilon b),$$
$$a \frown b . = . x \varepsilon (x \varepsilon a . \frown . x \varepsilon b),$$

que nous laissons au lecteur le soin de traduire verbalement.

La troisième opération logique est la *négation*. Si $a$ est une classe, $-a$ désigne la classe des non-$a$. Si $p$ est une proposition, $-p$ désigne la négation de $p$ (la proposition contradictoire).

La liaison entre les deux sens de la négation s'établit par l'équivalence suivante

$$x \varepsilon - a . = . - (x \varepsilon a).$$

*Dire que x est un non-a, c'est dire que x n'est pas un a.*

Cette équivalence peut servir à définir l'un des deux sens de la négation en fonction de l'autre : par exemple, la négation d'une classe au moyen de la négation d'une proposition

$$- a = x \varepsilon - (x \varepsilon a).$$

*La classe non-a est l'ensemble des individus x qui ne sont pas des a* (2).

---

(1) Dans la pratique, le signe de la multiplication logique se sous-entend, comme celui de la multiplication arithmétique ou algébrique, et l'on écrit simplement

$$x \varepsilon ab . = . x \varepsilon a . x \varepsilon b .$$

(2) Dans la pratique, la négation d'une proposition s'exprime en mettant le

On définit encore une classe particulière, la classe *nulle* ou *zéro logique* ($\Lambda$) par la formule suivante

$$\Lambda = x \varepsilon (a \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset_a . x \varepsilon a).$$

*Zéro est la classe $x$ telle que, si $a$ est une classe, $x$ est contenue dans $a$;*

ou plus simplement :

*Zéro est la classe contenue dans une classe quelconque (dans toutes les classes).*

De cette définition formelle on déduit, par des considérations trop longues à exposer ici, que *zéro* est la classe qui ne contient aucun individu, la classe *vide* ou *nulle* (¹).

L'idée et le symbole du *zéro* sont indispensables en Logique pure, mais à peu près inutiles en Logique mathématique. Ils y sont remplacés par le symbole $\exists$, qui se définit formellement comme suit

$$\exists a . = . a - = \Lambda.$$

$\exists a$ s'énonce : *il y a des a.*

On a par suite

$$- \exists a . = . a = \Lambda,$$

ce qui s'énonce : *il n'y a pas de a.*

Enfin, il est souvent utile, en Mathématiques, de considérer un individu comme formant à lui seul une classe ; c'est à cela que sert le signe $\iota$ (²), qu'on peut lire *égal à*. La notation $\iota x$ désigne la classe qui comprend le seul individu $x$. On a par définition

$$\iota x = y \varepsilon (y = x),$$

signe $-$ devant sa copule. Les formules précédentes s'écrivent alors :

$$x \varepsilon - a . = . x - \varepsilon a,$$
$$- a . = . x \varepsilon (x - \varepsilon a).$$

Il faut bien remarquer que ces formules ne sont valables que si $x$ est un individu ; en d'autres termes, pour le signe $\varepsilon$, et non pour le signe $\supset$.

(¹) On définit une autre classe particulière, V, qui est la *négation* de $\Lambda$; comme concepts, V signifie *tout* et $\Lambda$ *rien;* comme propositions, V signifie *vrai* et $\Lambda$ *faux*.

(²) Initiale du mot ἴσος.

$\iota x$ *est l'ensemble des* $y$ *qui sont égaux à* $x$. En renversant cette relation, on trouve

$$y = x . = . y \varepsilon \iota x.$$

Ainsi le signe d'égalité logique $=$ se trouve décomposé en deux : $\varepsilon$ (*est un*) et $\iota$ (*égal à*).

Le symbole $\imath$, inverse du précédent, se définit comme suit :

$$x = \imath a . = . a = \iota x.$$

*La classe* $a$ *est « égal à* $x$ *», c'est-à-dire comprend le seul individu* $x$. *Inversement,* $x$ *est le seul individu de la classe* $a$ *;*

plus brièvement,

$x$ *est le* $a$.

Tel est le sens du nouveau symbole ; il transforme, au rebours, une classe en un individu ([1]).

Ce sont là les définitions fondamentales du Calcul logique. Voici maintenant les principes ou *propositions premières* sur

---

([1]) Voici un exemple qui expliquera ces notations :

*Tout nombre premier non égal à* 2 *est un nombre impair et s'écrit*

$$\mathrm{Np} - \iota 2 \supset 2\mathrm{N} - 1.$$

Cette formule devient, par des transformations de Calcul logique,

$$x \varepsilon \mathrm{Np} . x - = 2 . \supset . x \varepsilon 2\mathrm{N} + 1.$$

*Si* $x$ *est un nombre premier non égal à* 2, $x$ *est un nombre impair.*

$$x \varepsilon \mathrm{Np} . \supset . x \varepsilon 2\mathrm{N} + 1 . \cup . x = 2.$$

*Si* $x$ *est un nombre premier, il est impair ou égal à* 2,

$$\mathrm{Np} - (2\mathrm{N} + 1) \supset \iota 2,$$

*Tout nombre premier pair est égal à* 2,

$$2 = \imath \mathrm{Np} - (2\mathrm{N} + 1);$$

2 *est le seul nombre premier pair.*

lesquels il repose et qui en constituent les règles [1] :

*Principe d'identité :*

$$a \supset a.$$

*Principe du syllogisme :*

$$a \supset b . b \supset c . \supset . a \supset c.$$

*Principe de simplification :*

$$ab \supset a.$$

*Principe de composition :*

$$a \supset b . a \supset c . \supset . a \supset bc.$$

*Principe de contraposition :*

$$a \supset b . \supset . - b \supset - a,$$

d'où l'on déduit immédiatement cette autre forme

$$a \supset b . = . - b \supset - a.$$

*Principe de transposition :*

$$ab \supset c . \supset . a - c \supset - b.$$

*Principe de contradiction :*

$$a - a = \Lambda.$$

*Principe du milieu exclu :*

$$a \cup - a = \mathrm{V}.$$

*Principe de la double négation :*

$$- ( - a ) = a.$$

A ces principes [2] il faut joindre les *lois commutatives* et *associatives* de la multiplication et de l'addition ; les *lois distri-*

---

[1] Le lecteur pourra s'exercer à trouver pour chacune de ces formules son interprétation en concepts (classes) et son interprétation en propositions.

[2] Nous n'examinerons pas ici si certains de ces principes ne sont pas superflus, et ne pourraient pas se déduire des autres. (*Cf.* notre Article précité.)

*butives* de ces deux opérations l'une par rapport à l'autre [1] :

$$a(b \cup c) = ab \cup ac, \qquad a \cup bc = (a \cup c)(b \cup c),$$

enfin la *loi de tautologie :*

$$aa = a, \qquad a \cup a = a,$$

et la *loi d'absorption :*

$$a(a \cup b) = a, \qquad a \cup ab = a.$$

Il y a un dernier principe qui ne s'applique qu'aux propositions. Soient $a$, $b$, $c$ des propositions; on a l'équivalence [2]

$$a \supset . b \supset c . = . ab \supset c.$$

Quand on passe du premier membre au second, on *importe* l'hypothèse $a$ dans l'inférence $(b \supset c)$ dont elle est la condition; quand on passe du second membre au premier, on *exporte* l'hypothèse $a$ de l'inférence complexe $(ab \supset c)$. C'est ce qu'on peut appeler le *principe d'exportation et d'importation.*

Nous n'insisterons pas davantage sur le Calcul logique de M. Peano, qui occupe d'ailleurs relativement peu de place dans son *Formulaire* [3], et nous allons en étudier l'application aux Mathématiques. Il convient toutefois de remarquer que certaines théories mathématiques modernes (notamment la théorie des ensembles) ne sont que des branches du Calcul logique, et gagneraient à être exprimées par le symbolisme correspondant.

## II.

Le *Formulaire* comprend, outre la Logique : l'Arithmétique et la Théorie des nombres (deuxième Partie), la Théorie des fonctions analytiques (troisième Partie), la Théorie des nombres complexes (quatrième Partie) et la Théorie des vecteurs (cinquième Partie).

---

(1) Cela introduit dans le Calcul logique une symétrie et une réciprocité qui ne se trouvent pas dans le Calcul algébrique.

(2) Cette équivalence n'est valable que pour des propositions à sens constant, et par suite toujours vraies ou toujours fausses.

(3) Il serait intéressant de le comparer à l'*Algèbre de la Logique*, de M. Schröder, dont nous avons rendu compte ici (mars 1900).

Ces théories sont rangées suivant l'ordre dans lequel on introduit des concepts et par suite des symboles nouveaux, de sorte que chaque paragraphe est désigné par le symbole qui s'y trouve introduit. Par là, il est manifeste que les propositions antérieures sont indépendantes des suivantes, et que les propositions où figure un symbole dépendent uniquement de celles qui définissent ce symbole.

M. Peano distingue plusieurs espèces de définitions mathématiques : 1° les *définitions nominales,* qui consistent à égaler le nouveau symbole à définir à une formule composée de symboles déjà connus ou définis; 2° les *définitions par postulats,* qui consistent à définir un *système* de symboles nouveaux par un système de postulats qui établissent entre eux des relations formelles; 3° les *définitions par abstraction,* qui consistent à dire dans quels cas telle idée abstraite sera considérée comme égale ou plutôt identique à elle-même. Cette dernière forme de définitions est fréquente en Mathématiques pures ou appliquées : souvent on ne définit pas telle espèce de grandeurs, mais simplement l'égalité de deux grandeurs de cette espèce (1) (*exemples :* direction de, longueur de, aire de, masse de, température de, etc.).

Le fait que telle idée est ou n'est pas définissable nominalement dépend essentiellement de l'ordre dans lequel on range les idées pour les introduire successivement (2). Quand une idée n'est pas définissable nominalement, on l'appelle *idée primitive,* et on la définit par postulats ou par abstraction.

Une théorie déductive quelconque repose donc sur un système d'idées primitives et sur un système de propositions premières (postulats). Et comme ces idées primitives ne sont définies que par ces propositions premières, c'est-à-dire par des relations formelles, leur sens est indifférent; on peut donc les considérer comme des symboles non définis, et regarder les propositions premières comme des conventions arbitraires. Seulement, lorsqu'on voudra appliquer une telle théorie à des objets *réels*, il

(1) *Voir* Burali-Forti, *Sur l'égalité et sur l'introduction des éléments dérivés dans la Science,* dans *L'Enseignement mathématique,* 1re année.

(2) *Voir* les Mémoires de MM. Peano et Burali-Forti dans la *Bibliothèque du Congrès international de Philosophie,* t. III, et Burali-Forti, *Logica matematica.* Milan, Hoepli, 1894.

faudra donner aux symboles non définis un sens tel qu'ils vérifient les propositions premières. Une même théorie déductive formelle peut d'ailleurs recevoir plusieurs interprétations différentes; on en a des exemples en Géométrie (principe de dualité) et en Physique.

M. Padoa a formulé avec rigueur les conditions auxquelles un système de propositions premières est *irréductible*, et auxquelles un système de symboles non définis est *irréductible* par rapport à un système de propositions premières donné :

*Pour qu'un système de propositions premières soit irréductible, il faut et il suffit qu'on puisse trouver, pour chacune d'elles, une interprétation des symboles non définis qui ne la vérifie pas, tout en vérifiant toutes les autres. Pour qu'un système de symboles non définis soit irréductible par rapport au système des propositions premières, il faut et il suffit qu'on puisse trouver, pour chacun de ces symboles, une interprétation du système des symboles non définis qui vérifie le système des propositions premières, et qui continue à le vérifier si l'on change convenablement le sens du seul symbole considéré* (1).

Toute l'Arithmétique repose sur trois idées primitives : *nombre entier* (positif ou nul), *zéro* et le *suivant* d'un nombre entier, représentées respectivement par les symboles non définis

$$N_0, \quad 0, \quad a+,$$

et sur cinq propositions primitives qui sont :

1° *Zéro est un nombre :*

$$0 \varepsilon N_0 ;$$

2° *Le suivant d'un nombre est un nombre :*

$$a \varepsilon N_0 . \supset . a+ \varepsilon N_0 ;$$

3° *Si, s étant une classe, 0 appartient à cette classe, et si,*

(1) *Voir* le Mémoire de M. Padoa dans la *Bibliothèque du Congrès international de Philosophie*, t. III. Paris, A. Colin; 1901.

*toutes les fois qu'un nombre appartient à cette classe, son suivant lui appartient aussi, tous les nombres appartiennent à cette classe.* C'est le *principe de l'induction complète :*

$$s \varepsilon \mathrm{Cls}.0 \varepsilon s : x \varepsilon s . \supset_x . x + \varepsilon s : \supset . \mathrm{N}_0 \supset s;$$

4° *Deux nombres suivis du même nombre sont égaux :*

$$a + 1 = b + 1 . \supset . a = b;$$

5° *Le suivant d'un nombre quelconque n'est jamais* 0 :

$$a \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . a + 1 - = 0.$$

On peut prouver l'indépendance absolue de ces cinq propositions primitives, et l'irréductibilité du système des idées primitives par rapport à ce système de propositions. Celui-ci suffit pour démontrer toutes les propriétés des nombres entiers (c'est-à-dire de l'ensemble $\mathrm{N}_0$); mais il y a une infinité d'ensembles différents qui vérifient ce système de propositions : par exemple, elles sont encore vérifiées, ainsi que toutes leurs conséquences, si l'on remplace 0 par 1 et $\mathrm{N}_0$ par $\mathrm{N}_1$ (ensemble des nombres entiers positifs *non nuls*).

L'idée de nombre entier se trouve ainsi définie par *postulats*. M. Burali-Forti en a donné une définition *nominale* fondée sur l'idée de *grandeur homogène* (¹). Enfin il y a aussi une définition de l'idée de nombre *par abstraction,* qui se formule comme suit :

$$a, b \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset : \mathrm{Num}\, a = \mathrm{Num}\, b . = . \exists (b \mathrm{f} a) \mathrm{rcp},$$

c'est-à-dire

*a et b étant des classes (ensembles), on dit que leurs nombres (cardinaux) sont égaux, s'il existe entre elles une correspondance univoque et réciproque.*

Cette définition est, comme on sait, la seule applicable aux nombres infinis (ou *puissances*). Comme le remarque M. Peano, elle pourrait servir de base à toute l'Arithmétique. Elle nous

(¹) *Voir* son Mémoire déjà cité, et son Opuscule : *Les propriétés formales des opérations algébriques* (*Revue de Mathématiques,* t. VI, p. 141-177).

paraît préférable à l'autre, non seulement en raison de sa généralité, mais aussi parce qu'elle répond mieux à l'idée habituelle du *nombre cardinal,* et surtout parce qu'elle est indépendante de l'idée d'ordre, qui intervient sans raison dans l'autre (par la notion du *suivant* d'un nombre). Il nous semble, notamment, que dans l'idée de *somme* (+) il y a celle de l'*addition* de deux nombres cardinaux, de deux collections d'unités réunies en une seule, et non pas celle d'une *énumération* successive des nombres eux-mêmes rangés dans la série naturelle.

Les nombres entiers négatifs sont définis à propos de la soustraction, et les nombres rationnels à propos de la division, comme symboles opératoires. — $a$ est un symbole d'opération qui, appliqué à un nombre supérieur à $a$, donne un nombre. La fraction $b/a$ est le symbole de l'opération complexe ($\times\, b/a$) (¹). Bien que cette marche soit logiquement irréprochable, nous continuons à préférer la méthode indiquée par M. J. Tannery, surtout pour les nombres *négatifs;* car il y a un intérêt (même pédagogique) à prévenir toute confusion entre le signe d'opération — qui unit *deux* nombres pour en former un troisième, et le signe qualificatif —, qui caractérise le nombre négatif *isolé,* ou qui, appliqué à *un* nombre, le transforme en son symétrique (²).

Les nombres irrationnels sont définis au moyen de la notion de *limite supérieure,* qui est elle-même définie *par abstraction :* c'est-à-dire que, étant donnés deux ensembles de nombres $u$ et $v$, on définit les trois relations

$$\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v, \qquad \mathrm{l}'u > \mathrm{l}'v, \qquad \mathrm{l}'u < \mathrm{l}'v,$$

entre leurs limites supérieures. Cela posé, on définit les nombres réels comme limites supérieures (ou inférieures) d'ensembles de nombres rationnels (³).

La théorie des limites est traitée avec beaucoup de soin, et les divers sens du mot *limite* sont définis avec précision. Étant

(¹) Conformément aux idées bien connues de M. Méray.

(²) *Cf.* Padé, *Premières Leçons d'Algèbre élémentaire*, et Padoa, *Mémoire cité,* fin.

(³) Cf. *Revue de Mathématiques*, t. VI, p. 126-140, où sont exposées et discutées les diverses méthodes employées pour définir les nombres irrationnels.

donnée une classe $u$ de nombres réels, la *classe-limite* $\lambda u$ est l'ensemble des nombres $x$ tels que la limite inférieure des modules des différences entre $x$ et les nombres de la classe $u$ soit nulle.

L'*ensemble dérivé* $\delta u$ est l'ensemble des nombres tels que la limite inférieure des modules des différences entre $x$ et les nombres $u$ *non égaux à* $x$ soit nulle.

La *limite généralisée* $\Lambda u$ est la classe-limite $\lambda u$ augmentée de $+\infty$ ou de $-\infty$, lorsqu'ils sont la limite supérieure ou inférieure des $u$.

Étant donnée une suite infinie $x$ (fonction du nombre entier $n$), considérons l'ensemble des valeurs de $x$ à partir d'un certain indice $m$, et formons sa limite généralisée $\Lambda_m$. Si un nombre $a$ appartient toujours à cette classe, quel que soit le nombre $m$, il fait partie de la classe-limite $\mathrm{Lm}\,x$.

Cette notion est empruntée à Cauchy, qui considérait, par exemple, $\lim\left(\sin\frac{1}{x}\right)$ comme susceptible de toutes les valeurs réelles comprises entre $-1$ et $+1$ [1].

Enfin l'on définit la *valeur-limite* comme suit

$$\lim x = \iota\,\mathrm{Lm}\,x,$$

c'est-à-dire

*Si la* CLASSE-LIMITE *d'une suite se réduit à un seul nombre, ce nombre est la valeur-limite de* $x$ ($\lim x$).

D'après cette définition, $\lim x$ peut être, ou un nombre réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

Sur ces définitions reposent, comme on sait, toute la théorie des suites, séries et produits infinis, celle des fonctions exponentielle et logarithmique, avec la définition des nombres $e$ et C; enfin celle des fonctions continues, des dérivées et des intégrales indéfinies et définies.

Vient ensuite la théorie des nombres complexes à $n$ unités. On définit le nombre complexe (ensemble ordonné de $n$ nombres réels), la somme de deux nombres complexes, le *zéro* com-

---

[1] *Cf.* PEANO, *Sur la définition de la limite d'une fonction* (*American Journal of Mathematics*, 1894).

plexe (o, o, ..., o), le symétrique $(-x)$ d'un nombre complexe $(x)$, enfin le produit d'un nombre complexe par un nombre réel.

A cette théorie sont rattachées celle des déterminants ([1]) et celle des substitutions linéaires. (Les uns et les autres sont représentés par leurs matrices, c'est-à-dire par l'ensemble de $n^2$ nombres réels.) Une substitution est un complexe d'ordre $n$ fonction linéaire d'un complexe d'ordre $n$; et une fonction est linéaire, si la fonction d'une somme est la somme des fonctions des éléments, ou si

$$f(x+y) = fx + fy.$$

La théorie des substitutions sert de base à la théorie des nombres imaginaires. L'unité imaginaire $i$ est définie comme la substitution représentée par la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Les nombres imaginaires $(x+iy)$ se présentent alors comme des *substitutions* des nombres complexes d'ordre 2; ils ne doivent pas être confondus avec ceux-ci : on multiplie les substitutions, et non les nombres complexes. Un nombre imaginaire correspond à un couple de nombres réels, mais ne coïncide pas avec lui. M. Peano évite par là d'introduire les imaginaires par des conventions arbitraires, ou, qui pis est, de les présenter comme solutions *impossibles* des équations algébriques, méthode logiquement vicieuse contre laquelle Gauss protestait déjà ([2]). Cette conception des imaginaires est surtout commode pour leur interprétation et leur application géométriques ([3]).

On sait comment l'introduction des imaginaires permet d'achever et de généraliser l'Algèbre et l'Analyse, de définir analytiquement les fonctions trigonométriques, le nombre $\pi$ et les nombres de Bernoulli.

---

([1]) Que M. Peano fait avec raison remonter à Leibniz (1678). *Voir* LEIBNIZ, *Mathematische Schriften*, t. VII, p. 5.

([2]) *Œuvres*, t. III, p. 6; 1799.

([3]) Géométriquement, un nombre imaginaire est une *similitude* : multiplier une figure par un nombre imaginaire, c'est la transformer en une figure semblable.

Toutes les théories qui précèdent appartiennent à l'Analyse pure. Mais le *Formulaire* va plus loin, et entreprend de réduire la Géométrie en formules. Des travaux récents ont montré qu'on peut réduire les idées primitives de la Géométrie à trois : le *point*, le *segment* et la *congruence* (ou le *mouvement*) et même à deux (en définissant le *segment*) ([1]). On obtient ainsi divers systèmes *hypothético-déductifs* qui correspondent à la Géométrie projective et à la Géométrie métrique. Dans le *Formulaire*, on a adopté l'Analyse des vecteurs, qui conduit à un Calcul géométrique analogue à celui de Grassmann ([2]).

Les idées primitives de ce Calcul sont celles de *point* et de *vecteur*. Celle-ci est définie formellement comme différence de deux points $(a - b)$, mais elle n'est définie réellement que par abstraction, au moyen de la *relation primitive*

$$a - b = c - d,$$

qui constitue l'égalité de deux vecteurs.

Elle est caractérisée par les propositions primitives suivantes

$$a - b = a - b,$$
$$a - b = c - d . \supset . c - d = a - b,$$
$$a - b = c - d . c - d = e - f . \supset . a - b = e - f,$$
$$a - b = c - d . \supset . a - c = b - d,$$
$$a - c = b - c . \supset . a = b,$$

auxquelles il faut encore joindre celle-ci

$$\exists \text{ pnt} \frown x \ni (x - a = b - c).$$

*Il existe un point $x$ tel que $x - a = b - c$.*

Ce sont là autant de règles de calcul qui rendent les *équidiffé-*

---

([1]) *Voir* les Mémoires de M. Pieri sur la *Géométrie de position* (*Revue de Mathématiques*, 1897), sur la *Géométrie ordinaire* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin*, 1897 et 1899) et sur la *Géométrie envisagée comme un système purement logique* (*Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. III).

([2]) Sur l'avantage de l'Analyse des vecteurs, comparée au Calcul des quaternions, *voir* le Mémoire de M. Macfarlane sur les *Idées et principes du Calcul géométrique* (*Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. III). On sait que M. Macfarlane est le Secrétaire général de l'*International Association for promoving the Study of Quaternions and allied Systems*.

*rences* géométriques analogues aux *équidifférences* numériques (algébriques).

On définit le vecteur o comme la valeur constante du vecteur $(a - a)$, quel que soit le point $a$. On en déduit que

$$a = b . = . a - b = 0.$$

On définit ensuite le symétrique $(-u)$ d'un vecteur $(u)$; puis le produit d'un vecteur par un nombre réel, qui est un autre vecteur; enfin le *produit intérieur* de deux vecteurs, qui est un nombre réel. Interprété mécaniquement, ce produit $(u \times v)$ est égal au travail d'une force représentée par le vecteur $u$ quand son point d'application se déplace suivant le vecteur $v$. Cette multiplication est commutative et distributive. Elle donne lieu, par exemple, à des identités comme les suivantes, qui expriment des théorèmes de Géométrie :

$$(u + v)^2 + (u - v)^2 = 2(u^2 + v^2),$$

*Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés;*

$$(u + v + w)^2 + (u + v - w)^2 + (u + w - v)^2 + (v + w - u)^2 \\ = 4(u^2 + v^2 + w^2),$$

*Dans un parallélépipède, la somme des carrés des quatre diagonales est égale à la somme des carrés des douze arêtes.*

Comme on le voit par ces exemples, la multiplication des vecteurs introduit en Géométrie l'élément *métrique*. Il suffit de joindre aux principes généraux l'axiome ou postulat des trois dimensions pour retrouver toute la Géométrie ordinaire. On peut définir la droite, le plan et les autres figures élémentaires; puis les procédés de transformation appelés *translation*, *symétrie*, *homothétie* et *rotation*. Une rotation (un *verseur*) est une substitution qui, à deux vecteurs-unités perpendiculaires $a$ et $b$, fait correspondre les vecteurs $b$ et $-a$. On voit aussitôt l'analogie d'un verseur avec l'unité imaginaire $i$, et le lien entre ce Calcul géométrique et le Calcul des quaternions.

On peut encore définir dans ce Calcul la tangente à une courbe en un point, puis le point osculateur, la normale principale et la

courbure, enfin la longueur d'un arc de courbe. En général, un point mobile, fonction du temps, a des dérivées successives qui sont des vecteurs : sa dérivée première est sa *vitesse*, sa dérivée seconde est son *accélération*. Dès lors on peut définir tous les concepts de la Mécanique par des formules du Calcul géométrique. On voit par là quel vaste champ d'applications s'ouvre au Calcul géométrique et plus généralement à la Logique mathématique ([1]).

Tel est, en raccourci, le contenu de cet Ouvrage. Ce contenu suffirait, à lui seul, à le rendre utile et précieux : car il résume en deux cents pages des théories qui remplissent des Traités entiers et de gros Manuels. Grâce à la notation symbolique, chaque théorème est écrit en une ligne, deux au plus, et il est formulé *en entier,* avec toutes les conditions qui limitent son domaine de validité, ce qui, comme on sait, est extrêmement important, et ce qu'on est souvent tenté d'oublier. Cela tient à ce que les formules algébriques des théorèmes ne constituent presque toujours qu'une *partie* de la proposition (la *thèse*), dont le reste (les *hypothèses*) est énoncé plus ou moins explicitement en langage ordinaire ([2]). Au contraire, les formules de M. Peano sont *complètes,* et chacune d'elles détermine exactement le sens et la portée du théorème correspondant. Le *Formulaire* peut donc servir de manuel ou de répertoire. Il est en outre extrêmement instructif par les renseignements historiques et bibliographiques, souvent rares et curieux, contenus dans les notes : par exemple, sur la numération (§ 33), sur les nombres $e$ (§ 76) et $\pi$ (§ 84), etc. Pour chaque proposition, on a indiqué l'inventeur ou le premier auteur, avec la référence et souvent même la citation du texte original; de sorte que c'est aussi un memento d'histoire des Mathématiques.

Mais ce n'est là que le moindre intérêt de cet Ouvrage, et l'on restreindrait injustement la valeur du symbolisme de M. Peano si l'on n'y voyait qu'une sorte de sténographie. C'est aussi et sur-

---

([1]) *Voir* C. Burali-Forti, *Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de Grassmann.* Gauthier-Villars, 1897. — H. Fehr, *Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la Géométrie infinitésimale.* Carré et Naud, 1899.

([2]) En particulier, le sens des lettres qui figurent dans la formule.

tout un instrument d'analyse logique, de déduction et de vérification. D'abord, en n'employant que des symboles d'un sens fixe et bien défini, on évite toutes les équivoques du langage, ainsi que les implications tacites ou fausses auxquelles donnent lieu les associations habituelles d'idées et de mots. De plus, et par suite, on assure la rigueur des raisonnements en les réduisant à des opérations et transformations algébriques, quasi mécaniques, effectuées suivant certaines règles invariables et purement formelles. Par là, on est certain de n'introduire dans les concepts aucun élément étranger à leur définition, et dans les déductions aucune pétition de principe, aucun postulat subreptice. Enfin, on sait exactement de quelles propositions dépend la démonstration (et partant la vérité formelle) de tel théorème, et, en dernière analyse, de quelles propositions premières assumées à titre d'hypothèses. On aboutit ainsi à faire le dénombrement exact et complet, d'une part, des concepts primitifs et indéfinissables; d'autre part, des propositions premières, indémontrables. Ainsi s'accomplit, grâce à ce symbolisme formel, la reconstruction et la refonte logique du système des vérités mathématiques.

On voit quelle est l'importance philosophique d'un tel Travail. On ne peut mieux l'apprécier qu'en constatant qu'il réalise, dans le domaine spécial des Mathématiques, le double projet que Leibniz a rêvé toute sa vie d'exécuter, à savoir : la constitution d'une *Caractéristique universelle,* d'une sorte d'Algèbre logique, qui eût permis de remplacer tous les raisonnements par des calculs; et l'élaboration d'une *Encyclopédie démonstrative,* où toutes les vérités connues eussent été rangées dans l'ordre de leur enchaînement déductif, précisément grâce à l'instrument logique fourni par la Caractéristique. C'est d'ailleurs la meilleure, sinon la seule forme à donner à une Encyclopédie, si l'on veut qu'elle ait une autre valeur que celle d'un memento de baccalauréat. Il faut donc souhaiter que M. Peano et ses dévoués collaborateurs puissent continuer et achever leur œuvre gigantesque, et qu'ils trouvent chez leurs collègues de tous pays le concours nécessaire pour la perfectionner encore et la mener à bonne fin.

L. Couturat.

BURILÉANU (N.), Lieutenant dans l'Artillerie royale roumaine. — MÉTHODE DE BALISTIQUE EXTÉRIEURE. (Thèse de Doctorat.) In-8° de 51 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

M. Buriléanu s'est proposé dans ce Travail de donner, aux formules des problèmes de Balistique, une forme nouvelle, en suivant une marche différente de celle qui a été suivie jusqu'ici par divers auteurs, notamment par le colonel italien Siacci. Il a tout d'abord cherché à résoudre par les mêmes moyens les deux problèmes du mouvement des projectiles sphériques et des projectiles ogivaux. Pour cela il détermine analytiquement les valeurs de la résistance de l'air et ramène son expression assez compliquée à un polynome composé de deux termes pour le cas des vitesses inférieures à $300^m$ et de trois termes pour les vitesses supérieures allant jusqu'à $1000^m$; l'auteur arrive dans ces conditions, par de simples quadratures, à une expression analytique de la résistance. Les valeurs correspondantes des autres fonctions balistiques s'en déduisent, et l'on peut dresser des Tables à l'aide desquelles le problème du mouvement des projectiles sphériques se résoudra par les mêmes formules que celui du mouvement des projectiles ogivaux.

En ce qui concerne la loi de la vitesse, il a essayé de la déduire de la formule connue relativement à l'écoulement adiabatique des gaz. Le résultat, grâce à une approximation, ne diffère pas, du reste, de celui qui est habituellement pris comme point de départ. D'ailleurs dans ces questions de Balistique, les approximations sont incessantes. Elles ne se trouvent justifiées qu'après coup par l'expérience.

Comme application numérique, M. Buriléanu calcule les éléments des points de chute correspondant à deux trajectoires différentes décrites par l'obus roumain de $87^{mm}$ de campagne.

E. E.

ANDRÉ (Ch.). — Traité d'Astronomie stellaire. Tome I : Étoiles simples, 1899; Tome II : Étoiles doubles et multiples. Amas stellaires, 1900. Paris, Gauthier-Villars.

Ce livre vient combler une véritable lacune : c'est le premier exposé systématique des travaux effectués, depuis William Herschel, sur le nombre, la distribution, les distances, les dimensions, les masses et les mouvements réels de ces soleils si désespérément éloignés que nous appelons les *étoiles*. Une telle coordination, que nul ne pouvait faire avec plus d'autorité que M. Ch. André, était d'autant plus nécessaire qu'on s'habitue un peu trop à regarder les étoiles comme appartenant désormais exclusivement aux astrophysiciens, photographes et spectroscopistes. M. André nous exposera les méthodes et les résultats de la Physique stellaire dans son troisième Volume, mais les deux premiers, seuls parus, sont consacrés aux méthodes purement astronomiques d'observation et de calcul.

La simple statistique fournit des renseignements précieux : ce sont les célèbres jaugeages de W. Herschel qui l'ont conduit à créer ce qu'on pourrait appeler l'*Astronomie galactocentrique*, à démontrer en particulier que notre Soleil et toutes les étoiles visibles à l'œil nu sont profondément plongés à l'intérieur de la Voie lactée, dont ils forment vraisemblablement un petit amas local. Les calculs de moyennes, par exemple la détermination de la parallaxe moyenne ou du mouvement propre moyen des étoiles d'une certaine classe de grandeur, la comparaison des relations qu'on peut établir entre ces moyennes expérimentales et de celles qui résulteraient de diverses hypothèses simples, peuvent seuls, dans l'état actuel de nos connaissances, nous donner une idée approchée de la distribution des vingt ou trente millions d'étoiles composant cet immense amas. La Dynamique interstellaire, qui permettra de coordonner leurs mouvements propres, est encore à peu près inabordable. En revanche, l'étude des mouvements des systèmes stellaires newtoniens doubles et multiples, découverts par W. Herschel, a déjà offert aux mathématiciens une très grande variété de problèmes intéressants, exigeant des méthodes nouvelles : tout le

deuxième Volume, qui leur est consacré, constitue une des parties les plus originales de la Mécanique céleste.

Les premiers Chapitres, que nous nous bornerons à mentionner ici, traitent de la théorie de la diffraction dans les lunettes, de l'historique des catalogues stellaires; les suivants sont consacrés à l'évaluation directe des grandeurs stellaires : les mesures d'éclats par la Photométrie et la Photographie ne seront décrites que dans le troisième Volume. Il est vrai que la méthode d'estime directe, dont W. Herschel a, le premier, indiqué les principes, peut atteindre une précision tout à fait remarquable, supérieure même à celle des photomètres ([1]). Cependant, il y a peut-être un inconvénient à suivre l'ordre historique, en ce qui concerne l'échelle normale des grandeurs : les écarts entre les échelles de Lalande, de Bessel, de W. Struve et d'Argelander sont tels qu'il faut des Tables de concordance entre les divers catalogues. Bien que la concordance actuelle soit presque parfaite, en particulier entre les plus importants catalogues modernes, ceux d'Argelander et Schönfeld, d'une part, ceux de Thome d'autre part, pour lesquels les écarts systématiques ne dépassent pas $0^{gr},1$, il y aurait intérêt à regarder la grandeur comme définie théoriquement par la formule de Pogson : la classe de grandeur $g$ varie comme le logarithme de l'éclat photométrique E,

$$g' - g = \frac{1}{\log \rho}(\log E - \log E').$$

Pratiquement, l'échelle arbitraire d'Argelander, universellement adoptée par les astronomes, coïncide avec l'échelle logarithmique photométrique; on est bien obligé d'ailleurs, pour les étoiles des premières grandeurs, d'employer exclusivement la définition photométrique : pourquoi ne pas généraliser? L'échelle des grandeurs est basée sur la loi physiologique de Fechner : la sensation lumineuse a sa différentielle proportionnelle au rapport de la différen-

---

([1]) On peut citer comme un véritable chef-d'œuvre, dans cet ordre d'idées, la statistique du ciel austral (1879) effectuée à Cordoba par B.-A. Gould, avec l'aide de quatre jeunes Américains, dont l'un, J.-M. Thome, est maintenant directeur du même observatoire de Cordoba. La concordance parfaite montre qu'un très court apprentissage permet d'évaluer avec certitude le dixième de grandeur.

tielle de l'éclat à l'éclat lui-même. Mais, en fait, on a surtout voulu conserver, à tout prix, pour les étoiles visibles à l'œil nu, les six classes vénérables de l'*Almageste* de Ptolémée, si bien qu'on arrive, dans l'échelle normale actuelle, à cette notation incommode d'attribuer la grandeur —1,50 à Sirius, la grandeur 0 à Wega. Une échelle d'éclats photométriques semblerait préférable, car elle n'exigerait qu'une seule constante arbitraire : l'unité d'éclat. Il semble d'ailleurs difficile d'augmenter la précision des mesures photographiques, par suite des difficultés que présente la comparaison des étoiles diversement colorées : la définition des intensités photométriques en soulève encore davantage.

Les idées de W. Herschel, en ce qui concerne la distribution réelle des étoiles, l'étendue et la forme de notre nébuleuse galactique, ont été précisées et confirmées surtout par W. Struve (1827-1847). Sa loi célèbre de condensation stellaire décroissante à mesure que la distance au plan galactique moyen va en croissant, rend suffisamment compte de la distribution apparente déduite des jaugeages de Herschel : la densité stellaire apparente, par unité d'angle solide, décroît régulièrement quand la latitude galactique va en croissant. Cette hypothèse de Struve l'a conduit à une échelle des distances moyennes des étoiles des diverses classes de grandeur, où la distance croît sensiblement dans le rapport de $\sqrt{2}$, en passant d'une classe à la suivante.

L'hypothèse d'une densité stellaire uniforme dans toutes les régions de la nébuleuse galactique et de l'éclat moyen uniforme de toutes les étoiles a conduit C. von Littrow (1869) à une notion approchée des dimensions de l'univers stellaire probablement moins exacte que celle de Struve. Cependant la statistique des étoiles de diverses grandeurs, jusqu'à la 10$^{e}$ grandeur tout au moins, montre que le nombre des étoiles croît sensiblement en progression géométrique, quand la classe croît en progression arithmétique [1].

A signaler une certaine bizarrerie dans l'ordre adopté par

---

[1] La raison est très voisine de 4. Par exemple, la limite de visibilité de l'œil nu variant de la grandeur 6,5 à la grandeur 7,0, le nombre total d'étoiles visibles à l'œil nu passe de 7000 à 14000, en chiffres ronds, suivant la limite adoptée; il est doublé par chaque demi-classe de grandeur ajoutée.

M. André : l'hypothèse de Littrow (1869) est développée la première, puis celle de W. Struve (1847); enfin vient l'exposé des travaux de W. Herschel (1802-17) et de ses conclusions relatives à la Voie lactée. Un tel ordre est assurément le plus bel hommage qu'on puisse rendre au fondateur de l'Astronomie stellaire, mais peut-être l'ordre historique eût-il présenté quelques avantages : les successeurs de Herschel disposaient nécessairement de plus de données expérimentales que lui.

Les Chapitres suivants nous font entrer dans le domaine de l'Astronomie de position la plus minutieuse ; ils traitent de la détermination du mouvement propre du Soleil, des mouvements propres et des parallaxes stellaires. La mesure de ces déplacements angulaires si faibles (toutes les parallaxes annuelles et presque tous les mouvements propres annuels sont inférieurs à une seconde) n'a été rendue possible que par l'extrême perfectionnement des instruments modernes de position et des méthodes chronographiques. Les meilleurs observateurs du XVII^e^ et du XVIII^e^ siècle avaient été impuissants à trouver la moindre parallaxe : nous en connaissons avec certitude une cinquantaine à quelques centièmes de seconde près. Les méthodes différentielles micrométriques, indiquées pour la première fois par W. Herschel, ont seules pu triompher des difficultés accumulées ; les grandeurs à mesurer sont du même ordre que les nombreuses corrections de réfraction, de nutation, de précession et d'aberration que doivent d'abord subir les observations, et ne se dégagent que comme des erreurs résiduelles ([1]). On peut citer par exemple les déterminations méridiennes absolues de parallaxes dues à C.-F. Peters (1848) comme une des plus belles applications du calcul des erreurs résiduelles. Les méthodes photographiques, dont M. André ne parle pas ici, conformément au plan qu'il a adopté, semblent maintenant les plus précises : les

---

([1]) Une réduction à l'échelle $10^{-12}$ montrera bien ce que sont ces mesures angulaires pour l'astronome : la distance de l'étoile la plus voisine (α *Centaure*) devient $45^{km}$, la distance moyenne des étoiles de 1^re^ grandeur, $150^{km}$; nous devons, en nous bornant aux étoiles les plus voisines, imaginer qu'un géodésien, disposant seulement d'une base de $30^{cm}$, est chargé de dresser la Carte d'Europe, sans pouvoir quitter sa base. D'autre part, une vitesse absolue de $30^{km}$ par seconde, moyenne des vitesses réelles des étoiles de 1^re^ grandeur, devient, à cette échelle, une vitesse de $0^{c},26$ par jour; comme l'observateur est placé à $150^{km}$, on conçoit que l'aspect des constellations n'ait guère changé depuis Hipparque.

mesures de parallaxes de M. Pritchard à Oxford en sont un bel exemple. De même la Carte photographique internationale du Ciel rendra d'inappréciables services dans les recherches ultérieures sur les mouvements propres.

Nos connaissances actuelles sur les mouvements propres sont dues surtout à W. Struve (1852), H. Mädler (1857) et Argelander (1869). Il semble résulter de leur statistique que le mouvement propre moyen des étoiles de chaque classe de grandeur varie en raison inverse de leur distance moyenne, ce qui indiquerait une vitesse absolue identique en moyenne dans toutes les régions de notre amas stellaire. Et même, comme les éclats intrinsèques individuels des étoiles sont en réalité extrêmement différents, la grandeur du mouvement propre d'une étoile particulière serait, pour l'évaluation de sa distance probable, une indication beaucoup plus sûre que sa grandeur stellaire.

Dans l'hypothèse de la distribution moyenne isotrope des vitesses, la vitesse radiale moyenne de toutes les étoiles d'une même classe, déduite des mesures spectroscopiques par la méthode Doppler-Fizeau, devrait être égale à la moyenne des vitesses transversales absolues des mêmes étoiles, calculée d'après les valeurs de leurs mouvements propres apparents et de leurs parallaxes. On constate qu'il en est ainsi sensiblement, et J. Kleiber a déduit de cette relation une méthode indirecte pour calculer la parallaxe moyenne probable d'une classe déterminée d'étoiles. Nous avons cité cet exemple pour montrer le genre de renseignements que le calcul des moyennes permet de déduire des données de la statistique.

Quant au mouvement propre du Soleil, si sa direction est à peu près bien déterminée, il n'en est pas de même de sa vitesse, malgré d'innombrables travaux. Toutes les méthodes de détermination des coordonnées de l'*apex*, dont les plus célèbres sont dues à W. Herschel (1806), Bessel (1818), Argelander (1838) et Airy (1860), reposent sur l'hypothèse de la distribution isotrope des vitesses réelles et donnent la vitesse solaire comme résidu de leur distribution apparente anisotrope. On a d'ailleurs discuté longuement l'hypothèse contraire, où les longitudes galactocentriques varieraient systématiquement du fait du mouvement orbital des étoiles. Cette question est loin d'être résolue.

On s'attendrait à trouver exposée à la suite la seule tentative de Dynamique stellaire qui ait été faite pour coordonner les mouvements propres des étoiles : celle de Mädler (1846-1858). M. André l'a rejetée à la fin du deuxième Volume et en adopte les conclusions. En partant d'hypothèses simples, malheureusement trop simples, telles que l'uniformité de densité stellaire et l'identité des masses individuelles, Mädler détermine le centre dynamique de l'amas central de notre Voie lactée, amas qu'il suppose sphérique entouré d'anneaux ayant même centre de gravité; une suite de raisonnements un peu aventureux le conduit à placer ce centre dans les Pléiades et spécialement près d'*Alcyone,* ce qui semble d'une précision au moins exagérée. Cependant il est intéressant de constater que la distribution apparente des mouvements propres, dans des zones successives ayant *Alcyone* comme pôle, semble confirmer cette hypothèse.

M. André, évaluant par un procédé ingénieux, mais bien indirect, la distance des Pléiades à 192 années de lumière et adoptant pour la vitesse du Soleil la valeur de $16^{km}$ par seconde, déduite par Kempf de la répartition apparente anisotrope des vitesses radiales stellaires, calcule la période du mouvement orbital du Soleil, autour d'*Alcyone :* il trouve 22 000 000 d'années. Enfin, la troisième loi de Kepler donnerait, pour la masse totale intérieure à la sphère ayant *Alcyone* pour centre et passant par le Soleil, une valeur égale à 3 000 000 de fois la masse solaire, nombre bien supérieur à celui des étoiles que nous pouvons y admettre; comme nous savons, d'autre part, que les masses individuelles stellaires diffèrent peu de celle du Soleil, on en conclurait qu'il existe un nombre considérable d'étoiles massives éteintes. Ce résultat est intéressant, mais il repose sur des données numériques bien incertaines.

Les derniers Chapitres du premier Volume contiennent les données les plus complètes sur les variations d'éclat des étoiles. On y trouvera les courbes de lumière des variables périodiques ou irrégulières, et aussi l'histoire détaillée des temporaires (au point de vue photométrique seulement, car l'histoire spectroscopique des temporaires, si intéressante, est encore réservée pour le troisième Volume). Les variables à périodicité régulière, au moins celles à courte période, sont en réalité des systèmes binaires à

éclipses partielles, que nous allons retrouver dans le deuxième Volume, entièrement consacré aux systèmes doubles et multiples.

Le nombre des systèmes binaires télescopiques aujourd'hui catalogués est considérable : il atteignait près de 14000 en 1898, en prenant 32″ comme limite supérieure de l'écart angulaire. La découverte du mouvement relatif orbital des systèmes binaires est encore l'œuvre de W. Herschel. Pour la première fois, la loi de Newton a pu être étendue à tout l'univers stellaire. Cette découverte géniale a livré à la Mécanique céleste un nombre considérable de systèmes pratiquement isolés au point de vue de la gravitation, car les distances qui séparent leurs composantes sont rarement supérieures aux dimensions des orbites des planètes les plus éloignées de notre système solaire; elles sont donc d'un ordre de grandeur $10^5$ fois moindre que les distances séparant les mondes stellaires les uns des autres.

La petitesse de l'écart angulaire des deux composantes, qui n'est, le plus souvent, que de quelques secondes, rend particulièrement minutieuses les mesures différentielles servant à déterminer les orbites apparentes. De plus, les périodes sont très longues : parmi les orbites dont les éléments ont été calculés avec précision, beaucoup ne sont pas encore fermées depuis les premières observations de W. Herschel (1782) : on est donc obligé d'utiliser des mesures effectuées à de très longs intervalles, et les corrections d'aberration, et surtout de précession et de nutation, prennent, ici encore, une importance énorme. On commence par substituer aux positions observées, la meilleure ellipse possible passant dans leur voisinage. Cette interpolation s'effectue par des procédés bien connus, soit graphiques (J. Herschel), soit analytiques (Glasenapp). Un grand nombre de méthodes permettent de passer de cette orbite apparente interpolée à l'orbite réelle : on connaît, en effet, la projection de son foyer. Les cinq éléments géométriques à déterminer sont l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan tangent à la sphère céleste, l'angle de position de la droite d'intersection des deux plans, l'angle de position de la ligne des nœuds dans le plan de l'orbite, l'excentricité et la longueur du grand axe. M. André expose tout au long les méthodes graphiques de J. Herschel et de Zwiers (1895) qui sont du domaine

de la Géométrie descriptive élémentaire, et la solution analytique de Kowalsky (1873), l'une des plus employées. Quant aux éléments cinématiques, moyen mouvement angulaire annuel (ou période) et époque du passage au périastre, les solutions les plus usitées de l'équation de Kepler, basées sur des développements en séries rapidement convergentes, sont ici inapplicables, par suite de la grande excentricité de la plupart des orbites : les méthodes graphiques, telles celles de M. Radau, sont les plus commodes.

Il est bon de remarquer qu'on suppose *a priori* l'orbite relative apparente représentable par une ellipse décrite suivant la loi des aires. C'est effectivement le cas général, au moins en première approximation. Dans le cas contraire, on attribuera les perturbations à la présence d'un troisième astre de masse notable, invisible à nos yeux.

Quand on connaît à la fois la parallaxe et les éléments de l'orbite d'un système double, la troisième loi de Kepler donne immédiatement la somme des masses, celle du Soleil étant prise pour unité; le rapport des masses est donné par le rapport inverse des dimensions homologues des ellipses semblables décrites par les deux astres autour de leur centre de gravité commun. Il est très remarquable que, dans tous les cas, on trouve pour les masses individuelles des étoiles des valeurs du même ordre de grandeur que celle du Soleil. Les deux masses d'un même système sont d'ailleurs, en général, tout à fait du même ordre, même lorsque les éclats sont extrêmement différents : c'est le cas de l'éclatant *Sirius* de masse 2,20, dont le compagnon presque obscur, de dixième grandeur seulement, a pour masse 1,04.

Un problème intéressant, dont la solution complète est due aux travaux de C. Niven (1874), de C. Pickering (1880) et de T. See, consiste à calculer les dimensions absolues de l'orbite d'un système double, en utilisant les mesures de vitesses radiales orbitales obtenues par la méthode spectrographique. Belopolsky a récemment appliqué cette méthode au calcul de quelques parallaxes.

Un Chapitre spécial est réservé aux systèmes doubles dont une seule composante est visible : dans ce cas, ce sont les perturbations périodiques du mouvement propre de l'astre visible qui ont révélé tout d'abord l'existence du compagnon obscur; c'est l'Astronomie de l'invisible, due au génie de Bessel (1844). Toutefois Bessel

s'était borné à discuter l'expression générale de la vitesse aréolaire apparente résultant de l'attraction d'une étoile perturbatrice invisible. C'est C. Peters (1851) qui a le premier donné une méthode de calcul de l'orbite du compagnon obscur, et qui l'a appliquée à *Sirius*, en utilisant uniquement les variations d'ascension droite. Auwers (1862) a repris le calcul en utilisant aussi les variations de déclinaison; la même année, les frères Clark, de Boston, découvraient le compagnon de *Sirius*. L'orbite réelle, maintenant déterminée par quarante années d'observations, diffère très peu de celle calculée par Auwers. L'histoire de *Procyon* est identique : son compagnon, dont l'orbite avait été calculée par Auwers (1862) et par L. Struve (1892), a été découvert en 1896 par Schœberle à l'observatoire Lick.

Un grand nombre de systèmes optiquement doubles sont maintenant regardés comme triples, l'une des composantes visibles ayant un compagnon obscur, et, dans quelques cas, les éléments de l'orbite du satellite ont pu être calculés. Le cas de *p Ophiuchus* a soulevé un débat d'un grand intérêt. T. See (1898) a découvert le premier une inégalité périodique par rapport à l'orbite moyenne calculée par Schur (1894) et par Doolittle (1897), et, d'après lui, le satellite obscur aurait une période égale à peu près à la moitié de celle du système double visible. Or, l'emploi des méthodes de Hill et de H. Poincaré a permis à Moulton (1899) de démontrer qu'un tel système triple serait instable. Les conclusions de See doivent donc n'être acceptées que sous toutes réserves.

Depuis 1890, le spectroscope a enrichi l'Astronomie d'une nouvelle catégorie d'étoiles doubles, trop serrées pour être séparées au télescope. Les premières observations de cette espèce, effectuées à Harvard sur les spectres de $\zeta$ *Grande Ourse* et $\beta$ *Cocher*, sont dues à miss Maury et à C. Pickering (1890). En général, le mouvement relatif orbital sépare périodiquement deux spectres d'inégale intensité : les mesures spectrographiques fournissent alors la vitesse radiale relative. Pour d'autres étoiles, une seule composante est lumineuse; dans ce cas, on mesure le déplacement périodique des raies par comparaison avec une source fixe, comme l'a fait C. Vogel pour *Algol* (1889). Les méthodes de calcul de l'orbite, à l'aide des seules données spectroscopiques, sont dues à A. Rambaut, J. Wilsing et Lehmann-Filhès. Il est évident, *a priori*,

qu'elles ne peuvent donner tous les éléments géométriques : elles donnent l'excentricité, l'angle de position de la ligne des nœuds et la projection du grand axe sur la ligne de visée, mais non le grand axe lui-même. L'époque du passage au périastre s'obtient encore par une solution graphique de l'équation de Kepler. Enfin, la somme des masses, $M + M'$, n'est pas non plus calculable : de la valeur de la période, on déduit seulement la valeur de $(M + M') \sin^3 i$, $i$ étant l'inclinaison inconnue du plan de l'orbite par rapport au plan tangent à la sphère céleste.

Dans le cas précédent, la seule donnée expérimentale est la courbe des variations de la vitesse radiale orbitale avec le temps. Nous arrivons maintenant à d'autres étoiles doubles pour lesquelles la seule donnée est la courbe des variations périodiques de l'éclat photométrique. Ces Chapitres, qui forment une grosse partie du deuxième Volume, constituent un très remarquable ensemble auquel M. André a apporté une contribution personnelle des plus importantes. On divise ces étoiles en deux groupes, suivant que la variation de lumière est discontinue ou continue.

Pour les premières, dont le type est *Algol* (β *Persée*), la période est divisible en quatre phases, une première d'éclat maximum constant, une deuxième d'éclat variable décroissant, une autre, très courte, d'éclat minimum constant, et une dernière d'éclat variable croissant. La théorie qui attribue ces variations si parfaitement régulières à l'occultation partielle de l'une des composantes d'un système double dont le plan de l'orbite se trouve très peu incliné sur notre ligne de visée, est unanimement adoptée aujourd'hui. Elle a été développée pour *Algol* par C. Pickering en 1880, et la duplicité a été confirmée en 1889 par la découverte, due à C. Vogel, du déplacement périodique du spectre de l'étoile occultée. La concordance parfaite des données photométriques et spectroscopiques est telle que ce système double, extrêmement serré et si éloigné de nous (62 années de lumière), est un de ceux dont nous connaissons le mieux les éléments. C. Pickering a d'abord donné une solution approchée du problème de détermination de l'orbite, supposée circulaire, à l'aide d'hypothèses simples. Puis, C. Pickering, Harting et enfin Tisserand ont donné des méthodes de calcul de l'orbite elliptique permettant d'utiliser

au mieux toutes les observations. La méthode de Tisserand permet le calcul direct de l'excentricité et du périastre.

Il est impossible de donner ici une idée de la variété des problèmes qui se présentent suivant les différentes formes des courbes de lumière : la discussion montre que les apparences les plus compliquées peuvent s'expliquer par l'occultation réciproque et mutuelle de deux étoiles inégalement brillantes. A signaler une question bien intéressante, l'explication des inégalités périodiques que présentent les périodes d'un grand nombre de variables, et *Algol* en particulier. Deux hypothèses, tout à fait différentes, en rendent compte de façon également satisfaisante : suivant Chandler le système double d'*Algol* parcourt une orbite de grandes dimensions autour d'une étoile obscure, ce qui fait avancer ou retarder alternativement les éclipses. D'autre part, Tisserand a montré qu'un très faible aplatissement de l'étoile principale ($\frac{1}{288}$ pour *Algol*) imprime au grand axe de l'orbite un mouvement angulaire direct et uniforme qui produit les inégalités périodiques observées.

Cette théorie de Tisserand a été reprise par C. Myers dans le cas des étoiles du type de β *Lyre*, à variations continues de lumière, qu'une forte ellipticité peut seule expliquer. Pour β *Lyre* (1896), C. Myers a fait la théorie complète de l'occultation mutuelle de deux ellipsoïdes de révolution semblables, ayant leur équateur dans le plan de l'orbite. Belopolsky (1897) a calculé l'orbite relative de β *Lyre* d'après les mesures de vitesses radiales orbitales : ici encore les deux méthodes spectroscopique et photométrique se confirment et se complètent admirablement l'une l'autre. Le calcul des masses conduit à attribuer à ces étoiles doubles, d'ailleurs extrêmement serrées, des densités extrêmement faibles. M. André admet que ce sont des couples stellaires en formation, plus ou moins avancés dans la segmentation, suivant la forme de leur courbe de lumière. La discussion de leurs différents types nous entraînerait trop loin.

Les derniers Chapitres, relatifs aux beaux groupes serrés triples, quadruples, etc., aux amas irréguliers tels que les Pléiades, aux amas télescopiques et globulaires, sont uniquement descriptifs. Rappelons seulement le résultat de la statistique de W. Struve (1847), confirmé par celles plus récentes de Cleveland

Abbe (1867) et de S. Waters (1894) : la distribution des amas télescopiques résolubles, en relation directe avec la latitude galactique, montre que ces amas font partie intégrante de la Voie lactée, comme les étoiles elles-mêmes. Au contraire, la distribution des nébuleuses non résolubles est différente : elles doivent être regardées, en général, comme étrangères à notre Voie lactée.

Au sujet des splendides objets télescopiques désignés sous le nom d'*amas globulaires*, il suffira d'indiquer la découverte récente de Bailey (1894) à Ariquipa, qui jette un jour tout nouveau sur leur constitution : certains de ces amas contiennent une proportion considérable de variables périodiques; les périodes sont très courtes, de quelques heures parfois; les courbes de lumière, à variations continues, sont en général d'allure identique pour toutes les variables d'un même amas. Cette découverte révèle une solidarité très remarquable dans l'orientation des plans des orbites de ces systèmes binaires, car il est impossible de ne pas attribuer à des éclipses la parfaite régularité des périodicités. De tels résultats, encore inexpliqués, montrent l'intérêt que peuvent présenter les méthodes d'observation purement physiques, au seul point de vue de la Dynamique des systèmes stellaires.

Nous attendons maintenant le troisième Volume, dont la Spectroscopie stellaire occupera sans doute une grande partie. M. André aura droit à toute la reconnaissance du public scientifique, s'il nous donne le Traité d'Astrophysique qui nous manque encore. Mais, il l'a déjà méritée par son magistral exposé de nos connaissances actuelles en Astronomie herschélienne.

HENRI BÉNARD.

1re Partie.

## COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOURGET (Henry), agrégé de l'Université, aide astronome à l'observatoire de Toulouse. — Sur une classe particulière de groupes hyperabéliens. Thèse de doctorat présentée à la Faculté des Sciences de Paris. Paris, Gauthier-Villars, 1898. In-4° de 92 pages.

On a quelque difficulté à suivre, sur des exemples particuliers, le développement de certaines théories mathématiques qui sont cependant bien fixées dans leurs traits généraux. Toutefois ces exemples sont indispensables pour les progrès ultérieurs de ces théories elles-mêmes.

En particulier pour les fonctions hyperfuchsiennes, les séries hypergéométriques de deux variables permettent d'illustrer la théorie générale dans des cas particuliers remarquables. Il n'en est plus de même pour les fonctions hyperabéliennes et l'étude approfondie d'un exemple du groupe hyperabélien se présente moins aisément.

C'est dans la théorie de fonctions abéliennes spéciales que l'on pouvait espérer trouver un exemple dont l'étude fût susceptible d'être poussée assez loin. Si l'on considère le tableau des périodes normales

$$\begin{matrix} 0 & 1 & H & G \\ 1 & 0 & G' & H \end{matrix}$$

correspondant à une fonction abélienne de deux variables, un cas particulier remarquable est celui où l'on a

$$H^2 - GG' = D,$$

où D désigne un entier positif.

A cette classe de fonctions abéliennes correspond une classe de groupes hyperabéliens. Le travail de M. Bourget est consacré à l'étude de cette classe.

On peut donner à un tel groupe une double origine : il se rattache d'une part à la transformation du premier ordre des fonctions abéliennes et d'autre part son étude est liée étroitement à

l'étude arithmétique de la forme quaternaire

$$n^2 - Dy^2 + 2t.$$

Dans les deux premiers Chapitres de son Mémoire, l'Auteur étudie le groupe au point de vue arithmétique. Il montre d'abord sa discontinuité; et réussit ensuite, ce qui est capital, à trouver ses substitutions fondamentales qui sont au nombre de cinq.

L'Auteur examine ensuite la position du domaine fondamental particulièrement au voisinage de la limite du domaine de discontinuité. Les calculs sont complètement développés pour $D = 5$.

Le troisième Chapitre est consacré aux fonctions du groupe. On peut les définir à l'aide de séries comme pour tous les groupes hyperabéliens, mais on a ici des exemples beaucoup plus avantageux en considérant la fonction $\Theta$ à arguments nuls.

M. Bourget termine son travail en faisant une étude complète des modifications opérées dans ces dernières fonctions par les substitutions fondamentales du groupe.

E. E.

---

GUSTAVE ROBIN, chargé de cours à la Faculté des Sciences de Paris. — ŒUVRES SCIENTIFIQUES, réunies et publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, par *Louis Raffy*, professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Paris. *Thermodynamique générale*. 1 vol. in-8°, XVI-271 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1901.

## I.

Celui qui entreprendrait la tâche audacieuse de retracer l'histoire des Sciences physiques au XIX^e^ siècle devrait arrêter longuement son attention sur l'évolution qui a produit la Thermodynamique générale ou Énergétique. La *Théorie mécanique de la chaleur*, née de l'hypothèse cartésienne que la chaleur est un mode de mouvement, a donné tout d'abord naissance à une science positive, la *Thermodynamique*, qui s'est affranchie de toute tutelle, aussi bien de la Métaphysique que de la Mécanique; puis, par un développement rapide, la Thermodynamique s'est étendue au point d'absorber à son tour la Mécanique; sous le nom d'*Éner-*

*gétique*, elle est devenue le code des lois qui régissent tous les changements des corps inertes, aussi bien les changements de lieu dans l'espace que les changements de qualité ou d'état.

Gustave Robin était de ceux qui suivent avec passion ce grand mouvement intellectuel et qui, par leurs efforts, le veulent accélérer et diriger; son sens critique, très aiguisé, disséquait impitoyablement les systèmes proposés et ne négligeait aucun des défauts qu'il y pouvait découvrir; en même temps, son originalité de penseur tentait de rassembler et d'agencer en un système plus solide les fragments qu'il avait disjoints.

Des fruits de ce labeur, poursuivi avec acharnement pendant près de vingt années, Robin faisait profiter ses auditeurs de la Sorbonne; la mort est venue le frapper sans qu'il ait eu le temps d'en rien livrer à la publicité.

Un ami de Gustave Robin, M. L. Raffy, n'a pas voulu que ces pensées, longuement mûries, fussent à jamais perdues; avec un dévouement bien rare, il a voulu oublier que ses propres travaux l'avaient tenu éloigné, jusque-là, de la Physique et de la Chimie; il s'est pénétré pendant de longs mois de la pensée de l'ami disparu, au point que cette idée devînt sienne, et c'est cette reconstitution, monument patiemment élevé à la mémoire de Robin, qu'il présente aujourd'hui au public.

Est-ce à dire que l'œuvre que nous avons sous les yeux soit celle que nous eût donnée Gustave Robin s'il avait vécu? De divers faits, cités par M. Raffy dans l'*Avertissement* qu'il a mis en tête du Volume, on peut conclure que Robin n'était pas encore arrivé à se satisfaire pleinement; son système ne lui semblait pas encore mûr pour la publication. N'eussions-nous pas le témoignage de M. Raffy que bien des indices nous révéleraient cet état d'évolution où se trouvait encore la pensée de Robin; entre les parties du livre qui reproduisent ses dernières leçons (1897) et les parties qui nous rapportent les enseignements de 1892 ou de 1896, il est aisé d'apercevoir non pas certes des contradictions, mais des variations de point de vue, variations dont parfois on retrouverait la cause dans certaines publications contemporaines. Ainsi, la température n'est plus celle de la source dans laquelle le système est plongé (p. 16), mais la température même du système (p. 233); la définition des *variables normales* est modifiée (p. 179 et p. 236).

Une foule de nuances de ce genre marquent que nous n'avons pas sous les yeux une œuvre parvenue à son complet achèvement.

Faut-il en conclure que M. Raffy ait eu tort de nous livrer la pensée non encore fixée, le système encore en voie de développement, objet des dernières veilles de son ami? Assurément non; car il a sauvé de l'oubli le fruit de longues méditations; partant du point que Robin avait atteint, d'autres pourront, avec bien moins de peine, parvenir au but qu'il a entrevu.

Le volume sur la *Thermodynamique générale* ne contient guère d'historique; peu d'auteurs y sont cités, ils le sont comme en passant, et la bibliographie est absente. De ce qui pourrait sembler un grave défaut en un livre auquel son auteur aurait mis la dernière main, j'aperçois ici une explication. L'ouvrage est rédigé à l'aide de notes prises au cours d'un enseignement oral. Or, dans un tel enseignement, le professeur, soucieux avant tout de dérouler devant ses auditeurs la suite logique des vérités scientifiques, désireux de n'interrompre en rien cet enchaînement, néglige souvent de nommer l'auteur de chaque vérité.

Cette réflexion (pourquoi chercherais-je à le dissimuler?) m'est inspirée par la remarque suivante : Le lecteur le plus attentif pourrait feuilleter ce livre de la première page à la dernière sans y trouver une seule fois mon nom; et cependant, s'il a quelque érudition touchant la Thermodynamique, il reconnaîtrait bientôt que la pensée de Robin s'est développée dans un continuel contact avec mes propres recherches, soit qu'elle s'en assimilât les résultats, soit qu'elle en critiquât la méthode.

Des sujets traités dans ce livre sur la *Thermodynamique générale*, il n'en est pas un auquel je n'aie consacré quelque écrit et plusieurs sont de ceux que j'avais pris vierges. La théorie de la stabilité adiabatique de l'équilibre (p. 145 à 148) ne diffère que par des détails de forme de celle que j'ai donnée en 1894 (1). La vitesse de propagation de l'onde explosive donne lieu à des considérations qui tentent de généraliser ce que j'avais dit en 1896 (2)

(1) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3e partie, Chap. IV, n° 5 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. X, p. 271; 1894).

(2) *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux*

touchant cette onde. L'idée fondamentale de l'écrit que j'ai publié à cette époque sur *la viscosité, le frottement et les faux équilibres chimiques,* fait l'objet du chapitre consacré au *Problème général de la Dynamique* (p. 232 à 250). Enfin, le Chapitre consacré à la *Statique des déformations permanentes* (p. 215 à 231) n'est qu'une brève exposition géométrique de la théorie dont, en 1895 (¹), j'ai communiqué les principes essentiels à l'Académie de Belgique et que je n'ai cessé, depuis lors, de développer en de nombreux Mémoires.

Hors des Chapitres que je viens de mentionner, les infiltrations de mes recherches dans les écrits de Robin se reconnaissent maintes fois à la conservation de certains aperçus, de certains exemples, à la similitude presque complète des dénominations et des notations.

Il y a plus, et, bien souvent, Robin semble n'avoir connu les travaux de nos communs prédécesseurs que par les citations contenues dans mes écrits. Le nom de l'illustre J. Willard Gibbs, qui a tant fait pour les progrès de la Thermodynamique générale, ne se rencontre que deux fois sous sa plume, et, les deux fois, il est cité d'une manière indirecte; la première fois (p. xi), il est question « d'une manière de procéder qui tend à s'implanter en France et en Allemagne, à la suite des travaux assurément remarquables de Willard Gibbs »; la seconde fois (p. 263), on parle des « auteurs qui se rattachent à l'école de Gibbs ». Or, dans les deux cas, des questions traitées, des méthodes incriminées, il n'existe aucune trace dans les œuvres du génial professeur de New-Hawen; mais, dans le premier cas, la pensée de l'auteur est précisée par une citation textuellement empruntée à mon *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* (²); dans le second cas, le raisonnement incriminé ne se trouve nulle part, si ce n'est dans mon Ouvrage sur le *Potentiel thermodynamique*. J'ai donc, je pense, le droit de m'écrier :

*Me, me adsum qui feci; in me convertite ferrum.*

---

*équilibres chimiques*, 2e partie, Chap. V, § 3 (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. II; 1896).

(¹) *Sur les déformations permanentes et l'hystérésis*. Mémoire présenté à la classe des Sciences de l'Académie de Belgique le 13 octobre 1894 (*Mémoires in-4° de l'Académie de Belgique*, t. LIV; 1895).

(²) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. VIII, p. [illegible].

Et que l'on m'entende bien; mon intention n'est point ici de reprocher à Robin l'absence ou l'inexactitude de ses citations, absence et inexactitude dont je crois avoir donné plus haut l'explication; sa loyauté ne saurait être mise en doute, et il n'aurait certes rien livré à la publicité qu'il n'eût scrupuleusement reconnu à chacun de ses prédécesseurs ce qui lui revenait; pas davantage, je ne veux incriminer l'éditeur de ce livre; en s'arrachant à ses études coutumières d'Analyse et de Géométrie pour vivre la pensée du physicien qui fut son ami, M. Raffy a fait un effort dont on trouverait peu d'exemples et dont nous lui devons une vive reconnaissance; lui demander, par surcroît, de pénétrer la pensée de tous ceux qui ont écrit sur les mêmes sujets et de devenir un érudit en Thermodynamique serait une insupportable prétention.

Mais la raison de Robin était trop originale pour accepter sans un minutieux contrôle l'idée d'autrui; son sens critique était trop aiguisé pour se laisser piper par une apparence de vérité; son caractère était trop juste pour être bienveillant; si donc, dans son enseignement, je retrouve sans cesse les traces de ma propre pensée, il me semble que j'ai le droit d'en être fier; les pièces que j'ai mises en circulation se retrouvent, nombreuses, dans le trésor amassé par ce maître essayeur; c'est donc que le coin en était net et l'alliage loyal.

L'étude que l'on va lire sera, il n'en saurait être autrement, un continuel rapprochement entre la pensée de Robin et la mienne; les concordances y seront notées et les divergences discutées; laisser passer, sans essayer d'y répondre, les objections élevées contre ma manière de voir, ce serait, me semble-t-il, manquer d'égards envers celui qui les a formulées.

## II.

L'Ouvrage débute par une Introduction, formée, en majeure partie, de la leçon inaugurale du Cours de Chimie physique, donné à la Sorbonne en 1896; cette Introduction met aux prises les diverses Écoles qui se disputent le champ de la Physique théorique.

Une première tendance est celle du Mécanisme atomistique ou cartésien; guidé par un système métaphysique déterminé, il conçoit

d'une certaine manière la constitution des corps, il les compose de certaines figures et de certains mouvements; à ces figures, à ces mouvements, il s'efforce de rattacher les phénomènes naturels qui, pour lui, sont alors *expliqués*.

A cette École s'oppose l'École de l'induction dont Newton, avec une admirable clarté, formule le programme dans les dernières pages du livre des *Principes*. Appuyée sur un nombre suffisant de faits bien observés, elle parvient par induction à un certain nombre de lois générales; de ces lois, l'Analyse mathématique tire ensuite divers corollaires dont la certitude égale celle des lois expérimentales qui les ont fournis; dont, par conséquent, la réalisation est à peu près certaine; par cette méthode, il est vrai, les phénomènes naturels ne sont pas expliqués; ils sont seulement classés et comme condensés en un petit nombre de principes généraux; mais ce que la théorie perd en pénétration, elle le gagne en sûreté, car elle se développe sans feindre aucune hypothèse sur la constitution des corps.

Cette méthode trouvait un exemple parfait dans la Mécanique céleste constituée par Newton; cet exemple demeura longtemps le seul, car les newtoniens, abandonnant la méthode logique de leur maître, revinrent à celle de Descartes; ils imaginèrent une certaine constitution de la matière et cherchèrent à en tirer, avec un succès qui se prolongea, éclatant, pendant un siècle, la forme des lois physiques; seulement, outre la figure et le mouvement, seuls invoqués par les cartésiens, ils mirent en œuvre, dans leurs constructions hypothétiques, les actions moléculaires attractives ou répulsives.

Dans ces derniers temps, une troisième École a surgi. Avec Newton, elle repousse toute hypothèse qui a pour objet la constitution intime des corps; elle professe que le but de la Physique théorique n'est pas d'expliquer les phénomènes, mais de les classer au moyen d'un certain nombre de principes généraux. Mais, avec les mécanistes cartésiens ou newtoniens, elle reconnaît que l'expérience et l'induction ne sauraient suffire, dans la plupart des cas, à formuler ces principes. Ces principes, elle les présente donc comme de simples postulats; l'ensemble des propositions qu'elle en tire par le raisonnement mathématique, elle le donne pour une représentation toujours provisoire de la réalité, pour un

*schéma* susceptible de modifications continuelles, de perfectionnements indéfinis qui le moulent de plus en plus étroitement sur les faits; mais à aucun de ces corollaires elle n'attribue la moindre certitude tant qu'il n'a pas reçu le contrôle souverain et sans appel de l'expérience.

Cette forme nouvelle donnée aux théories physiques est à peu près contemporaine de la Thermodynamique; Clausius, Kirchhoff, Helmholtz en ont, à des degrés divers, favorisé l'éclosion; le premier, Rankine en a proclamé l'excellence dans son écrit sur l'*Énergétique;* diverses pièces de M. H. Poincaré ont contribué à la mettre dans une vive lumière; nous nous sommes efforcés, à plusieurs reprises, d'en tracer les principes; plus récemment, des philosophes comme M. Milhaud, M. Leroy et M. Wilbois l'ont préconisée.

Contre cette méthode, aussi bien que contre le mécanisme cartésien ou newtonien, Robin s'élève résolument : « Au lieu de prétendre deviner la nature, il faut se laisser guider par elle; aussi écarterons-nous toutes ces méthodes, qui tendent à déterminer les phénomènes par des considérations *a priori,* hypothèses mécaniques, hypothèses analytiques ou hypothèses latentes, pour nous en tenir à l'induction ».

Or des deux méthodes, quelle est celle qui se rebelle le plus volontiers contre les arrêts de l'expérience, qui se prétend le plus apte à deviner les faits ? Est-ce la méthode qui reconnaît en principe le caractère purement arbitraire de ses postulats, qui se déclare toujours prête à les modifier jusqu'à ce que leurs conséquences se modèlent sur la réalité? Ne sont-ce pas plutôt les théories dont on nous décrit (p. XIV) la puissance en ces termes : « Elles nous permettront de prévoir les phénomènes avec la probabilité même des inductions admises comme prémisses. Or ces inductions, consistant exclusivement à ériger en lois générales non pas l'interprétation, mais le *résultat même d'un très grand nombre d'expériences,* sont bien près de la certitude. C'est pourquoi nous serons autorisés, quand une formule aura été rigoureusement déduite de pareilles lois, à ne pas la rejeter parce qu'elle serait en contradiction avec certaines expériences ».

Dangereuse confiance ! Nous avons beau multiplier et varier les expériences d'où l'induction tire une loi générale; si complexe est

la réalité, qu'une infinité de cas possibles sont toujours omis dans nos investigations; dissimulés à notre plus minutieuse attention, ils demeurent prêts à infliger un démenti au principe que nous croyions universel.

D'ailleurs, la méthode nouvelle, en proclamant que les premiers principes de toute théorie sont des postulats librement posés par l'esprit du physicien, n'oblige pas celui-ci à les formuler au hasard; elle l'encourage à se laisser guider par toutes les considérations qui peuvent promettre à son choix une heureuse fécondité; entre tous les postulats possibles, elle préférera assurément, toutes les fois qu'ils lui seront offerts, ceux que l'on obtient en généralisant les résultats d'un grand nombre d'expériences; elle admire la méthode newtonienne comme l'idéal de la théorie physique; si elle se sépare de ceux qui, avec Robin, tiennent pour la méthode inductive, c'est qu'elle croit cet idéal hors de notre portée, et qu'ils prétendent l'atteindre.

Leur prétention est-elle couronnée de succès?

Les inductions destinées à devenir les premiers principes de la théorie, disent les tenants de la méthode newtonienne (p. XII) « nous les formulerons toujours en énoncés faciles à retenir, *susceptibles de vérification directe* » ... « Nos énoncés (p. 72) sont de véritables *principes,* étant la généralisation par voie inductive d'un grand nombre de faits observés directement ». La réalité répond-elle à ces promesses?

Prenons deux des énoncés essentiels du livre sur la *Thermodynamique générale,* ceux-là mêmes à propos desquels Robin s'exprime dans les termes que nous venons de rappeler, les énoncés des deux principes de Carnot (p. 66 et 68). Les voici :

Premier principe de Carnot. — *Lorsqu'un système, primitivement en équilibre, a parcouru un cycle de transformations qui le ramènent à son état initial, ce système n'a pu produire du travail que s'il a échangé de la chaleur avec deux sources au moins.*

Second principe de Carnot. — *Lorsqu'un système, parti d'un état d'équilibre, y revient après avoir éprouvé une série de modifications, dont une au moins est irréversible, ce sys-*

*tème n'a pu, s'il n'a échangé de chaleur qu'avec une source au plus, que consommer du travail.*

Où sont donc les faits très nombreux et directement observés dont ces énoncés sont la généralisation par voie inductive? Si ces « lois générales sont non pas l'interprétation, mais le *résultat même d'un très grand nombre d'expériences* », que l'on nous dise à quelle époque ces expériences ont été faites, où, par qui, comment? La portée de ces principes est immense; leur domaine est le domaine même du monde inorganique; que l'on songe à l'infinie multiplicité, à l'inimaginable variété des expériences concordantes qu'il aurait fallu faire pour que ces lois inductives fussent « bien près de la certitude » (p. XIV), pour qu'elles pussent être la source de « considérations théoriques inattaquables » (p. 164); on sera vite convaincu qu'il n'est pas possible de les assimiler à des principes tirés des faits par l'induction, à la manière du principe de la gravitation universelle.

Ces principes sont-ils même susceptibles de quelque vérification expérimentale directe? Je ne sache pas qu'aucune vérification de ce genre ait été tentée et Robin ne nous dit pas comment elle pourrait l'être.

Il apparaît donc clairement que le principe de Carnot ne se soumet pas aux lois de la méthode newtonienne, alors même qu'il est présenté par un partisan convaincu de cette méthode.

Suivons, d'ailleurs, la genèse et l'évolution de ce principe; sa véritable nature nous apparaîtra.

Sadi Carnot est profondément pénétré de l'impossibilité du mouvement perpétuel, non par des preuves directes que l'on ne saurait donner, mais par les échecs retentissants de toutes les tentatives faites pour réaliser un *perpetuum mobile;* les machines à feu viennent de faire leur apparition dans le monde; pas plus que les anciens mécanismes, ces machines ne peuvent créer du travail avec rien; Sadi Carnot admet ce principe et en fait la base de son système thermodynamique.

Bientôt, le système de Robert Mayer, de Joule, de Colding, de Helmholtz paraît dans la Science; entre ce système et celui de Carnot et de Clapeyron, un désaccord éclate, flagrant; si l'un est vrai, l'autre est faux; lequel faut-il choisir? W. Thomson hésite.

Clausius, plus perspicace, saisit la cause du désaccord; elle n'a rien d'essentiel et peut être supprimée, de telle sorte que les deux systèmes se fondent en une théorie unique. Pour constituer cette théorie, il modifie le principe même de la théorie de Carnot; il ne s'appuie plus sur l'impossibilité du mouvement perpétuel; mais, remarquant que la chaleur semble naturellement destinée à passer des corps chauds aux corps froids, il pose ce principe : On ne peut, sans fournir du travail, faire passer une certaine quantité de chaleur d'un corps froid à un corps chaud.

Ce principe, Clausius en marque nettement le caractère logique ([1]). Est-ce une proposition évidente, à la manière des axiomes de la Géométrie? Assurément non. Est-ce une loi générale que l'induction a tirée des faits d'expérience? Pas davantage. Certes, l'observation de chaque jour en a suggéré l'idée; mais les expériences nombreuses, variées, précises, qui seules pourraient lui conférer quelque certitude, n'existent pas et ne sauraient même être conçues. Qu'est-ce donc? C'est une *hypothèse*, mais non point une de ces hypothèses sur la nature des corps que Newton repoussait; c'est un simple *postulat*. Et comment ce postulat acquerra-t-il droit de cité dans la Science? Par l'accord de l'expérience avec les conséquences qu'il fournira en s'unissant à d'autres postulats analogues. En proclamant ces vérités, Clausius a vraiment posé les lois de la nouvelle méthode propre à traiter les théories physiques.

W. Thomson, adoptant des idées analogues à celles de Clausius, proposa de fonder la Thermodynamique sur un autre postulat; en toute machine à vapeur, une certaine quantité de chaleur est cédée au condenseur; guidé par cette observation, il posa le principe suivant: Une machine qui fonctionne suivant un cycle de Carnot ne peut fournir du travail en empruntant de la chaleur à la source froide. Ici encore, certains faits avaient suggéré à W. Thomson cette proposition, mais, parmi ces faits, il n'en était aucun qui la confirmât d'une manière précise et directe.

Les énoncés proposés par R. Clausius et par W. Thomson ont subi diverses modifications au cours du développement de la Thermodynamique. On les regarda longtemps comme équivalents

---

([1]) Clausius, *Poggendorff's Annalen*, Bd. CXX, p. 500; 1863. — *Mémoires sur la théorie mécanique de la chaleur*, trad. Folie, t. I, p. 110.

entre eux. En 1887, nous montrâmes [1] que, pour constituer complètement la science de la chaleur, il était nécessaire de les invoquer tous deux et même de les modifier légèrement. Plus tard [2], nous crûmes devoir les restreindre aux opérations réversibles, les opérations non réversibles appartenant à des catégories trop diverses pour qu'il nous semblât possible de les soumettre à un postulat général. Cependant, Robin modifiait ces principes dans un sens différent et formulait les deux énoncés que nous avons reproduits.

Aucune de ces modifications n'a été le résultat immédiat d'une constatation expérimentale, capable de corriger une induction incomplète ou trop hâtive; toutes ont été inspirées par le désir de faire de la Thermodynamique un système plus un et plus logique, de mettre les corollaires éloignés de ses principes à l'abri de tout heurt, contre les faits; façon de procéder bien étrange, si l'on conçoit une théorie physique à la manière de Newton, mais bien naturelle si l'on accepte notre opinion.

Cette opinion, je pense, a toujours été, du moins chez ceux qui l'ont formulée les premiers, le fruit d'une assez longue expérience; eux aussi, ils avaient conçu tout d'abord des théories physiques un autre idéal, soit l'idéal des mécanistes, soit l'idéal des tenants de l'induction; mais des échecs répétés les ont peu à peu convaincus que l'un et l'autre idéal étaient hors de notre portée et les ont ramenés à une notion à la fois plus modeste et plus juste du rôle de la Physique théorique. La méditation critique et, plus encore, l'usage de l'enseignement eussent déterminé, ce me semble, dans l'esprit de Robin, une pareille évolution; et en lisant attentivement les derniers Chapitres du Livre, qui furent ses dernières leçons, je crois voir s'ébaucher cette évolution; je crois voir le mode d'exposition de l'auteur se confondre presque avec celui que je préconise.

Sans doute, il lui arrive encore, là où j'ai mis *hypothèse* ou

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XI, juin-juillet 1887. — Cf. *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 2e Partie, Chap. I (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. IX, p. 293; 1893).

(2) *Traité élémentaire de Mécanique chimique*, Livre I, Chap. III; Paris, 1897.

*postulat,* de dire : *l'expérience montre* (p. 217 et 235); mais des principes fondamentaux, tels que l'existence des variables normales (p. 236) ou le principe de l'équivalence (p. 234), sont introduits comme des généralisations voulues par l'esprit et non comme des inductions dictées par les faits; et, qui plus est, un postulat est explicitement introduit comme tel (p. 244).

D'ailleurs, comment Robin n'aurait-il pas ressenti la gêne des entraves multiples que sa conception d'une théorie physique apporte à son exposition, entraves si encombrantes qu'après les avoir liées de ses propres mains, il s'efforce parfois de les rompre?

« Nous nous interdirons, dit-il (p. 12), toute hypothèse portant sur l'infiniment petit, qui est par définition même l'insaisissable; nous n'énoncerons nos inductions qu'en *lois intégrales,* c'est-à-dire en lois concernant des grandeurs finies. »

Que le lecteur compare le livre de Robin à un Traité usuel de Thermodynamique, il aura vite reconnu combien cette obligation de présenter toute formule sous forme intégrale rend l'exposition compliquée et inélégante.

Mais cette obligation même, il est impossible de la toujours respecter; il faut bien parfois différentier une égalité; aussi Robin prend-il la peine (p. 56) de montrer qu'il en a le droit; ce qu'il dit pour le prouver lui eût permis d'employer la forme différentielle bien plus souvent qu'il ne l'a fait, au grand avantage de son exposition.

« Nous n'introduirons (p. XIV) que des *grandeurs accessibles à l'expérience;* nous ne prononcerons donc pas les mots *énergie* et *entropie.* » Il faut bien cependant, et dès le début du Livre (p. 57), introduire le *potentiel interne,* et le potentiel interne n'est pas plus directement accessible à l'expérience que l'énergie et l'entropie; il y a plus : dans un nombre immense de cas, les données thermochimiques nous permettent de calculer la variation d'énergie qui accompagne une modification, tandis que la variation de potentiel interne ne nous est pas connue; c'est même l'un des reproches que les tenants de l'ancienne Thermochimie ont souvent adressés aux partisans du potentiel interne.

D'ailleurs, les deux notions d'énergie et d'entropie sont si

essentielles au développement de la Thermodynamique qu'on se flatterait en vain de les éviter; qu'on les chasse par la porte, elles rentreront par la fenêtre; lorsque Robin écrit les deux relations fondamentales de la Thermodynamique (p. 138 et p. 139), il y fait figurer les deux combinaisons

$$F(T) - T\frac{\partial F(T)}{\partial T} + T\theta(T) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F(T)}{\partial T} - \theta(T);$$

ces combinaisons, il ne les nomme point; il se garde même de représenter chacune d'elles par une lettre unique; n'empêche que ce sont précisément l'énergie et l'entropie.

« Nous ne raisonnerons jamais (p. XIV) que sur des *opérations réalisables,* ou du moins sur des opérations qui peuvent être considérées comme des cas limites d'opérations réalisables. » Nous n'emploierons donc pas ces « modifications virtuelles (p. XI) *qui peuvent être contraires à des lois naturelles,* pourvu qu'elles soient conformes à la définition des paramètres » par lesquels l'état du système est fixé.

Lagrange a fondé la Statique mécanique tout entière sur la méthode des modifications virtuelles; Willard Gibbs a étendu cette méthode à la Statique physico-chimique; par là, nous sommes en possession d'un procédé uniforme, régulier, sûr, pour aborder tout problème de Statique; à l'aide de ce procédé, chacune des équations d'équilibre d'un système donné est obtenue à coup sûr une et une seule fois; ce puissant moyen d'investigation est le résultat d'une évolution scientifique de près de trois siècles, qui va de Léonard de Vinci à Helmholtz en passant par Galilée, Descartes, Pascal, Bernoulli, Varignon, Lagrange, Fourier, Laplace, Gauss, Jacobi et Gibbs; et c'est d'une telle méthode que Robin se prive volontairement!

S'il évitait du moins, en payant un tel prix, de soumettre les systèmes matériels à des modifications qui n'ont point de réalité hors de l'entendement! Il ne le peut; il faut bien fermer certains cycles, faire subir à un système, d'une manière réversible, tel ou tel changement d'état; puisqu'il est interdit de regarder ces opérations comme de pures fictions mathématiques, on imagine que, sous l'action de certains agents, le système subit réellement ces opérations; mais cela ne suffirait pas si ces agents eux-mêmes

demeuraient de purs concepts, de pures fictions intellectuelles ; il faut donc que l'expérience prouve que de tels agents existent, tout au moins qu'ils sont possibles ; or, dans une foule de cas, cette preuve manque. Il y a plus : à maintes reprises, Robin est obligé de faire appel à des agents contre l'existence desquels proteste tout l'enseignement de la Physique et de la Chimie expérimentales ; tels sont ces « *corps témoins* (p. 12), incapables de produire ou d'empêcher le mouvement du système, mais capables, en des états et positions convenables, de déterminer ou d'arrêter certaines transformations physiques ou chimiques du système ». De ces actions dues à la simple *présence* de certains corps, la Chimie expérimentale a depuis longtemps fait justice ; partout et toujours, sous l'action de présence, elle a trouvé une modification très réelle qu'une observation trop sommaire n'avait pas aperçue.

Prenons l'exemple même cité par Robin (p. 13), et admettons-en l'exactitude de fait qui, cependant, depuis les expériences de MM. A. Gautier et H. Hélier, serait sujette à caution : « Le mélange tonnant se combine, dès 440° C., d'une façon appréciable, dans un flacon de verre neuf. Mais Van't Hoff a observé que la transformation s'arrête complètement quand les parois du verre ont subi une légère dévitrification. Si donc on chauffe le mélange tonnant dans un vase dont toutes les parois sont déjà dévitrifiées, sauf une, la combinaison se fera ; mais il suffira, pour l'arrêter net, de masquer brusquement la paroi neuve par une lame dévitrifiée. » A supposer l'observation exacte, comment devrait-elle s'interpréter? Par les deux énoncés suivants : A 440°, un mélange d'oxygène et d'hydrogène ne peut se transformer en eau. A 440°, un mélange d'oxygène, d'hydrogène et d'un alcali contenu dans un verre peut se transformer en alcali hydraté. Il ne saurait être étonnant que de ces deux réactions essentiellement distinctes, l'une soit possible dans des conditions où l'autre ne l'est pas ; mais où trouver maintenant une action de présence qui permette de produire ou d'arrêter à volonté la transformation en eau du mélange tonnant?

De cette discussion, une conclusion se dégage : Vouloir fonder sur la seule induction un système thermodynamique logique, c'est faire une tentative qui ne saurait aboutir ; la suite même de ses

méditations eût certainement amené Robin à reconnaître cette vérité.

L'analyse des divers Chapitres du Livre fortifiera encore cette conclusion.

## III.

Les quatre premiers Chapitres sont consacrés en grande partie à des définitions fondamentales qui méritent d'être examinées avec soin.

La première définition est celle de la *température;* pour introduire cette notion, Robin reproduit presque textuellement (p. 1 à 4) ce que nous en avons dit au début de notre *Commentaire* [1]; vient ensuite la définition du thermomètre normal; ici, je n'ai pas lu sans quelque étonnement la phrase suivante, qu'une inexactitude de rédaction peut seule expliquer : « Cet instrument n'a jamais été défini jusqu'ici comme nous allons le faire. » Je reconnais en effet textuellement, dans la définition donnée par Robin, celle que préconisait J. Moutier, qui fut notre maître à tous deux; une seule différence peut être signalée : à l'imitation de Regnault, Moutier prenait l'air sec comme corps thermométrique; selon la convention aujourd'hui adoptée, Robin prend l'hydrogène.

Dans notre *Commentaire,* la définition du travail et de la quantité de chaleur est précédée du postulat de la conservation de l'énergie; il nous a toujours semblé qu'un ordre différent impliquait cercle vicieux. C'est cependant un ordre différent que suit Robin.

La quantité de chaleur l'occupe tout d'abord et il définit en premier lieu ce qu'il nomme une *source;* de cette définition, il passe aisément à celle du calorimètre et de la quantité de chaleur. La définition de la source ne laisse pas que de donner prise à quelques doutes. Il suppose (p. 6) que « ce corps ne rayonne pas de chaleur par sa surface extérieure, c'est-à-dire qu'il ne modifie pas sensible-

---

[1] *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 1re Partie, Chap. I, n° 6 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. VIII, p. 284; 1892).

ment avec le temps la température des corps voisins; enfin qu'il est incapable d'exercer aucune espèce d'action sur les corps qui ne sont pas en contact avec lui ». Les mots : « ce corps ne rayonne pas de chaleur » n'ont pas immédiatement de sens, puisque la quantité de chaleur n'a pas encore été définie; il faut donc les expliquer; mais l'explication donnée ne vaut point; un morceau de fer rouge, plongé dans un puits de glace massif, ne modifie pas la température de la glace qui l'environne; il rayonne cependant de la chaleur. Quant aux mots : « n'exercer aucune action », ils ne peuvent jusqu'ici être entendus, puisque la définition de la force, ou plutôt du travail, sera donnée seulement au Chapitre suivant.

Cette notion de *source* joue un grand rôle dans les raisonnements de Robin; tout système qui se transforme est placé dans une source dont il peut n'avoir pas la température et c'est la température seule de la source, et non celle du corps, qui figure dans les formules.

Cette manière de procéder, dont l'origine se trouve dans une remarque de Clausius [1], ne nous paraît pas présenter tous les avantages qu'on lui attribue; lorsqu'il s'agit d'états d'équilibre ou de modifications réversibles, la température du système et celle de la source sont identiques; la distinction s'évanouit donc; d'autre part, lorsque l'on veut poser les équations de la Dynamique générale, on est obligé de considérer non point la température de la source, mais celle du système; et c'est ce que fait Robin (p. 233).

A la définition du travail, systématiquement ramené par Robin au travail que produit le déplacement de poids, il nous semble que l'on doit adresser une objection d'une extrême gravité. Citons le début de cette définition (p. 17) :

« Le système à étudier (S) sera toujours supposé placé dans une source, qui recueillera ou fournira toute la chaleur qu'il pourra mettre en jeu. Ce système sera en relation avec un ensemble d'agents mécaniques et de corps témoins que nous désignerons collectivement, pour abréger, sous le nom de *corps extérieurs* ou de *système étranger* ($S_1$) .... Ces deux systèmes (S)

---

[1] Clausius, *Die mechanische Wärmetheorie*, 2te Auflage, Bd. I, p. 110.

et $(S_1)$, ainsi que la source ou les sources qui les entourent successivement, forment une portion (P) de l'univers *isolée,* de manière à n'éprouver aucune action de la part du monde extérieur et à n'en exercer aucune sur lui.

» Le premier système étranger, le plus simple, que nous considérerons est celui qui ne pourra éprouver d'*autre modification qu'un changement de configuration* de ses parties, dont la densité, la température, la composition chimique, etc., restent invariables. Elles n'exercent point d'action à distance les unes sur les autres, comme il a été dit, de sorte que si l'une d'elles est détachée du reste, elle tombera vers le sol.... Ce seront des solides indéformables, des fils et des membranes inextensibles, des fluides incompressibles; ces hypothèses sont admissibles au moins dans une première approximation.... Un pareil système sera dit *système de poids.*

» Le système étranger $(S_1)$ étant ainsi défini, considérons d'abord deux états d'équilibre de (S) auxquels correspondent nécessairement deux états d'équilibre de $(S_1)$; ces deux derniers états ne diffèrent que par le déplacement de certains des corps extérieurs. Rapportons ces déplacements à des axes de coordonnées dont l'un, l'axe des $z$, sera vertical et dirigé vers le bas. Soit P le poids de l'un des corps déplacés....»

Mais n'avons-nous pas supposé, il y a un instant, que « les deux systèmes (S) et $(S_1)$ formaient une portion (P) de l'univers isolée, *de manière à n'éprouver aucune action de la part du monde extérieur et à n'en exercer aucune sur lui* »? Pourquoi une partie du système $(S_1)$ tomberait-elle sur le sol dont elle n'éprouve aucune action? Comment peut-il être question, pour les corps du système $(S_1)$, de *verticale* dirigée vers le *bas,* et comment surtout peut-on parler du *poids* de l'un d'eux? Ces mots ont-ils donc un sens pour un système qui n'est pas soumis à l'action de la terre et qui ne réagit pas sur elle? Et s'ils n'en ont aucun, que vaut donc cette nouvelle définition du travail, rendue indépendante de la notion de force?

« Nous arrivons (p. 38) à la notion capitale de réversibilité qui est due à Sadi Carnot. C'est l'idée la plus originale qui ait été acquise dans les Sciences, l'invention la plus imprévue, la plus

hardie, la plus géniale des temps modernes. Elle a souvent été mal comprise. »

Longtemps, en effet, la notion de modification réversible fut, pour beaucoup d'esprits justes et rigoureux, une sorte de pierre de scandale qui les arrêtait au seuil de la Thermodynamique; si, disaient-ils, un système soumis à certaines actions extérieures subit une modification d'un certain sens, comment les mêmes actions pourraient-elles aussi lui faire subir la même modification, mais en sens inverse? Les difficultés que soulevait la définition encore imprécise de la réversibilité ont, aujourd'hui, complètement disparu; mettant à profit les indications de divers auteurs, et particulièrement de Clausius, nous nous sommes attachés à préciser cette définition [1]. *Une modification réversible n'est pas une modification;* c'est une suite continue d'états d'équilibre que l'esprit du physicien peut aussi bien parcourir dans un sens que dans l'autre; mais cette suite d'états d'équilibre, parcourue dans un premier sens, est la limite d'une infinité de modifications réalisables, tandis que, parcourue en sens inverse, elle est la limite d'une autre infinité de modifications réalisables. Cette définition a été adoptée par divers mathématiciens et physiciens, parmi lesquels nous nous plairons à citer MM. E. et F. Cosserat et M. Helm.

Cette définition, Robin l'admet dans le fond; mais sa doctrine touchant la forme qui convient aux théories physiques, en l'obligeant à ne raisonner jamais que sur des *opérations réalisables* (p. XIV), le gêne pour proclamer que la modification réversible ne saurait être réalisée, qu'elle est une pure opération intellectuelle; parfois donc, il semble qu'il en parle comme si l'on pouvait réellement faire subir à un système une telle modification (p. 39); en aucun cas, il n'en marque nettement le caractère essentiel, il n'affirme qu'elle est une pure conception de l'esprit.

---

[1] *Étude sur les travaux thermodynamiques de J. Willard Gibbs* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XI, juin et juillet 1887). — *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 2e Partie, Chap. I (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. IX, p. 305; 1893).

## IV.

Nous excéderions de beaucoup les bornes imposées à cet article si nous discutions les principes et leurs applications avec autant de détail que les définitions. Nous nous contenterons donc d'examiner quelques points choisis parmi ceux qui ont surtout attiré notre attention.

Nous avons cité ci-dessus (II) la forme très originale sous laquelle Robin énonce les deux principes auxquels il conserve le nom de *principes de Carnot*. Ces principes portent exclusivement sur les cycles *monothermiques*. Il serait impossible d'en rien tirer touchant les cycles *dithermiques* (cycles de Carnot) ou *polythermiques*, si l'on ne leur adjoignait une proposition qui leur soit hétérogène. En effet, outre ces deux principes, Robin admet, comme un fait d'expérience, qu'un corps particulier, l'hydrogène, vérifie le postulat de W. Thomson (p. 94); dès lors, il lui est aisé de prouver, par une méthode bien connue, que tous les corps doivent également vérifier ce postulat.

Les énoncés donnés par Robin pour les deux principes de Sadi Carnot diffèrent de ceux que nous avons donnés dans notre *Étude sur les travaux thermodynamiques de J. Willard Gibbs* et dans notre *Commentaire aux principes de la Thermodynamique;* ils s'en rapprochent cependant par un trait commun : les énoncés de Robin, comme les nôtres, embrassent aussi bien les cycles irréversibles que les cycles réversibles.

Depuis le temps où nous avons donné ces énoncés, leur généralité nous a paru trop grande et nous les avons restreints [1] aux seuls cycles réversibles; nous avons reconnu, en effet, que nos énoncés très généraux pouvaient conduire à des conséquences inadmissibles. Nous nous proposons de montrer que la même observation peut être faite au sujet des énoncés de Robin.

De ces principes, par des démonstrations dont la rigueur ne fait point de doute, Robin déduit la proposition suivante :

Supposons qu'un système, parti de la température $T_0$ et plon-

---

[1] *Traité élémentaire de Mécanique chimique, fondé sur la Thermodynamique*, t. I, p. 61. Paris, 1897.

geant successivement dans des sources dont la température est $T_1$, $T_2$, ..., T, y éprouve des modifications *non réversibles* qui correspondent à des dégagements de chaleur $Q_1$, $Q_2$, ..., Q. Nous aurons l'*inégalité* (p. 139)

$$\frac{Q_1}{AT_1} + \frac{Q_2}{AT_2} + \ldots + \frac{Q}{AT} \geq \frac{\partial F(T)}{\partial T} - \theta(T) - \frac{\partial F(T_0)}{\partial T_0} + \theta(T_0).$$

L'inégalité ne serait remplacée par une *égalité* que si toutes les modifications considérées étaient *réversibles*. Or, nous nous sommes attachés à prouver [1] qu'il existe des modifications non réversibles pour lesquelles l'inégalité précédente doit être cependant remplacée par une égalité; ce sont toutes les modifications au cours desquelles le travail des résistances passives est constamment nul; tels sont tous les mouvements des systèmes sans viscosité ni frottement qu'étudie la Mécanique classique.

Il est vrai qu'une difficulté pourraît être soulevée; les températures qui figurent dans l'énoncé de Robin sont les températures des diverses sources qui enveloppent le système; au contraire, dans nos énoncés, il est toujours question de la température du système lui-même. La difficulté s'évanouit si l'on prend soin de se limiter à des modifications durant lesquelles le système garde une température invariable; rien n'empêche alors de l'enfermer dans une source gardant sans cesse cette même température, et le langage employé dans nos énoncés ne diffère plus de celui de Robin. Or c'est précisément de telles modifications sans changement de température que traite habituellement la Dynamique classique.

Si donc on veut garder les principes de Robin dans leur entière généralité, on est tenu de considérer les mouvements sans viscosité ni frottement comme impossibles; on peut supposer très petit le travail des résistances passives, mais on ne peut le supposer rigoureusement nul; la Dynamique classique devient un *cas*

---

[1] *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3e Partie, Chap. II, n° 5 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. X, p. 230; 1894). — *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, 1re Partie, Chap. I, § V, formule (33) (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. II; 1896).

*limite* de la Thermodynamique générale; elle n'en saurait plus être un *cas particulier*.

Parmi les propositions que Robin tire des principes de Carnot, ou mieux des lois de Statique qui en découlent, se trouve (p. 79) le critérium de stabilité de l'équilibre isothermique : *Pour qu'un état soit un état d'équilibre isothermique stable, il faut et il suffit que le potentiel total du système soit minimum dans cet état*. Tout le monde sait que Lagrange avait déjà énoncé une telle proposition dans le domaine de la Mécanique rationnelle; tout le monde connaît également la belle et rigoureuse démonstration par laquelle Lejeune-Dirichlet a prouvé que ce critérium *suffisait* à assurer la stabilité de l'équilibre. Nous avons fait remarquer [1] que cette démonstration s'étendait aux équilibres plus généraux que considère la Thermodynamique.

Robin adresse à cette démonstration de Lejeune-Dirichlet de vives critiques (p. 83). Laissons de côté l'assertion que « Dirichlet se sert de la théorie des petits mouvements »; visiblement, elle résulte d'une inadvertance; la démonstration de Lagrange reposait sur la théorie des petits mouvements; Dirichlet a précisément eu pour objet de s'affranchir de cette méthode peu rigoureuse. Il est d'ailleurs très facile de tenir compte, dans la démonstration de Lejeune-Dirichlet, des actions de viscosité que Robin semble lui objecter. Arrêtons-nous plutôt à la critique que renferment les lignes suivantes :

« Il importe de remarquer que, grâce aux principes de Carnot, nous avons pu établir *complètement* cette proposition capitale, sans faire intervenir les lois de la Dynamique. Or Lejeune-Dirichlet a seulement démontré que le minimum du potentiel est une condition *suffisante* pour l'équilibre stable, mais non qu'il en est la condition *nécessaire;* et sa démonstration s'appuie sur des résultats empruntés à la Dynamique, ce qui est un grave défaut; il n'est pas acceptable qu'on doive connaître les lois exactes du mouvement pour établir un théorème relatif à l'équilibre. »

---

[1] *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3e Partie, Chapitre IV, n° 2 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. V, p. 264; 1889).

Il nous paraît difficile de souscrire à ce jugement et de regarder le problème de la stabilité de l'équilibre comme une question de Statique. En effet, en quoi consiste exactement ce problème : On prend un système dans un état d'équilibre; on l'écarte de cet état et on lui imprime des vitesses initiales; il se met en mouvement; on veut prouver que si le dérangement initial et l'impulsion initiale sont suffisamment petits, ce mouvement éloignera très peu le système de l'état d'équilibre considéré? Il est bien évident qu'il s'agit d'établir un théorème relatif non pas à l'équilibre du système, mais à son mouvement; c'est donc à la Dynamique et non à la Statique que l'on en doit demander la démonstration; c'est, d'ailleurs, ce qu'ont pensé Lagrange et Lejeune-Dirichlet aussi bien que M. Liapounoff et M. Hadamard.

Ces remarques font craindre que la démonstration donnée par Robin ne soit pas pleinement rigoureuse; l'examen de cette démonstration ne fait que confirmer cette crainte.

Le point de départ de cette démonstration est le théorème suivant (p. 78) : *Dans une transformation isothermique spontanée, entre deux états d'équilibre, le potentiel total ne peut que diminuer.*

Voici la première partie (p. 79) de la démonstration à laquelle cette proposition sert de lemme :

« Supposons que, dans l'état (A), le potentiel total soit *minimum*. Je dis que (A) est un état d'équilibre stable, car, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait y maintenir le système en équilibre au moyen de liaisons appropriées; à la rupture d'une de ces liaisons succéderait une *transformation spontanée* du système qu'on pourrait arrêter dans l'état (A′), très voisin de (A). Dans cette transformation entre deux états d'équilibre (A) et (A′), le potentiel total devrait, en vertu du théorème précédent, avoir *diminué*, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse du minimum en (A).... »

Si, comme le suppose cette dernière phrase, l'état (A) est un état d'équilibre, il n'est point nécessaire d'user de liaisons pour y maintenir le système en équilibre; de plus, à la rupture de ces liaisons, le système n'éprouvera aucune modification spontanée. Pour qu'il éprouve une modification spontanée, il faudra ou bien le déranger quelque peu de l'état (A), ou bien lui imprimer des

vitesses initiales, ou bien réaliser à la fois ces deux opérations; mais alors, l'état initial du système n'est plus l'état d'équilibre (A) et n'est même plus un état d'équilibre.

Quant à l'état (A′), est-il un état d'équilibre? Si, aux forces qui agissaient sur le système et qui correspondent au potentiel total considéré, on adjoint d'autres forces capables de l'arrêter en (A′), le système s'y trouvera en équilibre, mais, les forces extérieures agissantes n'étant point celles qui correspondent au potentiel considéré, le théorème précédent n'est pas applicable; si, au contraire, les forces agissantes sont celles qui correspondent à ce potentiel, elles ne maintiennent pas le système en équilibre dans l'état (A′).

Il semble, du reste, qu'une certaine confusion se soit glissée ici entre la notion d'*équilibre* et la notion d'*équilibre stable;* elle apparaît, en particulier, dans ce membre de phrase (p. 79): « Un état d'*équilibre stable* est, par définition, un état d'équilibre dans lequel aucune transformation spontanée n'est possible... ». C'est là un caractère commun à tous les états d'équilibre.

Étudiant l'équilibre adiabatique, Robin établit (p. 148) cette proposition : *quand un équilibre est stable relativement aux modifications isothermiques, il est stable relativement aux modifications adiabatiques.* Cette proposition nous est due [1].

Le problème de la propagation de l'onde explosive a été pour la première fois abordé dans nos études sur les faux équilibres [2]; nous l'avons résolu seulement dans le cas particulier où le milieu, en avant du front de l'onde, est immobile et où la température et la pression y ont exactement les valeurs pour lesquelles la combinaison prend naissance; en d'autres termes, nous avons supposé que le mélange gazeux au sein duquel se fait la propagation était dans un état de *faux équilibre limite.* Nous avons admis qu'en traversant le front de l'onde, la pression $p$, le volume spécifique $\omega$, la température T et les trois composantes $u$, $v$, $w$ de la vitesse

---

(1) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3e partie, Chap. IV, n° 5 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. X, p. 271; 1894).

(2) *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, 2e partie, Chap. V, § 3 (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. II; 1896).

variaient d'une manière continue, tandis que leurs dérivées partielles pouvaient varier d'une manière discontinue; l'emploi de la méthode d'Hugoniot nous a fourni aisément, dans ces conditions, la vitesse de propagation de l'onde explosive.

Quelles sont les lois suivant lesquelles se propage cette onde lorsque l'état initial du milieu n'est plus un état de faux équilibre limite? C'est là une de ces questions qu'il est impossible d'éviter.

Si l'on veut encore que les variables $p$, $\omega$, T, $u$, $v$, $w$ varient d'une manière continue lorsqu'on traverse le front de l'onde, il faut que, sur ce front même, $p$ et T aient, en chaque point, les valeurs pour lesquelles débute la réaction; chaque point du front de l'onde doit se trouver dans un état de faux équilibre limite, partant dans un état qui n'est pas l'état initial du fluide.

Il faut donc que le fluide, en aval du front de l'onde, soit déjà en mouvement; les opinions peuvent d'ailleurs différer sur la nature de ce mouvement; on ne peut supposer qu'il s'avance dans le fluide en repos en formant une onde analogue à l'onde sonore, car celle-ci, qui se propage beaucoup plus lentement que l'onde explosive, ne peut la précéder; mais, avec M. Vieille, on peut supposer qu'une onde de discontinuité précède l'onde explosive; on peut supposer également que le mouvement en aval de l'onde explosive ne se propage pas par ondes; que les fonctions $u$, $v$, $w$ sont analytiques dans toute la région située en aval de l'onde explosive, et nulles à l'infini.

Robin ne se propose pas de décider entre ces diverses suppositions; il suppose simplement (p. 206) qu'il y a mouvement de part et d'autre de l'onde explosive, mais que ce mouvement, exempt de toute réaction chimique en aval de l'onde, est accompagné en amont d'une telle réaction. Il en résulte que la loi de détente adiabatique n'est pas la même en amont et en aval; en aval, cette relation a la forme $p = F(\omega)$; en amont, elle a la forme $p = f(\omega)$. Lorsqu'on traverse le front de l'onde, $p$, $\omega$, T, $u$, $v$, $w$, varient d'une manière continue, mais $\frac{dp}{d\omega}$ présente une discontinuité.

Prenons un point M sur la surface de l'onde; prenons pour axe des $x$ la normale extérieure en ce point, pour plan des $(y, z)$ le

plan tangent; accentuons les lettres qui se rapportent à des points en aval de l'onde, Sur l'onde, nous aurons (p. 210)

$$(1)\qquad \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

$$(2)\qquad \frac{\partial \omega'}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \omega'}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

et aussi (p. 211)

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega'}{\partial y} - \dfrac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\dfrac{1}{\dfrac{dF}{d\omega}} - \dfrac{1}{\dfrac{df}{d\omega}}\right)\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial \omega'}{\partial z} - \dfrac{\partial \omega}{\partial z} = \left(\dfrac{1}{\dfrac{dF}{d\omega}} - \dfrac{1}{\dfrac{df}{d\omega}}\right)\dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Robin, qui écrit ces équations, ne semble pas avoir aperçu que les égalités (2) et (3) entraînent les égalités

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

auxquelles on peut adjoindre, en vertu de (1), les égalités

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p'}{\partial z} = 0.$$

*Pour qu'une onde explosive du genre de celle que nous considérons puisse se propager, il faut qu'en tous les points du front de l'onde la pression ait, en même temps, la même valeur.* L'existence des relations $p = f(\omega)$, $p' = F(\omega')$ permet, d'ailleurs, d'étendre cette proposition au volume spécifique et, partant, à la température.

Cette condition est vérifiée d'elle-même si, en aval du front de l'onde, le milieu est immobile; on retombe alors sur le problème que nous avons traité; mais, si le milieu qui précède l'onde explosive est en mouvement, la condition précédente ne sera vérifiée que dans des cas infiniment particuliers, comme le serait le mouvement par *tranches* ou le mouvement par *ondes sphériques;* en général, le problème traité par Robin devient illusoire.

En réalité, une inexactitude essentielle vicie l'exposé de Robin.

La relation entre le volume spécifique $\omega$ et la pression $p$, tant en aval qu'en amont de l'onde, n'est pas donnée sous une forme finie telle que $p = f(\omega)$, $p' = F(\omega')$; elle est donnée sous forme différentielle et s'écrit

$$K(\omega', p')\,dp' + L(\omega', p')\,d\omega' = 0, \tag{4}$$

en aval de l'onde et

$$k(\omega, p)\,dp + l(\omega, p)\,d\omega = 0 \tag{5}$$

en amont. Robin a particulièrement insisté (p. 206) sur la manière d'obtenir cette dernière relation. L'intégration des relations (4) et (5) donne, pour chacun des éléments matériels qui constitue le fluide, des égalités de la forme

$$p' = G(\omega', p'_0, \omega'_0), \tag{6}$$

$$p = g(\omega, p_0, \omega_0), \tag{7}$$

$\omega'_0$, $p'_0$ étant le volume spécifique et la pression de l'élément matériel à l'instant à partir duquel on lui applique la relation (4); $\omega_0$, $p_0$ étant le volume spécifique et la pression de l'élément matériel à l'instant à partir duquel on lui applique la relation (5).

Or, le mouvement sans réaction chimique qui se produit en aval de l'onde et auquel on applique la relation (4) peut être censé engendré à partir d'un état où le fluide homogène et immobile avait partout même pression et même volume spécifique; dans ces conditions, $\omega'_0$, $p'_0$ ont même valeur pour tous les éléments matériels situés en aval de l'onde; on peut donc remplacer l'égalité (6) par une égalité $p' = F(\omega')$ de même forme pour tous ces éléments.

Mais il n'en est plus de même en amont de l'onde. La relation (7) est applicable à un élément matériel du moment que le mouvement dont il est animé est accompagné d'une réaction chimique; l'instant à partir duquel on doit l'appliquer à un élément, c'est l'instant où cet élément a commencé à subir une réaction chimique, l'instant où il a passé par un état de faux équilibre limite, en un mot l'instant où il s'est trouvé sur le front de l'onde; $\omega_0$, $p_0$ sont le volume spécifique et la pression de cet élément à cet instant; dans le problème que nous avons traité, on était assuré que $\omega_0$, $p_0$ (respectivement identiques à $\omega'_0$, $p'_0$) avaient même valeur pour tous les éléments; l'égalité (7) pouvait alors

être remplacée par une égalité $p = f(\omega)$ de même forme pour tous les éléments; mais, dans le problème traité par Robin, il n'y a aucune raison pour qu'il en soit ainsi; $\omega_0$, $p_0$ varieront en général, en amont de l'onde, d'un élément à l'autre et leur présence inévitable dans l'équation (7) compliquera la solution [1] des diverses questions d'Hydrodynamique.

Toutefois, dans ce cas, la propagation de l'onde explosive s'étudierait sans peine en employant les méthodes qui nous ont permis [2] d'étudier la propagation de l'onde ordinaire dans les fluides parfaits.

En 1894 et en 1895, dans trois Mémoires étendus présentés à l'Académie de Belgique, nous avons posé les principes [3] d'une théorie des déformations permanentes; cette théorie a été développée ensuite en de nombreux écrits. Dans le Chapitre intitulé : *Statique des déformations permanentes,* Robin fait à la priorité de nos recherches cette simple allusion (p. 215) : « Nous ferons de ces phénomènes une étude géométrique simple, équivalente à une étude analytique longue et compliquée. » Cette assertion n'est pas entièrement exacte.

Robin se contente d'étudier un système défini par une seule variable normale hors la température; celle-ci, d'ailleurs, est supposée invariable. Dans ces conditions, la théorie qu'il développe concorde avec la nôtre, pourvu toutefois qu'il se propose d'étudier seulement les modifications éprouvées par le système et non point les quantités de chaleur que ces modifications mettent en jeu; car, à la différence de la nôtre, sa théorie ne lui fait point connaître la loi qui régit ces phénomènes. D'ailleurs, le cas traité est éminemment restreint. Veut-on rendre à la température la liberté de varier? Veut-on surtout étudier un système défini par plusieurs variables normales hors la température? L'exposé de Robin n'ouvre pas la voie aux généralisations qui permettent de

---

(1) *Sur la condition supplémentaire en Hydrodynamique* (*Comptes rendus,* t. CXXXII, p. 117; 21 janvier 1901).

(2) *Sur les ondes longitudinales et transversales dans les fluides parfaits* (*Comptes rendus,* t. CXXXII, p. 1303; 3 juin 1901).

(3) *Sur les déformations permanentes et l'hystérésis,* Mémoires présentés à l'Académie de Belgique le 13 octobre 1894, le 11 mars 1895 et le 3 août 1895 (*Mémoires in-4° de l'Académie de Belgique,* t. LIV).

traiter ces problèmes. Cet exposé se borne donc à présenter sous forme géométrique quelques-unes des propositions qui composent notre théorie; si celle-ci est plus longue et plus compliquée, elle est aussi incomparablement plus étendue et plus riche en résultats.

Le Chapitre XIII et dernier traite le *problème général de la Dynamique.*

Si un système est défini par $n$ variables normales hors la température, la Thermodynamique ne fournit que $n$ équations du mouvement de ce système; il faudra donc, au moyen d'hypothèses étrangères à cette Science, former une équation de plus, dite *relation supplémentaire*. Cette vérité est apparue tout d'abord lorsque Laplace et Poisson ont voulu étudier la propagation du son dans un fluide; nous l'avons énoncée dans son entière généralité ([1]). Robin montre (p. 241) comment, si l'on connaît la loi de l'émission de la chaleur par la surface qui limite le système, on pourra former cette équation supplémentaire.

Outre cette équation, on peut écrire $n$ équations, dites *équations du mouvement,* qui correspondent respectivement aux équations d'équilibre.

Pour passer de chacune des équations d'équilibre à l'équation correspondante du mouvement, on peut se contenter d'ajouter à l'action qui s'exerce réellement un terme nouveau, l'*action d'inertie;* c'est le procédé de d'Alembert; il conduit aux équations de Lagrange.

Ces équations ne s'accordent pas avec tous les phénomènes qu'étudie la Dynamique générale; il est nécessaire de compléter chacune d'elles par l'introduction d'un terme nouveau; ce terme, introduit d'abord par Navier, par Poisson, par lord Rayleigh, par W. Thomson et Tait, puis, d'une manière plus systématique et plus générale, par Helmholtz et par nous-même, est l'*action de viscosité;* elle dépend des *vitesses* (dérivées par rapport au temps des variables normales) et s'annule avec elles.

Ainsi complétées, les équations du mouvement restent en

---

([1]) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3e Partie, Chapitre II, n° 2 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. X, p. 225; 1894).

désaccord avec des classes étendues de phénomènes, tels que les effets du frottement et les faux équilibres chimiques; il faut donc les modifier encore en introduisant un nouveau terme, l'*action de frottement;* ce terme ne tend plus vers zéro lorsque toutes les vitesses tendent vers zéro; de plus, la valeur limite vers laquelle il tend change selon que ces diverses vitesses tendent vers zéro par valeurs positives ou par valeurs négatives.

Ces principes ont été posés par nous ([1]) en 1896. Ils sont repris par Robin (p. 242). Robin leur laisse d'ailleurs cette forme très générale, tandis que nous avions poussé plus avant la détermination des termes de frottement. Il ne peut donc mener bien loin les conséquences de ces principes; en fait, il se borne à en établir une seule, dont nous allons dire quelques mots.

Lorsqu'on introduit, dans les équations de la Dynamique générale, des termes de frottement, on modifie, par le fait même, les lois de la Statique; les conditions d'équilibre sont représentées non plus par des équations, mais par des inéquations, en sorte que ces états d'équilibre forment un *continuum*. Dans son immortel Ouvrage *Sur l'équilibre des substances hétérogènes,* Gibbs avait déjà observé, en analysant les résultats de l'expérience la plus obvie, que les faux équilibres chimiques présentaient ce caractère; mais il n'avait pas tenté de donner aux lois de la Dynamique et de la Statique une forme analytique qui le reproduisît. Nous avons montré ([2]) que ce caractère découlait des hypothèses que nous avions faites sur la dynamique des systèmes affectés de frottement. Robin démontre également (p. 246) l'existence de ce *continuum* d'équilibre.

Cette démonstration termine réellement l'œuvre de Robin sur la Thermodynamique générale. Le Chapitre XIV traite de *quelques propriétés thermiques des corps rattachés à la théorie des mouvements stationnaires;* il reproduit des recherches plus anciennes dans l'œuvre de Robin; ces recherches se rattachent

---

([1]) *Théorie thermodynamique de la viscosite, du frottement et des faux équilibres chimiques;* 2e Partie : *du Frottement* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* 5e série, t. II; 1896).

([2]) *Théorie thermodynamique de la viscosite, du frottement et des faux équilibres chimiques,* 2e Partie, Chap. I, § 2 (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* 5e série, t. II; 1899).

aux efforts de Clausius pour retrouver le théorème de Carnot, à partir de l'hypothèse des mouvements stationnaires; elles découlent de méthodes physiques que Robin a rejetées plus tard (p. x).

Les bornes que cette étude ne saurait excéder ne nous ont pas permis d'être complet; elles nous ont obligé de choisir parmi les questions traitées en ce Livre, court de forme, mais riche de fond; nous avons cru être utile au lecteur en analysant les Chapitres qui nous paraissaient prêter à discussion, de préférence à ceux dont nous n'aurions eu qu'à louer la netteté et la rigueur; si notre compte rendu semble plus sobre d'éloges que de critiques, l'explication en est là et non dans la valeur même du Livre de Robin.

Des discussions qui se sont développées devant lui, le lecteur conclura du moins que ce Livre suggère des idées et qu'il fait penser. Or, dans le domaine si neuf, si peu exploré, de la Thermodynamique générale, on ne saurait, sans grande audace, se proposer de construire un système définitif. Dès lors, faire penser n'est-il pas l'objet que doit surtout se proposer un esprit doué d'originalité? N'est-ce pas le but que visait G. Robin?

P. Duhem.

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Sonnet (H.). — *Dictionnaire des Mathématiques appliquées, contenant les principales applications des Mathématiques à l'architecture, à l'arpentage, à l'artillerie, à la charpente, etc.* 6e édit. In-8° à 2 col. IV-1478 p. avec 1900 fig. Paris, Hachette et Cie. 30 fr.

Sturm (R.). — *Elemente der darstellenden Geometrie.* 2e édition, gr. in-8°, V-157 p. avec 61 fig. et 7 planches. Leipzig, Teubner. Relié. 5 m. 60 pf.

Larmor (J.). — *Aether and matter; development of dynamical relations of æther to material systems on basis of atomic constitution of matter, includ. discussion of influence of earth's motion on optical*

*phenomena*. Adam's Prize Essay in Cambridge Univ. In-8°, 394 p. London, Clay. 10 sh.

MEMOIRES presented to the Cambridge Philosophical Society on the occasion of the Jubilee of Sir G.-G. Stokes. In-4°. London, Clay. 21 sh.

REYNOLDS (O.). — *Papers on mechanical and physical objects*. In-8°. London, Clay. 15 sh.

TAIT (P.-G.). — *Scientific Papers*. Vol. II. In-4°. London, Clay. 25 sh.

WIEN (W.). — *Lehrbuch der Hydrodynamik*. Gr. in-8°, XIV-319 p. avec 18 Fig. Leipzig, Hirzel. 8 m.; gebd., 9 m.

KLEIN (F.). — *Ueber die Neueinrichtungen für Elektrotechnik u. allgemeine technische Physik an der Universität Göttingen*. Mit einer Antwort auf die von Prof. Slaby in d. Sitzg. d. preuss. Herrenhauses vom 30. III 1900 gehaltenen Rede. Gr. in-8°, 23 p. Leipzig, Teubner. 60 pf.

ANDRÉ (CH.). — *Traité d'Astronomie stellaire*. T. II. *Étoiles doubles et multiples, amas stellaires*. Gr. in-8° avec 74 fig. et 3 pl. Paris, Gauthier-Villars. 14 fr.

CALINON (A.). — *Étude de Géométrie numérique*. In-8°, 35 p. avec fig. Paris, Berger-Levrault et Cie. 2 fr.

COUTURAT (L.). — *De l'Infini mathématique*. In-8°, XXIV-671 p. Paris, Alcan.

ENCYKLOPÄDIE *der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen*. Herausgeg von H. Burkhardt u. W. F. Meyer. 1. Thl. : *Reine Mathematik*. 1. Bd. *Arithmetik u. Algebra*. Red. von W. F. Meyer. 5. Heft. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 6 m. 40 pf.

FRICKE (R.). — *Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik m. Berücksichtigg. der Anwendungen. Analytische Functionen*, theoret. Thl. Gr. in-8°, IX-520 p. avec 102 fig. Leipzig, Teubner. Relié. 14 m.

HANDWÖRTERBUCH *der Astronomie*, herausgeg. von W. Valentiner. 21 Lfg. gr. in-8°. Breslau, Trewendt. 3 m. 60 pf.

OPITZ (H.-R.-G.). — *Die Kramp-Laplace'sche Transcendante u. ihre Umkehrung*. In-4°, 29 p. Berlin, Gaertner. 1 m.

1re Partie.

## COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ARZELA (C.). — Lezioni di Calcolo infinitesimale date nella R. Università di Bologna. 1 vol. in-8; IV-436 pages. Firenze, Le Monnier; 1901.

Ces Leçons s'adressent à des étudiants déjà formés, qui ont l'habitude de l'abstraction, et veulent acquérir des connaissances approfondies en Mathématiques. L'exposition est claire : on y sent le souci de la rigueur et le désir de ne laisser de côté aucune difficulté.

Après un court Chapitre relatif à la notion de *limite* et d'*ensemble,* l'auteur aborde immédiatement la notion d'intégrale définie : c'est un ordre qui peut se défendre par d'excellentes raisons tant théoriques que pratiques. Notons que l'auteur a même voulu placer cette notion, non seulement avant celle de *dérivée,* mais avant celles de *continuité* et de *discontinuité.* Après avoir étudié les dérivées, M. Arzelà montre l'usage des fonctions primitives pour la détermination des intégrales indéfinies : la méthode de substitution est exposée avec le soin et les détails qu'elle comporte. Après avoir traité des quadratures classiques, l'auteur s'arrête sur les cas où la fonction sous le signe somme passe par l'infini et sur celui où les limites d'intégration sont infinies : il s'occupe ensuite de la rectification des courbes, puis de la formule de Taylor, et des applications analytiques de cette formule. Les deux derniers Chapitres sont consacrés aux séries de fonctions : on remarquera le soin avec lequel l'auteur a traité de la convergence uniforme et des conséquences que l'on peut tirer de l'hypothèse qu'une série converge uniformément. Le dernier Chapitre est consacré aux séries de Taylor et de Maclaurin. L'auteur reste dans le domaine des nombres réels.

KRONECKER (L.). — Vorlesungen über Mathematik von Leopold Kronecker, herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Kommission. In zwei Teilen. Zweiter Teil. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Bearbeitet und herausgegeben von Dr Kurt Hensel. Erster Abschnitt. Vorlesungen über Zahlentheorie. Erster Band, 1 vol. in-8°, xvi-509 pages. Teubner; 1901.

Exposer la Théorie des nombres de manière que cette exposition gardât la marque personnelle de Kronecker, de manière aussi que le lecteur trouvât là un *Lehrbuch*, un livre où il pût apprendre la Théorie des nombres, tel est le but que s'est proposé M. Hensel, et qu'il a atteint, dans ce premier Volume; il sera sûrement atteint de la même façon dans ceux qui suivront.

Sans doute les documents ne manquaient pas à M. Hensel, et il a eu à sa disposition des notes et des rédactions très complètes, qu'il énumère soigneusement. Nul doute cependant qu'il lui restât beaucoup à faire. L'enseignement oral, surtout lorsqu'il est élevé, diffère beaucoup de l'enseignement écrit du *livre*. Et, s'il en était autrement, il n'y aurait qu'à supprimer l'enseignement oral. Celui-ci s'adresse à des auditeurs qui connaissent en partie le sujet que traite le maître, qui peuvent, soit par eux-mêmes, soit par des lectures appropriées, combler les lacunes qu'ils sentent ou qu'on leur montre, qui désirent qu'on les conduise rapidement vers ces régions à demi connues, d'où ils partiront eux-mêmes pour les voyages de découvertes qu'ils ont hâte d'entreprendre. Aussi le maître se plaît-il à approfondir une question, à suivre une galerie de mine jusqu'au bout; une autre année, c'est une autre galerie qu'il suivra. Cela n'exclut pas sans doute les moments de halte, les repos aux carrefours que l'on rencontre, les vues générales sur les diverses directions que l'on peut suivre. Il eût sans doute été impossible à Kronecker de ne pas exposer de vues générales. L'auditeur d'un Cours retrouvait, une autre année, les mêmes idées dans un autre Cours, mais la région explorée en détail changeait.

Kronecker désirait lui-même faire un livre de ses leçons; il en méditait le plan; il en parlait et M. Hensel devait être naturelle-

ment un de ceux à qui il en parlait le plus volontiers; mais Kronecker n'était jamais satisfait de ce plan; jamais il ne le trouvait assez systématique; il n'a pas eu le temps même de l'esquisser autrement que par la parole, et c'est son disciple qui a dû s'efforcer de le réaliser.

Ce premier Volume contient une Introduction et quatre Parties, dont j'essaie, dans ce qui suit, d'indiquer rapidement l'objet.

L'Introduction contient des vues historiques et des généralités sur la nature des problèmes et des méthodes arithmétiques. L'auteur y explique ce que nous devons aux Grecs et aux Arabes; il s'étend quelque peu sur Fermat, sur son « petit » et son « grand » théorème; il rappelle les services d'Euler, de Lagrange et de Legendre, puis, après avoir analysé les *Disquisitiones*, ceux de Dirichlet, de Jacobi et de Kummer, il indique enfin les liens qui relient l'Arithmétique à l'Algèbre, d'une part, à l'Analyse, de l'autre.

La première Partie débute par des considérations sur la nature du nombre (ordinal) et les propositions fondamentales sur les opérations. L'auteur développe ensuite les propriétés élémentaires concernant la divisibilité, les nombres premiers, les congruences, les fractions continues, la fonction $\varphi(n)$, enfin les théorèmes de Fermat et de Wilson : signalons la dernière Leçon, où est introduit et étudié le concept d'*invariant* d'une congruence.

Dans la seconde Partie, l'auteur développe la notion de domaine de rationalité, et la théorie des systèmes de modules. La notion de congruence suivant un module s'élargit par la considération des congruences suivant un système de modules. L'auteur traite de l'équivalence des systèmes de modules, du plus grand commun diviseur (arithmétique et algébrique), de la décomposition et de la réduction des systèmes de modules. Les liens (ou plutôt l'unité) de l'Arithmétique et de l'Algèbre apparaissent là clairement. L'introduction de la théorie du système de modules dans le domaine des fonctions de plusieurs variables conduit, en particulier, par la notion de *rang*, à d'importantes interprétations en Géométrie analytique.

C'est dans la troisième Partie que l'Analyse va commencer de jouer un rôle essentiel. Après avoir établi les propriétés de la fonction $\varphi(n)$ qui sont nécessaires pour ce qui va suivre, l'auteur étudie avec détails les séries de Dirichlet et en montre l'importance

par diverses applications. Une leçon est consacrée à la théorie de la division du cercle. Puis vient l'étude du nombre de nombres premiers à un nombre donné, compris entre deux nombres donnés. L'allure irrégulière des fonctions artihmétiques ferait volontiers désespérer de toute représentation analytique; mais cette irrégularité disparaît souvent par la considération des valeurs moyennes (limites), et Kronecker en donne une suite de beaux exemples.

La quatrième et dernière Partie est consacrée d'une part à la théorie des restes de puissances, de l'autre au développement du théorème de Dirichlet sur l'existence d'un nombre infini de nombres premiers de la forme $ax + b$, lorsque $a$ et $b$ sont des entiers premiers entre eux. La théorie des restes de puissances amène à la théorie des congruences de degré quelconque suivant un module premier, et celle-ci à la théorie des congruences linéaires à plusieurs inconnues. Quant à la démonstration de Dirichlet, on sait que Kronecker l'a complétée sur un point important, en montrant comment à chaque nombre $\mu$, si grand qu'il soit, on peut faire correspondre un nombre $\mu'$ tel que, entre $\mu$ et $\mu'$ il y ait au moins un nombre premier de la forme considérée. M. Hensel fait observer que la question qu'a ainsi résolue Kronecker rentre dans le genre de questions qu'il regardait comme inévitables. Pour lui, un théorème d'existence n'était vraiment démontré que lorsqu'on avait donné le moyen d'*atteindre* l'objet même dont on voulait établir l'existence.

Enfin M. Hensel a réuni, à la fin du Volume, un certain nombre de Notes intéressantes, soit au point de vue bibliographique et historique, soit au point de vue des lacunes qu'il a dû combler pour faire, avec les matériaux qui provenaient directement de Kronecker, un livre qui ne fût pas incomplet.

L'œuvre pieuse qu'il a entreprise lui vaudra la reconnaissance de tous ceux qui aiment l'Arithmétique, et qui admiraient le génie de celui dont il a voulu faire revivre la parole.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXV.

# TABLES

DES

# MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

## TOME XXV; 1901. — PREMIÈRE PARTIE.

---

# TABLE ALPHABÉTIQUE

## DES MATIÈRES.

---

### COMPTES RENDUS ET ANALYSES.


Pages.

ANDRÉ (CH.). — Traité d'Astronomie stellaire. Tome I : étoiles simples; Tome II : étoiles doubles et multiples ..... 161-172

ANDRÉ (D.). — Organisation et comptabilité des assauts complets ..... 91-94

ARZELÀ (C.). — Lezioni di Calcolo infinitesimale date nella R. Universita di Bologna ..... 205

AUPETIT. — Essai sur la théorie générale de la monnaie ..... 136-137

BOREL (E.). — Leçons sur les séries divergentes ..... 61-71

BOURGET (H.). — Sur une classe particulière des groupes hyperabéliens. 173-174

BRIOSCHI (F.). — Opere matematiche. Tome I ..... 94-96

BRÜCKNER (M.). — Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte.... 53-55

BÜHL (A.). — Sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe ..... 96-98

BURLEANT (N.). — Méthode de balistique extérieure ..... 160

DAVIDOGLOU (A.). — Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques ..... 130-131

ESTANAVE (E.). — Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince dont deux bords opposés au moins sont appuyés sur un cadre ..... 127-130

FOUCAULT (A.). — La Psychophysique ..... 101-113

GODEFROY (M.). — La fonction gamma. Théorie, histoire, bibliographie. 131-132

HANCOCK (H.). — Mémoire sur les systèmes modulaires de Kronecker.. 137-138

Pages.

HEGER (R.). — Fünfstellige logarithmische und goniometrische Tafeln. 14-16
HENSEL (K.). — *Voir* KRONECKER.
HILL (J.). — The contents of the fifth and sixth Books of Euclid, arranged and explaned ..... 45
KIEPERT (L.). — Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. Theil I ..... 80
KNESER (A.). — Lehrbuch der Variationsrechnung ..... 5-8
KRONECKER (L.). — Vorlesungen über Mathematik. Zweiter Theil. Erster Abschnitt. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik ..... 206-208
LORENZ (H.). — Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffs-Maschinen ..... 16-17
LORIA (GINO). — Le Scienzie esatte nell' antica Grecia. Libro III ..... 85-90
LÜROTH (J.). — Vorlesungen über numerisches Rechnen ..... 12-14
PASCAL (E.). — Repertorium der höheren Mathematik ..... 132
PEANO (G.). — Formulaire de Mathématiques ..... 141-159
POINCARÉ (H.). — Cours de Physique mathématique. Électricité et Optique. La lumière et les théories électrodynamiques ..... 118-130
MICHEL (CH.). — Sur les applications géométriques du théorème d'Abel. 138-139
RAYLEIGH (baron J.-W.). — Scientifics Papers. Tome II ..... 117-118
ROBIN (G.). — Œuvres scientifiques réunies et publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, par L. Raffy (Physique mathématique) ..... 141-159
ROBIN (G.). — Œuvres scientifiques (Thermodynamique) ..... 174-203
ROUCHÉ et LÉVY (L.). — Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs. Tome I : Calcul différentiel ..... 8-14
RUSSELL (B.). — Essai sur les fondements de la Géométrie. Traduction par A. Cadenat ..... 79
STOLZ (O.) et GMEINER (J.). — Theoretische Arithmetik. I. Abtheilung. 35-37
SUTER (H.). — Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke ..... 55-56
VOGT (H.). — Éléments de Mathématiques supérieures ..... 77-79
WEBER (H.). — Die partiellen Differential- Gleichungen der Mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen ..... 33-35
WEISS (H.). — Grundsätze der Kinematik. Erstes Heft ..... 56-60

## MÉLANGES.

ALENEAR SILVA (O. DE). — Sur l'équation de Riccati ..... 31-32
DOLBNIA (J.). — Sur un cas de réductibilité des intégrales abéliennes.. 114
HADAMARD (J.). — Sur les réseaux de coniques ..... 27-30
HADAMARD (J.). — Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions... 37-40
LELIEUVRE. — Sur la multiplication de l'argument des fonctions elliptiques ..... 41-44
LINDELÖF (E.). — Théorème sur la convergence uniforme des séries .... 46-52
MINKOWSKI (H.). — Quelques nouveaux théorèmes sur l'approximation des quantités à l'aide de nombres rationnels ..... 72-76

Pages.

PICARD (E.). — Sur les principes de la Mécanique et l'explication mécanique des phénomènes naturels..... 17-24

PICARD (E.). — Sur la résolution de certaines équations à deux variables à l'aide de fractions rationnelles et sur un théorème de M. Nœther... 81-84

SAINT-GERMAIN (A. DE). — Mécanique. Note sur la tension de la tige d'un pendule sphérique..... 98-100

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXV

0

30068 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

# COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*.

H. POINCARÉ.

J. TANNERY.

E. PICARD.

P. APPELL.

FOUSSEREAU, *secrétaire*.

## AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

30068 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BOUGAIEFF, BROCARD, GOURSAT,
KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

**Sous la direction de la Commission des Hautes Études.**

—

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1900 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

---

*DEUXIÈME SÉRIE.*

**TOME XXV. — ANNÉE 1901.**

(XXXVI^e VOLUME DE LA COLLECTION.)

---

SECONDE PARTIE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

## SECONDE PARTIE.

### REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

THE MESSENGER OF MATHEMATICS.

Tome XXVIII; 1898-1899 (1).

*Glaisher.* — Table des valeurs de l'expression $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{x-1}{x}$ où les facteurs du dénominateur forment la suite des nombres premiers. (1-17).

La table calculée par M. Glaisher donne avec sept décimales les valeurs de l'expression précédente et de son logarithme jusqu'à $x = 9973$.

*Nanson.* — Sur les compositions partielles. (17-19).

Généralisation de théorèmes sur la multiplication des déterminants dus à Sylvester et à M. Muir.

*Lodge.* — Approximation simple des intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce. (19-28).

Les formules sont obtenues, pour l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

(1) Voir *Bulletin*, XXIII$_2$, p. 87.

par exemple, en donnant à $\theta$ certaines valeurs déterminées et regardant $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$ comme fixe et combinant les résultats ainsi obtenus; l'auteur discute le degré d'approximation obtenu.

*Glaisher.* — Note sur un théorème relatif à la somme des puissances paires des nombres naturels. (29-32).

En posant

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + x^n, \qquad S_0 = x + \frac{1}{2},$$

M. Glaisher établit la formule

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)S_{2n}}{2(x^2+x)} &= (2n+1)B_nS_0 \\ &+ [(2n+1)B_n - (2n+1)_3B_{n-1}]S_2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ [(2n+1)B_n - (2n+1)_3B_{n-1} + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-1}(2n+1)_{2n-1}B_1]S_{2n-2}.\end{aligned}$$

$n_r$ désigne, suivant l'habitude de M. Glaisher, le coefficient

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\ 2\ldots r};$$

$B_1$, $B_2$, ..., sont les nombres de Bernoulli. Cette formule est à rapprocher d'une formule analogue donnée par l'auteur dans le Tome XX du *Messenger*.

*Reynolds* (*B.*). — Note sur les fractions périodiques. — Sur la longueur de la période de $\frac{1}{N}$ et sur sa divisibilité par N, pour diverses bases de numération. (33-36).

*Glaisher.* — Classes de formules récurrentes contenant les nombres de Bernoulli. (36-79).

Les nombres $\alpha_n$, $\beta_n$ qui se présentent dans les développements en série

$$\tang\frac{x}{2} = \frac{\alpha_1}{2!}x + \frac{\alpha_2}{4!}x^3 + \frac{\alpha_3}{6!}x^5 + \ldots,$$

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{\beta_1}{2!}x^2 + \frac{\beta^2}{4!}x^4 + \ldots,$$

sont liés très simplement, comme on sait, aux nombres de Bernoulli : l'auteur montre qu'il y a lieu cependant de les considérer à part. D'une façon générale il étudie une suite de relations récurrentes relatives à des quantités de la forme

$$(a^{2n+1}-1)(b^{2n+1}-1)(c^{2n+1}-1)\ldots B_n,$$

ou

$$(a^{2n}-1)(b^{2n}-1)(c^{2n}-1)\ldots B_n,$$

$B_n$ étant un nombre de Bernoulli et $a$, $b$, $c$, ... des nombres quelconques. Ces

relations contiennent comme coefficients les valeurs du polynome de Bernoulli pour des valeurs fractionnaires de la variable.

*Nanson.* — Sur l'équation d'une courbe plane entre le vecteur $r = x + iy$ qui aboutit en un point de la courbe et le vecteur $\rho = \xi + i\eta$ qui aboutit au pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente en ce point. (80-84).

*Miller.* — Sur le nombre total de groupes de substitutions transitives qui ont un isomorphisme $(1, \alpha)$ avec un groupe donné. (84-87).

*Reynolds* (*B.*). — Nouvelles Notes sur les fractions périodiques pour diverses bases de numération. (88-91).

*Burnside.* — La trigonométrie de l'hexagone gauche rectangulaire (92-96).

Cette figure se rencontre dans la théorie de la composition de deux déplacements finis d'un corps solide. L'auteur établit des relations entre les lignes trigonométriques des angles des côtés non consécutifs, relations qui contiennent comme cas particulier les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique.

*Campbell.* — Sur les transformations qui n'altèrent pas l'équation $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = 0$. (97-102).

Recherche des transformations infinitésimales qui n'altèrent pas cette équation; groupes continus qu'elles engendrent.

*Burnside.* — Représentation d'un groupe d'ordre fini comme un groupe de substitutions. (102-103).

*Miller.* — Sur les groupes qui peuvent être représentés comme des groupes de substitutions plusieurs fois transitifs. (104-107).

*Nanson.* — Sur la résolution d'un système d'équations linéaires et d'une équation quadratique. (107-111).

Solution élégante fondée sur la forme donnée par Sylvester au résultat de l'élimination de toutes les variables sauf deux.

*Burnside.* — Sur la forme canonique d'une substitution linéaire d'ordre fini. (111).

Cette forme bien connue, établie par M. Jordan en 1878, est démontrée à nouveau, d'une façon purement élémentaire, par induction.

*Biddle.* — Sur la décomposition en facteurs. (116-149).

L'auteur, qui dirige la partie mathématique de l'*Educational Times,* donne quatre méthodes pour la recherche des diviseurs d'un nombre entier; à son travail est joint une Table numérique donnant les trois derniers chiffres des couples de carrés dont la différence est un nombre impair N dont on connaît les trois derniers chiffres.

*Miller.* — Sur la représentation d'un groupe d'ordre fini comme groupe de sustitutions. (149-150).

Cette Note, ainsi qu'une Note précédente de M. Burnside, se rapportent à la définition de l'équivalence entre deux groupes de substitutions.

*Routh.* — Sur le mouvement de la bicyclette. (151-169).

Étude du mouvement stable et des oscillations dans le cas d'un mouvement rectiligne et d'un mouvement circulaire.

*Brandford.* — Valeur générale de la différentielle totale $n^{\text{ième}}$ d'une fonction quelconque d'un nombre quelconque de variables dépendantes ou non. (169-174).

Loi des coefficients numériques.

*Goodwin.* — Sur le mouvement d'un corps solide à quatre dimensions dans l'espace à quatre dimensions. (175-183).

Cas où il y a un point fixe.
Établissement des formules qui généralisent celles d'Euler.

*Glaisher.* — Sur la divisibilité de la somme des produits des $n$ premiers nombres pris $r$ à $r$. (184-186).

En désignant cette somme par $S_r$, on a

$$S_r \equiv 0 \pmod{n+1}, \qquad S_{n-1} \equiv 0 \left[\bmod (n+1)^2\right],$$

en supposant $n+1$ premier et $> 3$; ces résultats sont dus respectivement à M. Ferrers et à M. Wohlstenholme. L'auteur donne une suite de propositions du même genre, mais qui ne supposent pas toujours qu'on ait affaire à des nombres premiers. Par exemple, si $n$ est pair

$$S_r \equiv 0 \pmod{n+1},$$

pour $r$ impair : la même congruence subsiste si $n+1$ est premier $> 3$, pour $r$ pair; de même

$$S_r \equiv 0 \pmod{n},$$

si $n$ et $r$ sont impairs, etc.

*Houston.* — Note sur les courbes planes unicursales. (187-189).

Ces courbes ont le nombre maximum de points doubles; la démonstration ne suppose pas que la courbe soit sans rebroussement.

*Curjel.* — Note sur les hypersolides réguliers. (190-191).

*Biddle.* — Correction au Mémoire sur la décomposition en facteurs. (192).

T. XXIX, 1899-1900.

*Dixon.* — Sur certains systèmes articulés. (1-21).

Le point de départ est dans la considération d'un système de huit tiges articulées dont quatre ont une extrémité fixe, les quatre pivots A, B, L, K étant en ligne droite, et dont les quatre autres forment un parallélogramme EDFC; les quatre sommets de ce parallélogramme décrivant des cercles, pour une disposition convenable, parce que, si le pentagone AEDCF a des angles égaux en E et C, le point D décrit un cercle. L'auteur étudie aussi la question de savoir si les sommets d'un quadrilatère articulé peuvent se mouvoir sur quatre cercles; il montre le lien de cette question avec la théorie des fonctions elliptiques. Chemin faisant, il généralise une proposition de géométrie, due à M. Weill, sur le centre des moyennes distances des points de contact d'un polygone inscrit dans un cercle fixe et circonscrit à un cercle fixe, en remplaçant ce cercle unique par un système de cercles ayant le même axe radical.

*Nanson.* — Note sur une classe d'identités algébriques. (22-23).

*Nanson.* — La généralisation du théorème de Vandermonde. (24).

*Hardy.* — Sur une classe d'intégrales définies contenant des fonctions hyperboliques. (25-42).

Évaluation d'intégrales du type

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{a(e^x \pm e^{-x}) + b} R(x)\, dx,$$

où $R(x)$ est une fonction rationnelle, par la méthode de Cauchy, les constantes étant telles que l'intégrale ait un sens. Cette méthode, quand on prend pour $R(x)$ une fonction simple correspondant à un pôle simple, permet de transformer l'intégrale en une série qui se laisse sommer pour certaines valeurs particulières des constantes. L'auteur parvient ainsi à un très grand nombre d'intégrales définies.

*Gosset (Th.).* — Sur les figures régulières ou semi-régulières dans un espace à $n$ dimensions. (43-48).

Liste de ces figures dans un espace euclidien à $n$ dimensions ($n > 3$); l'auteur était en possession de ces résultats depuis plusieurs années; dans le cas

des figures régulières, son énumération coïncide avec celle qu'a donnée M. Curjel dans le *Messenger;* la liste des hypersolides semi-réguliers est nouvelle.

## *Glaisher.* — Théorèmes fondamentaux relatifs aux nombres de Bernoulli. (49-63).

Il s'agit de théorèmes connexes au célèbre théorème de Standt sur la partie fractionnaire du $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli $B_n$. M. Glaisher désigne, sous le nom de *facteur de Standt* de $B_n$, les nombres premiers $p$ qui figurent comme dénominateur dans cette partie fractionnaire, c'est-à-dire les nombres premiers $p$ tels que $p-1$ divise $2n$.

M. Glaisher établit en particulier la congruence

$$\frac{B_n}{n} \equiv (-1)^{tj} \frac{B_{n-tj}}{n-tj} \pmod{p},$$

où $p$ est un nombre premier qui n'est pas un facteur de Standt pour $B_n$. $j$ est mis à la place de $\frac{p-1}{2}$, $t$ est un nombre entier tel que $n-tj$ soit positif.

Cette proposition contient comme cas particulier un théorème énoncé par Sylvester en 1861, d'après laquelle, $p^i$ étant un diviseur de $n$ et de $p-1$ ne divisant pas $n$, $p^i$ doit diviser le numérateur de $B_n$; en particulier, si $n$ est premier, le numérateur de $B_n$ est divisible par $n$.

L'auteur établit, chemin faisant, d'intéressantes relations de récurrence pour la fonction

$$\Psi_n(a) = \frac{(a^{2n}-1)B_n}{2n},$$

où $a$ est un nombre entier; la démonstration du précédent théorème se fonde d'ailleurs sur la congruence

$$\Psi_n(a) \equiv (-1)^{tj}\Psi_{n-tj} \pmod{p},$$

d'où l'auteur tire une nouvelle démonstration du théorème de Standt.

L'examen des cas particuliers montre la portée de ces théorèmes; ainsi le cas de $p=5$ conduit à une règle pour la détermination du dernier chiffre du numérateur de $B_n$.

## *Barness.* — La théorie de la fonction gamma. (64-128).

Cet intéressant travail, où l'auteur s'est rencontré en quelques points relatifs à l'extension de la fonction $\zeta$ de Riemann, avec M. Mellin [*Ueber eine Verallgemeinerung der Riemannschen Function* $\zeta(s)$ (*Acta Societatis Fennicæ,* t. XXIV, 1899)], peut être considéré comme l'introduction à un Mémoire de l'auteur, qui a obtenu le premier *prix de Smith* à l'Université de Cambridge en 1898. Il est divisé en cinq parties.

La première est une exposition élémentaire des propriétés fondamentales de la fonction $\Gamma(z)$ ou plutôt de la fonction homogène en $z$, $\omega$

$$\Gamma_1(z \mid \omega) = \omega^{\frac{z}{\omega}-1}\Gamma\left(\frac{z}{\omega}\right),$$

analogue à l'introduction classique de la fonction $\wp(u \mid \omega, \omega')$.

La seconde partie est un résumé des propriétés du polynome de Bernoulli $S_n(x, \omega)$ défini par l'égalité

$$S_n(a+\omega \mid \omega) - S_n(a \mid \omega) = a^n,$$

qui sont nécessaires pour la suite.

Dans la troisième partie, on considère des intégrales curvilignes liées à la fonction $\Gamma$. Par un ingénieux procédé de passage à la limite, la définition de la fonction $\Gamma$ par un produit infini est remplacée par l'intégrale définie

$$\frac{1}{\Gamma_1(z \mid \omega)} = \frac{i}{2\pi}\int (-y)^{-\frac{z}{\omega}} e^{-\frac{y}{\omega}} dy,$$

où le contour (illimité) d'intégration embrasse en quelque sorte la demi-droite qui part du point O et passe par le point $\omega$; l'auteur introduit de même la fonction

$$\zeta(s, a, \omega) = \frac{i\Gamma(1-s)}{2\pi}\int \frac{e^{-az}}{1-e^{-\omega z}}(-z)^{s-1} dz,$$

où le contour d'intégration embrasse cette fois la demi-droite qui part du point O et passe par le point $\omega^{-1}$; cette fonction généralise la fonction $\zeta(s)$ de Riemann que l'on obtient pour $a = \omega$. L'auteur parvient ensuite à la formule asymptotique

$$\zeta(s, a, \omega) - \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{1}{(a+n\omega)^s} = -\frac{1}{1-s}\frac{1}{a^s m^{s-1}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \binom{-s}{n} \frac{S'_n(a \mid \omega)}{(s+n-1)(m\omega)^{n+s-1}},$$

qui rentre dans une catégorie de développements étudiés par M. Poincaré. Cette formule est l'objet de diverses transformations, où l'auteur utilise les recherches de M. Borel sur les séries sommables.

Dans la quatrième partie, il établit une expression asymptotique de la fonction $\Gamma$ pour les valeurs réelles ou complexes de la variable.

Enfin, la dernière partie contient une démonstration nouvelle de ce fait que la fonction $\Gamma$ n'est solution d'aucune équation différentielle dont les coefficients soient des fonctions de $z$ telles que les fonctions algébriques, les fonctions simplement ou doublement périodiques.

## *Glaisher*. — Théorèmes fondamentaux relatifs aux nombres de Bernoulli. (129-142).

*Voir* plus haut.

## *Morrice*. — Sur la transformation linéaire par inversion. (143-144).

L'interprétation connue de M. Klein relative aux génératrices d'une quadrique est remplacée par une interprétation dans un système de coordonnées tétracycliques.

*Cunningham.* — Nombre de chiffres dans les périodes. (145-180).

*Elliot.* — Démonstration d'un fait fondamental dans la théorie des fonctions de différences.

Une fonction rationnelle entière de poids $w$ et de degrés partiels $i_1, i_2, \ldots, i_p$ par rapport aux variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ qui est une fonction des différences de ces quantités, peut être exprimée comme une somme de produits (multipliés par des coefficients numériques) de $w$ différences entre ces variables et de telle façon que dans chaque produit, $\alpha_1$ ne figure pas plus de $i_1$ fois, $\alpha_2$ plus de $i_2$ fois, etc.

*Bromwich.* — Une identité algébrique avec deux applications géométriques. (184-191).

Les deux équations simultanées

$$f(x, y, z) = 0, \qquad x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

où $f$ est une forme quadratique de déterminant $\Delta$, entraînent celles-ci

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}}{yz_0 - y_0 z} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}}{zx_0 - z_0 x} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}}{xy_0 - x_0 y} = \sqrt{-\frac{\Delta}{f(x_0, y_0, z_0)}}.$$

Rayon de courbure en coordonnées tangentielles. Conditions pour qu'une droite soit génératrice d'une quadrique à centre.

*Hudson.* — Note sur la réciprocation. (191-192).

---

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

Tome XL; 1895 (1).

*Sturm* (*R.*). — Propriétés métriques des cubiques gauches (1-14).

Degré et classe de divers lieux attachés aux cubiques gauches; nombre d'éléments satisfaisant à des conditions données; les divers nombres sont obtenus par application du principe de correspondance. Par exemple : les axes des cercles de courbure engendrent une surface développable du douzième ordre, de la septième classe; le lieu des centres de courbure est du quinzième ordre. Par un point passent douze sphères osculatrices.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. $XXIII_2$, p. 173.

*Mehmke.* — Logarithmes d'addition pour les nombres complexes. (15-30).

Les Tables construites par M. Mehmke donnent les valeurs de $b$, $\beta$ définies par la formule

$$10^b(\cos\beta + i\sin\beta) = 10^a(\cos\alpha + i\sin\alpha) + 1,$$

quand on se donne $a$ et $\alpha$; $\alpha$ et $\beta$ sont exprimés en grades; l'auteur étudie aussi la variation de $b$, $\beta$ avec $a$, $\alpha$ et montre l'utilité pratique que présentent ses tables.

*Wölffing.* — Comment se comportent les courbes de Steiner, de Cayley et diverses autres courbes invariantes pour les points singuliers de la courbe fondamentale. (31-47).

Le point singulier est pris pour origine et les coordonnées d'un point de l'une ou l'autre des courbes de Steiner, Cayley, Salmon, ..., sont exprimées dans le voisinage du point considéré en fonction rationnelle d'un paramètre, au moyen des premiers coefficients numériques de la courbe fondamentale. L'application des formules de Plücker conduit ensuite à divers résultats numériques intéressants.

*Schur.* — Sur les figures réciproques de la statique graphique. (48-55).

Cremona a montré que la réciprocité que l'on rencontre en statique graphique était la même que celle qui existe entre les projections de deux figures réciproques par rapport à un *Nullsystem* (complexe linéaire), sans dire toutefois comment on pouvait construire le *Nullsystem* qui fournit ladite réciprocité : c'est ce que fait l'auteur pour les principaux systèmes articulés.

*Schlömilch.* — Sur la perspective du cercle. (56-58).

*Kinkelin.* — Construction du centre de courbure des coniques. (58-59).

Au moyen de la parabole tangente aux axes, à la tangente et à la normale à la courbe.

*Kurz.* — Les foyers de Bunsen. (60-64).

*Burmester.* — Réfraction homocentrique de la lumière par le prisme. (65-90).

*Wittenbauer.* — Sur les pôles d'inflexion d'une chaîne cinématique. (91-98).

Cette *chaîne cinématique* est formée d'une suite de plans (coïncidants) dont chacun est mobile par rapport à celui qui le précède; d'où une série de pro-

blèmes relatifs à la composition des mouvements qui concernent la construction des pôles d'inflexion, des pôles d'accélération, la composition des accélérations; les problèmes sont traités géométriquement dans une suite de trois Mémoires dont celui-ci est le premier.

*Beyel.* — Construction des courbes du troisième ordre au moyen de neuf points donnés et construction du neuvième point commun aux courbes d'un faisceau déterminé par huit points. (99-112).

Constructions déduites du Mémoire de l'Auteur paru dans le tome XXXVIII de la *Zeitschrift* sous le titre : *Darstellung der Curven dritter Ordnung und Klasse aus zwei Reciprocitäten.*

*Szüts* (*N. von*). — Pour la théorie des déterminants d'ordre supérieur. (113-117).

*Vollprecht.* — Sur la détermination du nombre de nombres premiers inférieurs à N au moyen des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{N}$. (118-123).

*Sporer.* — Démonstration d'un théorème de Jacob Steiner sur les cercles de courbure d'une ellipse. (123-124).

Sur les trois cercles de courbure qui passent par un point de l'ellipse.

*Schmidt.* — Preuve combinatoire du théorème de Wilson. (124-125).

*Schlömilch.* — Sur une proposition de la théorie des nombres de Legendre. (125).

Soit donnée une suite $p_1, \ldots, p_k$ de $k$ nombres premiers impairs; soit $\pi_i$ le $i^{\text{ième}}$ terme de la suite 3, 5, 7, 11, ... des nombres premiers impairs. Parmi les $\pi_{k-1}$ termes consécutifs d'une progression arithmétique dont la raison et le terme initial sont premiers entre eux, il y en a un au moins qui n'est divisible par aucun des nombres $p_1, \ldots, p_k$.

Cette proposition est inexacte (Piltz, Bachmann).

*Vahlen.* — Généralisation de la fonction $\varphi$ d'Euler. (126-127).

Sur la fonction

$$\varphi_{\alpha\beta}(n) = \Sigma F\left(\frac{m}{n}\right),$$

où $\frac{m}{n}$ est une fraction irréductible comprise entre $\alpha$, $\beta$.

*Vahlen.* — La transformation des formes quadratiques. (127-128).

Formule générale de décomposition en carrés.

*Kluyver.* — Représentations conformes que la fonction $\zeta$ permet d'obtenir. (129-150).

Il s'agit de la fonction

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}.$$

Représentation conforme sur le demi-plan de la surface extérieure à un polygone. L'auteur étudie successivement le cas du rectangle, du triangle rectangle isoscèle, du triangle équilatéral, du triangle dont les angles sont $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, ....

*Wittenbauer.* — Sur le pôle d'accélération dans le mouvement composé. (151-158).

*Sporer.* — Sur quelques courbes particulières de troisième ordre ou de troisième classe. (159-176).

Les points de départ de l'auteur sont dans la considération des cordes communes à une conique fixe et à une conique variable d'un faisceau, et des points de contact de deux courbes appartenant à deux faisceaux de cubiques. Signalons quelques rectifications de théorèmes de Steiner. Par exemple le lieu du point de rebroussement d'une cubique admettant un tel point et assujettie à passer par six points fixes est du douzième degré, et non du sixième comme l'indique Steiner.

*Ahrens.* — Un nouveau théorème sur les déterminants d'une matrice. (177-180).

Déterminants dont l'évanouissement entraîne l'évanouissement d'autres déterminants. Applications géométriques.

*Netto.* — Essais sur le Calcul intégral. (180-185).

Le second théorème de la moyenne est une conséquence du premier, quand on admet la continuité de l'intégrale définie considérée comme fonction de sa limite supérieure. — Calculs d'intégrales définies comme limites de sommes.

*Kurz.* — Sur la conduction de la chaleur dans la Terre. (185-192).

*Krüger.* — Congruences métriques de rayons dans une cubique gauche. (193-209).

Étant donnée une cubique gauche, un plan parallèle à un plan fixe déter-

mine un triangle dont les sommets appartiennent à la cubique. — Certains points remarquables (points de rencontre des hauteurs, des médianes, des perpendiculaires au milieu des côtés) décrivent des droites, lesquelles engendrent à leur tour des congruences, quand on fait varier la direction du plan. Ce sont ces congruences qu'étudie M. Krüger.

*Mehmke.* — Propriétés métriques des cubiques gauches. (211-241).

Signalons dans ce travail trois propositions qui permettent de traduire sous trois formes distinctes, dans la théorie des cubiques gauches, toute relation homogène entre des segments d'une même droite. Ces propositions permettent à l'auteur d'établir, pour les cubiques quelconques, une suite de théorèmes métriques qui généralisent immédiatement des propositions dues à M. Schröter (*Mathematische Annalen,* t. 25, p. 293) et qui se rapportent aux paraboles cubiques, c'est-à-dire aux cubiques gauches osculatrices au plan de l'infini. Cette extension pourrait sans doute se faire par collinéation : les démonstrations que donne M. Mehmke sont directes.

*Delaunay.* — Génération mécanique de la projection orthogonale des courbes planes, des ellipses et des trochoïdes. (242-244).

*Ahrens.* — Sur un théorème arithmétique de M. Schubert. (245-247).

*Lüroth.* — Démonstration des conditions pour que deux équations algébriques aient plusieurs racines communes. (247-251).

Au lieu d'exprimer que deux équations algébriques $f$ et $g$, des degrés $m$ et $n$, ont un diviseur commun du degré $p$, il est plus commode d'exprimer que $f$ et $g$ ont un commun multiple de degré $m + n - p$.

*Kurz.* — Capacités thermiques. Mélanges d'un liquide et d'une vapeur. (247-254).

*Beyel.* — Deux problèmes de perspective. (255-256).

*Müller (R.).* — Sur une certaine classe de mécanismes à liaison complète. (257-278).

Afin de relier les travaux de Hart (*Proceedings of the London mathematical Society,* t. VIII, p. 288), Kempe (*Ibid.*, t. IX, p. 138), Darboux (*Bulletin,* $III_2$, p. 144), Burmester (*Zeitschrift,* t. 38, p. 193; *Kinematik,* t. I, p. 571, 595, 578), l'auteur étudie la courbe (R) définie comme il suit : soit OO′R′R un quadrilatère articulé dont on regardera le côté OO′ comme fixe : soient, dans le plan de ce quadrilatère, S, S′ deux points reliés invariablement aux côtés OR, O′R′; soient SK, S′K deux tiges articulées en S, S′, K; la courbe (K) est le lieu du point K. Cette courbe est, en général, du quatorzième degré; elle admet les points cycliques comme points sextuples. Pour les mécanismes

2ᵉ Partie.



connus, elle se décompose en un cercle et une autre courbe; chaque mode de décomposition caractérise un mécanisme particulier.

*Wittenbauer.* — Sur les pôles d'accélération d'une chaîne cinématique. (279-295).

*Wiman.* — Sur le nombre des coniques déterminées par des points, des tangentes et des normales. (296-301).

Confirmation et rectification de résultats dus à Steiner.

*Schultz.* — Pour la transformation d'un système d'équations différentielles linéaires aux dérivées partielles. (302-311).

Si dans l'expression

$$A(z) = a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

les $a$, étant comme les $b$ dans l'équation qui va suivre, des fonctions des $x$, on substitue aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ les variables indépendantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ définies par les $n-1$ équations

$$\beta_i = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

qui fournissent les $n-1$ solutions distinctes de l'équation

$$B(z) = b_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + b_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

on est amené à considérer les expressions

$$A(\beta) = a_1 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial \beta}{\partial x_n} = l(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où $\beta$ est une quelconque des quantités $\beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. M. Schultz étudie le cas où la fonction $l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ par leurs valeurs en $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$, se présente sous la forme $g(x_n)\Phi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})$ et parvient à la conclusion suivante : Étant donné un système de $m$ équations linéaires aux dérivées partielles à $n$ variables indépendantes, sans second membre, ce système, au moyen des $n-1$ solutions distinctes de l'une des équations qui le constitue, se ramène à un système de $m-1$ équations à $n-1$ variables, sans que la condition de Jacobi $AB(z) - BA(z) = 0$ soit vérifiée, si, par la transformation, une fonction de la variable se met en facteur. Si cette fonction se réduit à une constante, le système est *complet* et la condition de Jacobi est vérifiée.

*Velten.* — Théorème de Géométrie sphérique qui correspond au théorème de Pythagore. (312-313).

*Heckhoff.* — Les surfaces de vis à courbure moyenne constante. (313-320).

Détermination de la fonction $f(v)$ de manière que la surface définie par les équations

$$x = v\cos u, \qquad y = v\sin u, \qquad z = gu + f(v),$$

où $g$ est une constante, soit telle que la somme des inverses des rayons de courbure soit constante.

*Burmester.* — Réfraction homocentrique de la lumière à travers une lentille. (321-336).

*Müller.* — Construction de la courbe focale au moyen de six points. (337-352).

Cette courbe est une cubique circulaire qui passe par le point de rencontre de ses asymptotes imaginaires. Outre la construction indiquée, l'auteur développe diverses propriétés de cette courbe focale.

*Wilsing.* — Sur la réfraction homocentrique de la lumière dans le prisme. (353-361).

*Thieme.* — Sur une surface particulière du troisième ordre à quatre points doubles. (362-369).

Lieu des points de l'espace tels que les droites qui les joignent à deux points fixes soient également inclinées sur un plan fixe.

*Schilling.* — Sur la représentation conforme de l'aire d'une lemniscate. (370-371).

*Beyel.* — Remarques sur le quadrilatère doublement centré. (372-375).

*Netto.* — Sur les équations aux dérivées partielles que vérifient les fonctions symétriques des racines d'une équation. (375-381).

Il s'agit principalement de la seconde des deux équations

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} x_\lambda^i \frac{\partial R}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (s_i c_{\lambda-1} - s_{i+1} c_{\lambda-2} + \ldots) \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \lambda s_{\lambda+i-1} \frac{\partial R}{\partial s_\lambda},$$

$$\sum_{\lambda=k}^{\lambda=n} c_{\lambda-k} \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = (-1)^{k-1} k \frac{\partial R}{\partial s_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots),$$

relatives aux fonctions symétriques R de racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'une équation

$$x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \ldots + c_n = 0,$$

établies par l'auteur dans le t. XXXVIII de la *Zeitschrift;* la démonstration est

fondée sur l'introduction des quantités

$$x_1 + \frac{x_1^i}{f'(x_1)}\,t,\quad x_2 + \frac{x_2^i}{f'(x_2)}\,t,\quad \ldots,\quad x_n + \frac{x_i^n}{f'(x_n)}\,t,$$

à la place des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans les quantités $s_\lambda$, $c_\lambda$.

*Sporer.* — Sur le centre de gravité des points d'intersection d'une conique et d'une courbe du troisième degré. (381-384).

Partie historique.

*Wittstein.* — Mélanges historiques II. (1-6).

*Curtze.* — La multiplication abrégée. (7-13).

*Vittstein.* — Sur quelques manuscrits et une publication antérieure. (121-128).

*Ruska.* — Pour l'histoire du sinus. (126-128).

Supplément.

*Heiberg.* — Ptolémäus de Analemmate. (1-30).

*Curtze.* — Essai sur l'histoire de l'Algèbre en Allemagne au xv^e siècle. (32-74).

*Curtze.* — Le manuscrit n° 14836 de la *Königl. Hof- und Staatsbibliothek de Munich.* (75-142).

*Eisenstein.* — Autobiographie, publiée avec des notes biographiques complémentaires, par M. Rudio. (143-168).

*Eisenstein.* — Lettres à A. Stern, publiées par MM. Hurwitz et Rudio. (169-203).

*Wassilief.* — Nicolas Iwanowitsch Lobatschefskij. Discours traduit du russe, par M. Engel. (204-244).

Tome XLI; 1896.

*Köstlin.* — Sur les singularités d'une courbe algébrique. (1-34).

Une courbe algébrique, dans le voisinage d'un point singulier, est représentée par un développement en série procédant suivant les puissances fractionnaires de $x$, par exemple. Dans le développement certains exposants désignés par Smith sous le nom d'*exposants critiques* (*Proceed. Lond. math. Soc.*, VI, 1876) jouent un rôle prépondérant. Le développement en série peut être remplacé par une équation entière en $x$, $y$ obtenue en multipliant membre à membre les équations irrationnelles qui représentent les diverses branches de la fonction, en limitant les séries aux termes que l'on veut; la nouvelle courbe représente la courbe primitive, dans le voisinage du point singulier, avec telle approximation que l'on veut. Elle fournit inversement, comme le montre l'auteur, un procédé graphique pour retrouver le développement en série (Cramer, Puiseux). Elle fournit aussi le moyen de déterminer le nombre de branches linéaires, à tangentes distinctes, qui satisfont à la condition *d'adjonction* pour une branche superlinéaire (suivant l'expression de Cayley), nombre qui ne dépend que des exposants critiques. Mais la courbe adjointe générale (avec son nombre maximum de constantes arbitraires) dépend, non seulement des exposants critiques, mais des coefficients du développement en série; M. Köstlin montre comment on peut en déduire la forme, de la forme rationnelle qui correspond à un développement en série.

*Beez.* — Pour la théorie des vecteurs et des quaternions. (35-57; 65-84).

Exposition critique de cette théorie : d'après Hamilton, le symbole d'un vecteur est identique avec le symbole d'une rotation d'un angle droit autour de ce vecteur. M. Beez montre que cette supposition n'est nullement nécessaire, qu'on peut la laisser de côté tout en conservant la permanence des lois formelles, que la supposition d'Hamilton est toutefois la plus simple et la plus commode pour le calcul. Mais sa simplicité même ou plutôt son étroitesse est la raison qui empêche d'étendre le calcul hamiltonien des quaternions à plus de quatre unités; en admettant une relation plus générale entre un vecteur et la rotation d'un angle droit autour de ce vecteur, on parvient aisément à un calcul avec 8, 16, ..., $2^n$ unités. L'auteur donne les tables de multiplications pour le cas de 8, 16, 32 unités.

*Heymann.* — Remarques didactiques sur l'équation cubique. (558-562).

*Müller.* — Sur la courbe focale à point double. (62-64).

La courbe focale a été définie plus haut. En exprimant qu'elle a un point double, on parvient à une relation du quatrième degré entre ses coefficients.

*Liebmann.* — Sur les courbes planes du quatrième ordre du genre un. (85-92).

M. Thomae a étudié (*Zeitschrift*, t. XXIX) la représentation des points ou des plans de l'espace au moyen des cercles d'un plan. On peut, plus généralement, représenter ces points (ou ces plans) par une conique appartenant à un réseau avec deux points fondamentaux. Les propriétés des surfaces du second ordre conduisent alors facilement, comme le montre l'auteur, aux propriétés des courbes du quatrième degré avec deux points doubles, et à des façons intéressantes d'engendrer ces courbes.

*Reuschle.* — Division algébrique abrégée par un diviseur du second degré ou de degré supérieur. (93-102).

*Reuschle.* — Signification géométrique de la décomposition en fractions simples. (103-106).

*Netto.* — Une formule analogue aux formules d'interpolation d'Euler. (107-111).

La formule d'interpolation de Lagrange conduit immédiatement aux formules d'Euler concernant les sommes $\sum \frac{x_i^\lambda}{f'(x_i)}$; M. Netto, après avoir donné la solution du problème d'interpolation de Cauchy relatif à la détermination d'une fraction rationnelle, montre comment cette solution conduit à une formule, du même genre que celles d'Euler.

*Kurz.* — Ondes liquides. (111-113). — Échauffement des fluides et des solides par la compression. (113-117). — Détente adiabatique des gaz réels. (117-120).

*Liebmann.* — Construction d'une quadrique par neuf points. (120-123).

Cette construction est effectuée dans un plan.

*Kommerell.* — Une nouvelle expression des courbure moyenne et totale d'une surface. (123-126).

La surface est définie par une équation de la forme $f(x, y, z) = 0$.

*Schlömilch.* — Sur quelques produits infinis et quelques séries. (127-128).

La formule d'Euler-Maclaurin donne

$$\log[(1-e^{-u})(1-e^{-2u})(1-e^{-3u})\ldots] = \frac{u}{24} - \frac{\pi^2}{6u} + \frac{1}{2} l \frac{2\pi}{u} R_{2n},$$

qui permet le calcul approché du premier membre quand $u$ est petit.

*London.* — Les constructions géométriques du troisième et du quatrième degré au moyen d'une droite et d'une courbe fixe du troisième degré. (129-152).

Les problèmes du troisième et du quatrième degré se ramènent aux problèmes suivants : Connaissant un des points d'intersection de deux coniques données, construire les trois autres points, construire les éléments triples d'une involution cubique donnée de seconde espèce. Ces deux problèmes, quoique se ramenant l'un à l'autre, sont traités séparément par l'auteur, qui montre comment le premier peut se résoudre par la règle quand on se donne une cubique fixe, et comment l'étude du second conduit à d'intéressantes propriétés des cubiques rationnelles. Enfin l'auteur applique sa méthode à des problèmes métriques et, en particulier, aux problèmes classiques de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. C'est la cissoïde qu'il choisit comme courbe auxiliaire pour effectuer les constructions.

*Vahlen.* — Sur les chaînes de sphères de Steiner. (153-160).

Problèmes de fermeture relatifs à des cercles tangents ou à des sphères tangentes.

*Cantor* (*M.*). — Équations fonctionnelles à trois variables indépendantes. (161-163).

L'équation fonctionnelle

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(z, x)$$

admet la seule solution

$$\varphi(x, y) = \psi(y) - \psi(x).$$

*Heffter.* — Construction de modèles de surfaces isogonales. (163-166).

*Kurz.* — Action d'un aimant sur un aimant. (167-169. — Énergie potentielle d'un aimant. (169-171). — Potentiel d'une sphère magnétique. (172-175). — L'induction magnétique. (175-176).

*Kleiber.* — Essai sur la théorie cinématique des systèmes articulés. (177-198; 233-257; 281-304).

Une partie des propositions contenues dans cet important travail a déjà été donnée sans démonstration par l'auteur dans le catalogue, rédigé par M. Dyck, de l'Exposition de la *Deutsche Mathematiker Vereinigung*. Le but de l'auteur est maintenant, non d'ajouter quelque proposition particulière à la masse de celles que l'on connaît déjà, mais de faire un exposé vraiment systématique de la théorie des systèmes articulés. La première partie, qui contient une théorie des *pantagraphes*, est essentiellement une interprétation géométrique de la théorie des fonctions linéaires de point. La seconde partie se rapporte à des fonctions de point d'ordre plus élevé.

*Junker.* — Les fonctions symétriques élémentaires et les sommes de puissances semblables de variables appartenant à une ou plusieurs suites. (199-209).

En désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les fonctions symétriques élémentaires des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et par $s_1, s_2, \ldots,$ les sommes des puissances semblables, l'auteur établit les formules

$$s_{p+1} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{i=r} [a_1 a_i - (i+1) a_{i+1}] \frac{\partial s_p}{\partial a_i},$$

$$a_{p+1} = \frac{1}{p+1} \left[ s_1 a_p - \sum_{i=1}^{i=r} i \frac{\partial a_p}{\partial s_i} s_{i+1} \right],$$

qui permettent d'exprimer les $s$ au moyen des $a$ et inversement. Des formules analogues se présentent quand on a affaire à plusieurs séries de variables.

*Sporer.* — Sur les cercles doublement tangents à une conique. (210-220).

*Beck.* — Construction du plan osculateur à la courbe d'intersection de deux cônes. (221-226).

*Kurz.* — Solénoïdes, spirales annulaires ou sphériques. (226-227).

*Kleiber.* — Pour la construction d'une surface du second degré par neuf points. (228-230).

*Thomae.* — Essai sur la théorie des ensembles. (231-232).

Réflexions sur la définition des ensembles continus. L'auteur cite une démonstration due à un étudiant en mathématiques, mort en 1885, du nom de Balhauf, de ce théorème : une fonction continue telle que l'on ait, entre les limites $a$, $b$ : $\lim. \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \; (h > 0)$ est une constante.

*Foerster.* — Les coefficients d'élasticité et les phénomènes de mouvement ondulatoire comme fonctions des poids moléculaires et des chaleurs spécifiques. (258-264).

*Doehlemann.* — Pour la détermination de la mesure dans un domaine fondamental uniforme. (265-271).

L'auteur fait observer que la démonstration classique du théorème sur la constance du rapport anharmonique des quatre points d'intersection d'un faisceau de quatre droites par une sécante est insuffisante pour ce qui concerne les signes et montre comment on peut combler cette lacune.

*Stern* (*M.*). — Sur les relations algébriques dans un hexagone inscrit dans un cercle. (272-276).

L'hexagone est supposé tel que chaque côté ait un côté adjacent qui lui soit égal.

*Vollprecht.* — Sur le passage du calcul à la Géométrie, en particulier sur la possibilité de la multiplication des segments. (276-280).

*Oppenheimer.* — Sur les points doubles des courbes algébriques. (305-325).

Après avoir montré comment on peut en général construire une courbe $C^n$ d'ordre $n$ avec $p$ points doubles et $q$ points simples, sous la condition

$$3p + q = \frac{n(n+3)}{2}$$

l'auteur s'occupe des courbes pour lesquelles $q$ est nul ou égal à 0 ou à 2. Signalons les propositions suivantes : Étant donnée une courbe $C^{3n}$ admettant $\frac{3n(n+1)}{2} + 1$ points doubles, par $\frac{3(n+1)}{2}$ de ces points il passe un faisceau de courbes $C^{3n}$ les admettant pour points doubles.

Un faisceau de courbes $C^m$ qui admet comme doubles points de base

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

points doubles d'une courbe $C^n$ de genre 0 a en tout

$$m^2 - \frac{3(n-1)(n-2)}{2}$$

points de base. Par ces points et

$$X = \frac{n^2 - 9n + 20}{2} + \frac{3(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(2m - 2n + 3)(2m - 2n + 6)}{2} - m^2$$

autres points passe une courbe $C^{2m-2n+3}$.

*Heymann.* — Paradoxes stéréométriques. (326-331).

Interprétation géométrique de racines réelles d'une équation du troisième degré qui ne conviennent pas au problème dont elle est la traduction.

*Velten.* — Nouvelle déduction des propriétés harmoniques du quadrilatère. (332-336).

Partie historique.

*Schlegel.* — L'Ausdehnungslehre de Grassmann. (1-21, 41-59).

*Korteweg.* — L'année de naissance de Jean Hudde. (22-23).

*Curtze.* — Sur la règle Ta Yen en Europe. (81-82).

*Simon* (*H.*). — Les prénoms de Vandermonde. (83-85).

*Zelbr.* — Le problème du plus court crépuscule. (121-148, 153-179).

*Bobynin.* — Extraction des racines carrées dans la Grèce antique. (193-211).

Tome XLII; 1897 (1).

*Saalschütz.* — Études relatives à la monographie de Raabe sur la fonction de Jacob Bernoulli. (1-13).

Sur la série $\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\sum_{\beta=1}^{\beta=p}(\alpha x+\beta)^m a_\beta x^{\alpha p+\beta-1}$, sa limite quand $x$ s'approche de 1, son expression sous forme finie.

*Wölfing.* — Les points singuliers des surfaces. (14-36).

Extension à l'espace de la méthode de Newton pour l'étude d'une courbe autour d'un de ses points.

*Schilling.* — Théorie cinématique des engrenages hyperboloïdaux. (36-59).

L'auteur étudie en particulier la variation du rapport des vitesses angulaires avec la position des hyperboloïdes tangents.

*Heilermann.* — Décomposition de l'équation du quatrième degré. (60-63).

*Beyel.* — Remarque concernant les remarques sur le quadrilatère doublement centré. (63).

*Finsterwalder.* — Problème. (63-64).

---

(1) A partir de 1897, M. Mehmke prend la direction de la première partie de la publication fondée par M. Schlömilch et dirigée par lui pendant quarante et un ans. M. M. Cantor continue à diriger la seconde partie. M. Mehmke annonce l'intention qu'il a d'orienter vers les applications la *Zeitschrift*, qui, d'ailleurs, leur a toujours fait une place notable.

*Blater.* — Faute d'impression dans les Tables pour le calcul des logarithmes à neuf décimales de Gundelfinger et Nell. (64).

*Ahrens.* — Sur les relations entre les déterminants d'une matrice. (65-80).

Extension des résultats obtenus antérieurement (*Zeitschrift*, 1895, p. 177). Considérant une matrice à $m$ lignes et $n$ colonnes, l'évanouissement de certains déterminants entraîne l'évanouissement de tous les déterminants du même degré. Ce sont ces circonstances qu'étudie l'auteur.

*Heymann.* — Exposition élémentaire de la transformation et de la résolution de l'équation du cinquième degré. (81-98; 113-121).

La résolvante qu'adopte l'auteur est la suivante

$$h\eta^5 - 10\eta^3 + 15\eta - 6 = 0,$$

elle dépend du paramètre $h$. L'auteur compare cette résolvante avec les résolvantes de Bring-Jerrard, de Brioschi, de Gordan et Klein, avec l'équation de l'icosaèdre, etc. Il montre aussi comment on obtient, pour le septième degré, une résolvante analogue.

*Mehmke.* — Sur un instrument pour mener une droite par l'intersection de deux droites qui se coupent en dehors de l'épure (*dreiteilige Fluchtpunktschiene*). (99-103).

*Kilbinger.* — Sur la position en perspective de deux figures collinéaires planes. (104-105).

*Karl.* — Sur un problème de Mécanique. (105-107).

*Schüssler.* — Sur la perspective du cercle. (107-111).

*Beyel.* — Un problème de la théorie des ombres. (111-112).

*Hyde.* — Lieux représentés par les équations $p = \varphi^u e$ et $p = \varphi^u \psi^v e$.

*Somoff.* — Sur les vitesses hélicoïdales d'un corps solide s'appuyant sur plusieurs surfaces. (133-153; 181-182).

Le Mémoire de M. Somoff donne le moyen de déterminer et de se représenter clairement quels sont les axes possibles du mouvement hélicoïdal d'un corps solide s'appuyant sur une, deux, ..., cinq, ... surfaces. La question est traitée géométriquement.

*Kowalewski.* — Un théorème de la moyenne pour un système de $n$ intégrales. (153-157).

Si les $n$ fonctions $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ sont réelles et continues, de $a$ à $b$, on peut déterminer $n$ nombres positifs $\lambda_i$ dont la somme est égale à 1, tels que l'on ait

$$\int_a^b \varphi_i(t)\,dt = (b-a)[\lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(t)].$$

*Scheye.* — Sur une nouvelle conséquence de la théorie de Maxwell des phénomènes électriques. (157-159).

*Vahlen.* — Sur un théorème de Statique. (160).

*Cranz.* — Esquisse d'une grapho-balistique fondée sur les Tables de Krupp. (183-204).

*Runge.* — Sur la différentiation des fonctions empiriques. (205-213).

Nos appareils d'observation remplacent les valeurs des phénomènes par des valeurs moyennes; elles intègrent en quelque sorte les mesures; M. Runge montre, sur un cas particulier, comment on peut, jusqu'à un certain degré, débrouiller cette intégration : c'est là ce qu'il appelle *différentiation*. M. Paschen (*Ueber die Spektren fester Körper*) a appliqué la méthode de M. Runge, c'est lui aussi qui a formulé le problème.

*Vahlen.* — Sur les diviseurs numériques des fonctions entières. (214-215).

*Ebner.* — Le théorème de Bour généralisé (par M. M. Lévy). (215-216).

*Holzmüller.* — Sur un théorème de la théorie des fonctions et son application aux systèmes de courbes isothermes et à quelques théories de Physique mathématique. (217-246).

L'auteur montre le parti qu'on peut tirer de ce fait que le logarithme du module et l'argument de la dérivée d'une fonction analytique vérifient l'équation $\Delta^2 u = 0$.

*Müller.* — Essais sur la théorie des quadrilatères articulés plans. (247-271).

L'auteur introduit d'abord dans la théorie du mouvement d'un plan sur un plan des points remarquables qu'il désigne sous le nom de *pôles d'inflexion et*

*de rebroussement d'ordre supérieur*. Si l'on considère une droite (A) liée au plan mobile et le point $a$ où elle touche son enveloppe, le centre de courbure $a'$ correspondant est, comme on sait, sur le cercle des rebroussements $R_1$; la normale en $a'$ à la droite $aa'$ ou à la développée de l'enveloppe passe par le pôle (ordinaire) des rebroussements $P_1$; cette normale en $a'$ touche son enveloppe (développée de la développée) en un point $a''$ dont le lieu, à un moment donné, quand A varie, est le second cercle $R_2$ des rebroussements; la perpendiculaire en $a''$ à la droite $a'a''$ rencontre $R_1$ au second pôle des rebroussements $P_2$; on définit de même le troisième cercle et le troisieme pôle des rebroussements. La dualité du mouvement, par laquelle on sait que s'échangent le cercle des rebroussements et le cercle des inflexions, conduit ensuite aux notions de second, de troisième pôle d'inflexion. M. Müller applique ces notions au cas du mouvement d'un quadrilatère articulé dont un côté est fixe : elles lui permettent l'étude des points dont la trajectoire a un point de contact du cinquième ordre avec sa tangente et le conduisent à des résultats systématiques concernant le guidage rectiligne approché.

*Brauer*. — Application de la courbe d'intégration au partage des volumes. (272-275).

*Stäckel*. — Sur les domaines voisins dans l'espace. (275).

*Korselt*. — Sur un appareil qui permet de diviser un angle quelconque en un nombre impair quelconque de parties égales. (276-278).

*Jung*. — Pour la théorie de l'équation $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$ fondée sur l'équation de Kirchhoff relative au principe de Huygens. (278-279).

*C. B.* — Problème. (280).

*Beyel*. — Le cercle cubique à point double. (281-303).

Étude géométrique du lieu d'intersection de deux droites correspondantes de deux faisceaux, la correspondance étant telle que dans l'un des faisceaux l'angle de deux droites soit double de l'angle des droites correspondantes de l'autre faisceau.

*Korselt*. — Sur le problème des bissectrices. (304-312).

Le problème : « trouver les côtés d'un triangle, connaissant les bissectrices », dépend d'une équation qui n'est pas résoluble par radicaux.

*Schulze*. — Une formule de la théorie des déterminants. (313-322).

Sur la décomposition en faisceau du déterminant que Weierstrass (lettre à

M. Schwarz, *Göttinger Nachrichten*, 1884) a désigné par

$$\varepsilon = \left| \sum_k \varepsilon_{\mu k r} . a_k \right| \qquad (k, \mu, r = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

et dont l'évanouissement exprime que la division de deux nombres complexes formés avec $n$ unités est impossible.

*Stäckel.* — Sur une équation fonctionnelle étudiée par Abel. (323-326).

Le problème d'Abel consiste à déterminer une fonction $f(x, y)$ telle que l'expression $f[z, f(x, y)]$ soit symétrique en $x$, $y$, $z$. M. Stäckel montre la lacune qui se trouve dans le raisonnement d'Abel et comment on peut la combler.

*Mehmke.* — Pour la loi des extensions élastiques. (327-338).

*Richter.* — Construction des axes d'inertie d'un triangle. (339-340).

Partie historique.

*Schlesinger.* — Wilhelm Schrentzel. (1-4).

*Berthold.* — « Eppur si muove ». (5-8).

Le Congrès international de Mathématiques de Zurich pour 1897. (73-74).

*Curtze.* — Les racines carrées et cubiques chez les Grecs d'après la Μετρικά nouvellement retrouvée de Héron. (112-120).

*Wertheim.* — Sur un problème de Diophante dans son écrit sur les nombres polygonaux. (121-126).

*Curtze.* — La formule de la racine carrée de Héron, chez les Arabes, chez Régiomontan.

Tome XLIII; 1898.

*Disteli.* — Sur les courbes et les surfaces roulantes. (1-35).

Il s'agit des courbes ou des surfaces qui permettent, par un roulement sans glissement, de transformer un mouvement de rotation uniforme en un mouve-

ment de rotation non uniforme. Dans le présent Travail l'auteur s'occupe du cas où les axes de rotation sont parallèles ou se rencontrent.

*Müller.* — Le guidage rectiligne approché au moyen d'un quadrilatère plan articulé. (36-40).

Le guidage est dit *approché* à $n$ points si un point du plan de la bielle décrit une courbe qui rencontre une droite en $n$ points et s'en écarte très peu entre ces $n$ points; il est dit *précis* à $n$ points, si les $n$ points sont infiniment voisins. On sait que l'on a $n \leqq 6$. Le cas du guidage précis à 6 points a été étudié précédemment par l'auteur (t. XLII, p. 247). Il étudie présentement divers autres cas.

*Mehmke.* — Sur la détermination mathématique de la clarté dans les salles éclairées par la lumière du jour, en particulier dans les ateliers avec éclairage par le plafond. (41-52).

*Hammer.* — Pour le calcul des inclinaisons des points d'assemblage d'une charpente. (58-61).

*Stäckel* (*W.*). — Pour l'étude graphique des forces dans l'espace. (62-64).

*Beez.* — Sur la transformation automorphe d'une somme de carrés au moyen des transformations infinitésimales et sur les nombres complexes d'ordre supérieur. (65-79; 121-132; 277-304).

La norme d'un quaternion à $2^{n-1}$ unités est, comme l'a montré l'auteur (*Zeitschrift*, t. XLI), en relations étroites avec le déterminant gauche de Cayley avec $\frac{n(n-1)}{2}+1$ éléments indépendants, et l'on sait le rôle que joue ce déterminant dans la détermination des substitutions orthogonales. M. Beez reprend le problème de la construction du groupe des transformations automorphes d'une somme de carrés, en appliquant la méthode de Lie, c'est-à-dire qu'il construit ce groupe au moyen de ses transformations infinitésimales. Le même problème est ainsi résolu au moyen des vecteurs et des quaternions.

*Mehmke.* — Table auxiliaire pour la résolution des équations du second degré à racines réelles. (80-84).

Les coefficients de l'équation sont donnés par leur logarithme. La table que donne M. Mehmke traduit la relation entre $r = \log y$ et $u = \log \pm (y^2 - y)]$ et permet de trouver aisément les logarithmes des racines.

*Finsterwalder.* — Analyse harmonique au moyen du planimètre polaire. (85-92).

On a construit des instruments pour déterminer les coefficients de la série de Fourier qui représente une fonction donnée graphiquement (Coradi, Sharp et Henrici). Le planimètre polaire ordinaire permet de résoudre le même problème, et cette solution peut être précieuse pour celui qui n'a à le résoudre qu'occasionnellement.

*Gerber.* — La propagation de la gravitation dans l'espace et dans le temps. (93-104).

L'auteur étudie l'hypothèse d'une vitesse finie de la propagation du potentiel. La discussion du mouvement du périhélie de Mercure le conduit à une détermination de cette vitesse, comparable à celle de la lumière et des ondes électriques.

*Hammer.* — Sur la détermination d'un point par des mesures de distances. (104-115).

Étant donné un réseau de points situés dans un plan, on se propose d'y intercaler un nouveau point dont on a mesuré directement les distances à trois points, d'en déterminer les coordonnées, si l'on se place au point de vue du calcul; l'auteur, sur un exemple numérique, montre comment on devra combiner les opérations et déterminer les limites de l'erreur. Il étudie le même problème graphiquement.

*Kowalewski* (*G.*). — Remarque sur un théorème de calcul différentiel. (116-118).

*Kowalewski.* — Remarque sur le théorème de la moyenne pour un système de $n$ intégrales. (118-120).

L'auteur revient sur un théorème qu'il a signalé dans le Tome précédent de la *Zeitschrift* pour le remplacer par l'énoncé suivant :

On a, en désignant par $F(t)$ une fonction continue qui garde le même signe entre $a$, $b$

$$\int_a^b \varphi_i(t) F(t) = [\lambda_1 \varphi_1(t_1) + \lambda_2 \varphi_2(t_2) + \ldots + \lambda_n \varphi_n(t_n)] \int_a^b F(t)\, dt$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $\lambda$ sont des nombres positifs dont la somme est un.

Il compare cette proposition à un théorème de Weierstrass signalé par Hermite (*Cours de la Sorbonne*, 7e leçon, 1882) et relatif au cas de $n = 2$; il en donne en outre plusieurs applications.

*Cranz.* — Recherches théoriques et expérimentales sur le mouvement de l'axe d'une balle allongée animée d'un mouvement de rotation, pendant qu'elle parcourt sa trajectoire. (121-162, 174-215).

Étude documentée, tant au point de vue historique qu'au point de vue expé-

rimental, sur le mouvement de l'axe d'une balle autour du centre de gravité. L'expérience semblait contraire à la théorie, en montrant un mouvement pendulaire beaucoup plus lent; une étude approfondie conduit l'auteur à cette conclusion : Le désaccord tient à ce qu'on a confondu le mouvement de précession et le mouvement de nutation de l'axe; les apparences observées se rapportent à la nutation, non à la précession.

La question est traitée théoriquement, par approximation, pour une loi quelconque de résistance de l'air; les résultats sont comparés avec l'expérience.

*Brauer.* — Le *Perspectiv-Reisser.* (163-166).

Instrument destiné à faciliter la construction de la perspective d'un objet dont on a deux projections parallèles.

*Vahlen.* — Sur le pendule de Foucault. (166-167).

*Vahlen.* — Sur les équations du troisième et du quatrième degré dont une solution peut s'obtenir par l'extraction de racines qui s'effectuent rationnellement. (167-169).

*Holzmüller.* — Sur les états de tension pour lesquels il y a un potentiel de tension et un potentiel de déplacement. (216-229).

Le premier potentiel a le caractère d'un potentiel newtonien, le second d'un potentiel logarithmique. L'auteur développe avec soin un exemple concret.

*Ludwig.* — La variabilité des êtres vivants et la loi des erreurs de Gauss. (230-242).

L'auteur résume de nombreuses et longues études de statistiques qui se rapportent surtout à la variation des plantes.

*Lüroth.* — Le mouvement d'un corps solide. (243-268).

Études cinématiques présentées comme un exercice relatif à l'*Ausdehnungslehre.*

*D'Ocagne.* — Sur les types les plus généraux d'équations représentables par trois systèmes de cercles ou de droites cotées. Application aux équations quadratiques. (269-276).

*Matthiessen.* — Sur l'anamorphose elliptique dans la représentation dioptrique. (305-311).

*Korselt.* — Sur le *tractoriographe* de Kleritj et sur le *Stangenplanimeter.* (312-317).

Instrument propre à décrire la tractrice d'une courbe quelconque (qui rem-

placerait la droite de la tractrice ordinaire). M. Mehmke a ajouté à cet article d'intéressantes remarques historiques.

*Korselt.* — Addition à l'article *Sur un mécanisme qui permet de diviser un angle quelconque en un nombre impair de parties égales.* (318-319).

*Timerding.* — Sur la projection de Mercator. (320-328).

L'auteur étudie en particulier la transformée d'un cercle tracé sur la sphère.

*Mertelsmann.* — Le problème des quinze pensionnaires. (329-334).

*Thomae.* — Sur la construction de Hesse d'une surface du second ordre donnée par neuf points. (334-338).

*Mehmke.* — Sur un appareil pour la résolution des équations numériques à quatre ou cinq termes. (338-340).

Partie historique.

*Helm.* — Remarque sur la manière d'écrire d'Ampère. (1).

*Wertheim.* — Observation de Fermat sur le théorème de Nicomaque. (41-42).

*Curtze.* — Un *Tractatus de abaco* à la fin du XII^e^ et au commencement du XIII^e^ siècle. (122-130).

*Heydenreich.* — Denis Papin. (130-138).

---

SITZUNGSBERICHTE DER MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN ACADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN.

Tome I.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1871.

*von Bauernfeind.* — Sur une solution mécanique du problème de Pothenot. (124-127).

Tome II.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1872.

*von Kobell.* — Notice biographique sur John-Frederick-William Herschell. (89-92).

*Bauer* (*G.*). — Remarques sur quelques déterminants et leur signification géométrique. (345-354).

Généralisation des théorèmes de von Staudt, Joachimsthal, Kronecker, Cayley, sur les produits de déterminants représentant des aires de triangles, des volumes de tétraèdres, etc. Les points de ces figures sont ici remplacés par des sphères; les sphères circonscrites aux tétraèdres sont remplacées par les sphères orthogonales aux sphères qui remplacent les points.

Tome III.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1873.

*von Kobell.* — Notice biographique sur Rudolph-Friedrich-Alfred Clebsch. (129-130).

Tome IV.

Ce volume ne contient aucune Communication mathématique.

Tome V.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1875.

*von Kobell.* — Notice biographique sur Ludwig-Otto Hesse. (130-132).

*Bauer* (*G.*). — Remarque sur les suites infinies formées au moyen de fonctions sphériques. Étude particulière de certaines séries dont les termes sont des produits ou des carrés de fonctions sphériques. (247-272).

Tome VI.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1876.

*Seidel.* — Sur la probabilité de l'apparition de certains événements

qui n'ont lieu que rarement, quoique pouvant arriver un nombre infini de fois. (44-50).

*von Kobell.* — Notice biographique sur Friedrich-Julius Richelot. (125).

*du Bois-Reymond* (*P.*). — Sur le domaine de convergence de la série de Taylor. (225-237).

Il s'agit de fonctions réelles de variables réelles.

*von Bauernfeind* (*C.-M.*). — Méthode d'approximation permettant de compenser les erreurs d'observation accidentelles que l'on peut commettre dans une suite de mesures de hauteur. (243-270).

Tome VII.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1877.

*Seidel.* — Sur un procédé permettant d'obtenir facilement la suite des nombres de Bernoulli et quelques autres suites analogues. (157-187).

Tome VIII.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1878.

*von Kobell.* — Notice biographique sur Urbain-Jean-Joseph Leverrier. (102-103).

*von Kobell.* — Notice biographique sur Angelo Secchi. (110).

*Bauer* (*G.*). — Sur les systèmes de courbes du sixième ordre que l'on rencontre dans l'étude du problème des normales à une conique. (121-135).

Les résultats obtenus par l'auteur complètent ceux de Clebsch (*Journal für Mathematik*, t. 62).

*von Bauernfeind.* — Sur la compensation des erreurs d'observation accidentelles. Second article. (415-423).

## Tome IX.

Ce volume ne contient aucune Communication mathématique.

## Tome X.

Communications mathématiques faites à l'Académie, de novembre 1879 à juillet 1880.

### *Klein* (*F.*). — Contribution à la théorie des fonctions modulaires. (89-100).

Exposé de la façon dont l'auteur envisage les fonctions modulaires. On n'apercevait aucun lien entre les diverses équations modulaires obtenues jusqu'alors; les recherches de M. Klein mettent ce lien en évidence; ces diverses équations expriment des cas très particuliers d'un type général de *correspondance* sur une courbe de genre déterminé.

### *Giester* (*J.*). — Relations entre le nombre de classes de formes quadratiques binaires à déterminant négatif. (147-163).

On les obtient en envisageant les *correspondances modulaires* de tous les rangs $m$; en évaluant de deux façons différentes (l'une arithmétique, l'autre algébrique), pour chaque valeur de $m$, les coïncidences qui ont lieu dans ces correspondances, et en égalant, pour chaque valeur de $m$, les deux expressions ainsi obtenues.

### *Klein* (*F.*). — Sur une infinité de formes normales de l'intégrale elliptique de première espèce. (533-541).

Le module $k^2$ de Legendre est le premier terme d'une suite infinie de modules qui jouent, à plusieurs égards, un rôle aussi important que $k^2$ lui-même. A chacun de ces modules correspond une intégrale elliptique normale de première espèce dans laquelle il figure comme constante. Il convient d'étudier *directement* ces diverses intégrales et non de chercher à les ramener à l'intégrale elliptique normale de Legendre. M. Klein envisage plus particulièrement deux des types choisis parmi les plus simples dans la suite infinie d'intégrales que l'on obtient ainsi.

### *Bauer* (*G.*). — Sur une propriété de l'hyperboloïde à une nappe. (635-640).

Envisageons trois générations *quelconques* de l'un des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde à une nappe quelconque et les trois génératrices de l'autre système qui leur sont respectivement parallèles; le volume du parallélépipède déterminé par ces six droites est constant. On ne connaissait qu'un cas particulier de ce théorème.

## Tome XI.

Communications mathématiques faites à l'Académie, de novembre 1880 à juillet 1881.

*Schröter* (*H.*). — Sur une propriété de l'hyperboloïde à une nappe. (238-241).

L'auteur établit deux nouvelles relations qui, ainsi que celles de M. Bauer (t. X), se déduisent des relations d'invariance bien connues que l'on rencontre dans la théorie des diamètres conjugués d'une quadrique.

*Bauer* (*G.*). — Sur les triples de droites situées sur un hyperboloïde à une nappe. (241-248).

Démonstration de divers théorèmes concernant ces triples de droites.

*von Kobell.* — Notice biographique sur Carl-Wilhelm Borchardt. (374-375).

*Lommel* (*E.*). — Théorie de la rotation du plan de polarisation. (454-468).

## Tome XII.

Communications faites à l'Académie, de novembre 1881 à décembre 1882.

*Lommel* (*E.*). — Théorie de la double réfraction elliptique. (39-56).

*du Bois-Reymond* (*P.*). — Théorème général concernant les conditions d'intégrabilité d'une fonction de fonctions intégrables. (240-242).

Démonstration d'un théorème énoncé seulement sans démonstration dans le tome 16 des *Mathematische Annalen* et d'après lequel toute fonction *continue* de fonctions intégrables est intégrable.

*von Kobell.* — Notice biographique sur Eduard Heine. (263).

*Vaněček* (*J.-S.*). — Sur l'inversion générale. (463-466).

Développement d'une Note du même auteur insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 10 avril 1882.

Tome XIII.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1883.

*Brill* (*A.*). — Contribution à la théorie des lignes géodésiques et du triangle géodésique. (51).

Cette Communication est insérée dans les *Mémoires de l'Académie.*

*Hess* (*W.*). — Sur la flexion et la torsion d'une tige élastique infiniment mince. (82-110).

*von Braunmühl.* — Sur la longueur réduite d'un arc géodésique et sur la construction d'une surface dont les normales soient tangentes à une surface donnée. (247).

Cette Communication est insérée dans les *Mémoires de l'Académie.*

*Bauer* (*G.*). — Sur le (déterminant) hessien de la surface hessienne d'une surface du troisième ordre. (320).

Cette Communication est insérée dans les *Mémoires de l'Académie.*

*Bauer* (*G.*). — Sur la forme et les dimensions relatives des courbes paraboliques tracées sur une surface du troisième ordre. (320-343).

Tome XIV.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1884.

*von Seidel* (*L.-Ph.*). — Sur une loi de probabilité des erreurs d'observation. (193).

Cette Communication n'a pas été publiée dans ce Recueil.

*Kuen* (*Th.*). — Sur les surfaces pour lesquelles la mesure de la courbure est constante. (193-206).

*Seeliger* (*H.*). — Sur la forme de la planète Uranus. (267-279).

*Lüroth* (*J.*). — Sur les périodes canoniques des intégrales abéliennes. (604).

Cette Communication est insérée dans les *Mémoires de l'Académie.*

## Tome XV.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1885.

*Brill* (*A.*). — Sur les courbes unicursales (planes et gauches) et sur les surfaces réglées de genre zéro. (276-287).

*Meyer* (*Franz*). — Sur la réductibilité des équations, en particulier des équations du cinquième degré à paramètres linéaires. (415-451).

Considérations analogues à celles de M. Petersen (*Théorie des équations algébriques*, première Partie, Chap. IV); les développements sont toutefois tout à fait différents. Il s'agit principalement de déterminer trois fonctions entières

$$u_1 = \varphi_1(\mu), \qquad u_2 = \varphi_2(\mu), \qquad u_3 = \varphi_3(\mu),$$

d'une variable $\mu$, de même degré $\nu$, telles qu'en remplaçant les paramètres $u_1$, $u_2$, $u_3$ qui figurent linéairement dans une fonction entière du cinquième degré en $\lambda$,

$$u_1 f_1(\lambda) + u_2 f_2(\lambda) + u_3 f_3(\lambda),$$

par ces trois fonctions entières $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, l'expression ainsi obtenue

$$\varphi_1(\mu) f_1(\lambda) + \varphi_2(\mu) f_2(\lambda) + \varphi_3(\mu) f_3(\lambda),$$

se décompose en un produit de fonctions rationnelles des deux variables $\lambda$, $\mu$.

*Kœnigsberger* (*Leo*). — Démonstration de l'impossibilité de l'existence d'un théorème fonctionnel distinct du théorème d'Abel. (462-468).

## Tome XVI.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1886.

*von Döllinger*. — Notice biographique sur Johann-Jacob Baeyer. (6 à 9).

*Bauer* (*G.*). — Sur le calcul du discriminant d'une forme binaire. (183-191).

Cayley avait fait observer que le discriminant d'une forme binaire quelconque de dimension $n$ peut être obtenu au moyen du discriminant d'une forme binaire de dimension $(n-1)$; M. Bauer montre comment on peut effectuer les calculs lorsqu'il s'agit d'appliquer le théorème de Cayley.

## Tome XVII.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1887.

*Voss* (*A.*). — Sur les surfaces à centre, projections d'une surface algébrique du $n^{\text{ième}}$ ordre. (2).

Cette Communication est insérée dans les *Mémoires de l'Académie.*

*Finsterwalder* (*S.*). — Propriétés catoptriques des quadriques. (36-42).

L'image, obtenue par réflexion sur un miroir ayant la forme d'une quadrique Q, d'une surface développable circonscrite à une quadrique R homofocale à Q, est une surface développable qui, elle aussi, est circonscrite à la quadrique R. On déduit aisément d'un cas particulier de cette proposition générale les théorèmes que Staude a démontrés dans les tomes 20, 21, 26 et 27 des *Mathematische Annalen.* Cette même proposition permet aussi d'étudier dans toute sa généralité le problème de la réflexion d'une gerbe de rayons sur un miroir ayant la forme d'une quadrique; les recherches de Lindelöf (*Report of the* 30th *Meeting of the British Association for the Advancement of science held at Oxford* 1860) sont comprises dans cette étude comme cas très particulier; les arêtes de rebroussement de la surface focale du système formé par les rayons réfléchis s'introduisent d'ailleurs d'elles-mêmes dans cette étude générale.

*von Braunmühl* (*A.*). — Recherches sur les caractéristiques multiples d'ordre $p$, formées au moyen de tiers de nombres entiers, et sur les théorèmes d'addition des fonctions thêta correspondantes. (63).

Cette Communication est publiée dans les *Mémoires de l'Académie.*

*von Voit.* — Notice biographique sur Theodor von Oppolzer. (75-82).

*Lommel* (*E.*). — Photométrie de la lumière diffuse par réflexion. (95-132).

Établissement d'une loi destinée à remplacer celle de Lambert. Considérations théoriques. Vérification expérimentale.

*Seeliger* (*H.*). — Contribution à la théorie de l'éclairement des grosses planètes, en particulier de Saturne. (195).

Cette Communication est insérée dans les *Mémoires de l'Académie.*

*Kœnigsberger* (*Leo*). — Sur les relations algébriques qui peuvent avoir lieu entre les intégrales fondamentales d'une équation différentielle linéaire homogène du troisième ordre et les dérivées de ces intégrales fondamentales. (423-432).

Recherche des conditions sous lesquelles il existe de telles relations algébriques. Forme la plus générale sous laquelle ces relations algébriques peuvent se présenter.

*Gordan* (*P.*). — Sur un procédé permettant d'obtenir le discriminant d'une forme ternaire. (477-478).

## Tome XVIII.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1888.

*Voss* (*A.*). — Sur un théorème de la théorie des formes. (15-19).

Il s'agit d'un théorème démontré par M. Gordan dans le t. 5 des *Mathematische Annalen*, p. 107 et suivantes, et qui joue un rôle fondamental dans plusieurs recherches concernant la théorie des formes; M. Voss en donne une démonstration directe.

*Brill* (*A.*). — Sur la détermination de l'ordre de multiplicité des points d'intersection de deux courbes planes. (81-94).

Procédé *praticable* permettant de déterminer cet ordre de multiplicité en ne faisant usage que d'opérations *rationnelles*.

*Voss* (*A.*). — Sur les surfaces sur lesquelles deux familles de lignes géodésiques forment un système conjugué. (95-102).

Il s'agit tout d'abord de lignes géodésiques *réelles*. Les surfaces développables sont naturellement exclues comme n'offrant aucun intérêt. La détermination des surfaces cherchées est alors intimement liée à celle des surfaces à courbure constante.

*Maurer* (*L.*). — Sur des systèmes d'invariants plus généraux que ceux que l'on envisage d'ordinaire. (103-150).

La notion d'invariant est prise au sens général de Christoffel (*Mathematische Annalen*, t. 19, p. 280). L'objet principal du mémoire de M. Maurer est la détermination du groupe continu *le plus général* de substitutions linéaires homogènes qui transforment en elle-même une fonction rationnelle et homogène $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si le groupe comprend $m$

termes, la fonction $f$ vérifie précisément $m$ équations différentielles de la forme

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Pour résoudre le problème proposé il convient tout d'abord de distinguer parmi les formes

$$C(f) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

et les transformations infinitésimales correspondantes, deux types particuliers. A cet effet, représentons par $\Delta(p)$ le déterminant caractéristique de la forme $C(f)$ en sorte que

$$\Delta(p) = |c_{\lambda\mu} - p\,\varepsilon_{\lambda\mu}| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

si l'on convient de remplacer le symbole $\varepsilon_{\lambda\mu}$ par 1 ou par 0 suivant que $\lambda$ et $\mu$ sont égaux ou non. On dit que $C(f)$ est une *forme régulière de première espèce* lorsque $\Delta(p)$ ne s'annule que pour $p = 0$. On dit que $C(f)$ est une *forme régulière de deuxième espèce* lorsque $\Delta(p)$ ne s'annule que pour des valeurs *entières* de $p$ et que chaque racine d'ordre $h$ de $\Delta(p)$ annule tous les mineurs d'ordre $n - h + 1$ de ce déterminant. Dans tout autre cas on dit que $C(f)$ est une *forme irrégulière*. On étend ces dénominations aux systèmes des coefficients $c_{\lambda\mu}$ des formes envisagées.

M. Maurer démontre que, si $C(f)$ est irrégulière, on peut toujours déterminer *une* forme régulière de première espèce $K(f)$ et un nombre fini de formes régulières de seconde espèce $K_1(f)$, $K_2(f)$, ..., $K_\beta(f)$, telles que $C(f)$ s'exprime par une fonction linéaire et homogène de ces $(1 + \beta)$ formes régulières. Il en résulte que, si le groupe le plus général que l'on cherche à déterminer comprend $m$ termes, il contient *m transformations infinitésimales régulières, linéairement indépendantes*. On peut d'ailleurs exprimer les coefficients $a_{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$ de la substitution linéaire homogène générale envisagée en fonctions *rationnelles* de $m$ paramètres $u_1, u_2, \ldots u_m$; on en conclut qu'il existe des fonctions rationnelles que le groupe envisagé transforme en elles-mêmes : ce sont les invariants du groupe.

*von Voit.* — Notice biographique sur Gustav-Robert Kirchhoff. (181-186).

*Seeliger* (*H.*). — Sur la photométrie de substances réfléchissant la lumière d'une façon diffuse. (201-248).

*Finsterwalder* (*S.*). — Sur la distribution de l'élasticité de flexion dans les cristaux triplement symétriques. (257-266).

*Bauer* (*G.*). — Sur certaines surfaces du quatrième ordre. (337-354).

Désignons par 1, 2, 3, 4 les sommets d'un tétraèdre (A), par I, II, III, IV

les faces de (A) opposées à ces sommets, par I′, II′, III′, IV′ les faces d'un tétraèdre (B) que l'on fait correspondre respectivement aux sommets 1, 2, 3, 4 du tétraèdre (A), enfin par 1′, 2′, 3′, 4′ les sommets du tétraèdre (B) opposés à ces faces. Soit P un point tel que les quatre droites le joignant aux quatre points 1, 2, 3, 4 rencontrent les plans I′, II′, III′, IV′ en quatre points situés dans un même plan; le lieu du point P est une surface du quatrième ordre; la nature particulière de cette surface dépend de la position relative des deux tétraèdres (A) et (B). M. Bauer l'étudie pour quelques-unes de ces positions relatives particulièrement remarquables.

## Tome XIX.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1899.

*Brill* (*A.*). — Sur la résultante réduite. (19).

Cette Communication est insérée dans les *Mémoires de l'Académie.*

*Seeliger* (*H.*). — Sur les inégalités de lumière résultant du mouvement des étoiles doubles. (19-32).

*von Voit.* — Notice biographique sur Rudolf Clausius. (113-118).

*Nöther* (*M.*). — Sur la théorie du contact des courbes planes dans le cas où l'une des courbes en contact est du quatrième ordre. (175).

Cette Communication est insérée dans les *Mémoires de l'Académie.*

*Voss* (*A.*). — Sur la transformation conjuguée d'une forme bilinéaire en elle-même. (175-211).

Transformation d'une forme bilinéaire en elle-même par des substitutions linéaires conjuguées au sens de Jacobi. Le déterminant de la forme est supposé différent de zéro.

*Voss* (*A.*). — Sur les formes bilinéaires échangeables avec une forme bilinéaire donnée. (283-300).

Les recherches de M. Frobenius (*Journal für Mathematik*, t. 84) et de M. Maurer (*Dissertation inaugurale*, Strasbourg, 1887) permettent de déterminer le nombre de formes linéairement indépendantes parmi les formes bilinéaires P échangeables avec une forme bilinéaire A donnée (AP = PA). M. Voss se propose de montrer comment, connaissant A, on pourrait déterminer effectivement ces formes P en suivant une voie plus simple que celle indiquée par M. Maurer; le procédé de M. Voss permet d'étudier la fonction caractéristique des formes P.

*Voss* (*A.*). — Sur un théorème de la théorie des déterminants. (329-339).

Il s'agit d'un théorème dû à M. Stickelberger (*Journal für Mathematik*, t. 86) et dont on a souvent l'occasion de faire usage dans la théorie des formes bilinéaires. La démonstration de M. Stickelberger s'appuie sur la réduction à sa forme normale (Weierstrass) d'un faisceau de formes bilinéaires. M. Voss montre que l'on peut déduire directement le même théorème d'une relation identique entre des déterminants; il résulte d'ailleurs aisément de ce mode de démonstration que le théorème peut être étendu à un cas bien plus général que celui envisagé par M. Stickleberger.

## Tome XX.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1890.

*Voss* (*A.*). — Transformation cogrédiente des formes bilinéaires en elles-mêmes. (4).

Cette Communication est publiée dans les *Mémoires de l'Académie.*

*von Bauernfeind* (*C.-M.*). — Sur le nivellement de précision effectué en Bavière. (4).

Cette Communication est publiée dans les *Mémoires de l'Académie.*

*Finsterwalder* (*S.*). — Sur l'aire vraie d'une surface topographique. (35-82).

*von Voit.* — Notice biographique sur Paul du Bois-Reymond (415-418).

*Seeliger* (*H.*). — Sur le choc et la séparation de masses planétaires. (497-498).

Cette Communication est publiée dans les *Mémoires de l'Académie.*

*Seeliger* (*H.*). — Sur la représentation d'une fonction par une formule d'interpolation consistant en une suite indéfinie de fonctions sphériques. (499-511).

Les conditions sous lesquelles une fonction de deux variables peut être développée suivant des fonctions sphériques sont aussi générales que celles sous lesquelles une fonction d'une variable peut être développée en série trigonométrique. On a souvent besoin, en Astronomie et en Physique, de déterminer, au moyen de valeurs données d'une fonction de deux variables, les coefficients de son développement en fonctions sphériques; pour effectuer les calculs, il

convient d'appliquer les règles données par Fr. Neumann dans sa *théorie du potentiel* (1887), page 137 et suivantes; on est ainsi amené à construire des Tables qui facilitent singulièrement les calculs dans chaque cas particulier. La construction de ces Tables fait l'objet de la communication de M. Seeliger; on trouve les Tables elles-mêmes à la fin de son Mémoire.

## Tome XXI.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1891.

*Dyck* (*W.*). — Sur la forme affectée par une famille de courbes planes définies par une équation différentielle du premier ordre, à coefficients réels. (23-57).

Soit une famille de courbes planes définies par l'équation différentielle

$$F(x, y, y') = 0,$$

où $y' = \frac{dy}{dx}$ et où les coefficients de F sont réels; on suppose que F est développable en série de Taylor aux environs de chacun des points analytiques $x_0$, $y_0$, $y'_0$ dont les coordonnées vérifient identiquement l'équation $F = 0$ et que, dans ce développement, les coefficients $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ des termes du premier ordre ne sont pas nuls à la fois. M. Dyck étudie la forme de cette famille de courbes aux environs d'un point singulier essentiel, c'est-à-dire d'un point $(x, y)$ pour lequel on a à la fois

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

en ces points qui font partie de la *courbe du discriminant* $\left(\text{lieu des points tels que l'on ait à la fois } F = 0, \frac{\partial F}{\partial y'} = 0\right)$, la tangente à la courbe intégrale est confondue avec la tangente à la courbe du discriminant. A cet effet, il remplace, aux environs de chaque point singulier essentiel, l'équation différentielle générale envisagée, par une équation renfermant les termes d'ordre inférieur de son développement aux environs de ce point; cette équation est, en général, une équation différentielle du second ordre qui jouit de la propriété de pouvoir être intégrée directement. M. Dyck est amené ainsi à distinguer trois types de points singuliers essentiels d'une équation différentielle du premier ordre qui correspondent, dans une certaine mesure, aux trois types que l'on obtient pour les équations différentielles du premier ordre et du premier degré, étudiés tout particulièrement par M. Poincaré. Il y a toutefois, entre les types correspondants, une différence essentielle qui se manifeste de deux façons : d'une part, dans le cas des équations du premier degré, la famille de courbes *entoure* complètement chaque point singulier, tandis que, dans le cas général, la famille de courbes est située, aux environs de chaque point singulier, dans la région intérieure à la courbe du discriminant, région qu'elle

recouvre deux fois; d'autre part, en chaque point singulier la dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$ est indéterminée dans le cas des équations du premier degré, tandis que sa valeur est entièrement déterminée dans le cas *général*.

Outre les points singuliers essentiels, il convient d'envisager des points singuliers non essentiels d'une équation différentielle générale du premier ordre, définis par la condition qu'en ces points on ait à la fois

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0;$$

la courbe du discriminant a en ces points un rebroussement. M. Dyck étudie sommairement la forme affectée, aux environs de ces points, par la famille de courbes envisagées. Il ramène ensuite l'étude générale de la forme affectée par la famille de courbes envisagées à celle de cette forme dans une suite de régions recouvertes une seule fois par les courbes intégrales et limitées chacune par une partie fermée de la courbe du discriminant : à chacune de ces régions correspond un *nombre caractéristique* qui est lié très simplement au nombre de points singuliers de caractères différents que l'on a rencontrés dans les paragraphes précédents. Enfin M. Dyck met en évidence la différence capitale qu'il y a (hors de la courbe du discriminant où elle est évidente), entre la façon dont se comporte une famille de courbes définies par une équation différentielle du premier ordre $F(x, y, y') = 0$ et une famille de courbes définies par une équation de la forme $\Phi(x, y, c) = 0$, où $c$ désigne un paramètre quelconque.

## *Voss* (*A.*). — Sur des invariants différentiels particuliers que l'on rencontre dans la théorie des surfaces. (59).

Cette Communication n'est pas insérée dans ce Recueil.

## *von Haerdtl* (*Ed.*). — Remarques concernant un cas particulier du problème des trois corps. (189).

Ce Mémoire, qui a été couronné par l'Académie de Copenhague (médaille d'or), est inséré dans les *Mémoires de l'Académie*.

## *Brill* (*A.*). — Sur la façon dont se comporte une fonction de deux variables aux environs d'un zéro de cette fonction (207-220).

On peut toujours, comme l'a montré Weierstrass, ramener une fonction entière de deux variables $x, y$ qui s'annule pour $x = x_0$, $y = y_0$ à une forme réduite déterminée. M. Brill décompose cette forme réduite en facteurs linéaires de la forme $y - y_0 - P(x - x_0)$, où P désigne une série entière; cette décomposition est immédiate, sauf dans le cas où les termes de moindre dimension peuvent être mis sous la forme d'une puissance parfaite. L'étude de la façon dont se comporte une fonction de deux variables aux environs d'un zéro de cette fonction est ainsi notablement simplifiée.

## Tome XXII.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1892.

*Bauer* (*G.*). — Représentation des formes binaires par une somme de puissances; en particulier, représentation d'une forme binaire de dimension paire $2n$ par une somme de $(n+1)$ puissances. (3-20).

La formule qui permet de représenter les formes binaires par des sommes de puissances peut s'obtenir soit en faisant intervenir les formes *apolaires* (STURM, *Journal für Mathematik*, t. LXXXVI, p. 117) de ces formes binaires, soit en suivant une marche analogue à celle qu'a suivie Sylvester pour représenter une forme de degré $(2m-1)$ par une somme de $m$ puissances. La formule *générale* de décomposition en une somme de puissances, obtenue par M. Bauer, est très simple et très élégante; après l'avoir appliquée à la représentation d'une forme binaire de dimension $2n$ par une somme de $(n+1)$ puissances, M. Bauer envisage le cas particulier où deux formes biquadratiques $f$ et $\varphi$ ont la même forme apolaire cubique $\psi$; dans ce cas, toute forme du faisceau de formes

$$f+\lambda\varphi$$

peut être représentée par les puissances des facteurs linéaires de la forme apolaire $\psi$. En prenant, par exemple, pour $f$ et $\varphi$, les formes binaires

$$f=(x_1^2+x_2^2)^2, \qquad \varphi=4x_1^3x_2+18x_1^2x_2^2+12x_1x_2^3+9x_2^4,$$

ayant toutes deux la même forme apolaire

$$\psi=x_1^3-3x_1x_2^2=x_1(x_1-\sqrt{3}x_2)(x_1+\sqrt{3}x_2),$$

on a

$$f=\frac{8}{9}x_1^4+\frac{1}{18}(x_1-\sqrt{3}x_2)^4+\frac{1}{18}(x_1+\sqrt{3}x_2)^4;$$

$$\varphi=-x_1^4+\frac{1}{3+\sqrt{3}}(x_1-\sqrt{3}x_2)^4+\frac{1}{3-\sqrt{3}}(x_1+\sqrt{3}x_2)^4.$$

En terminant, M. Bauer remarque qu'une forme biquadratique et son hessien ne peuvent jamais être représentés, l'une et l'autre, par une somme de trois termes, au moyen des mêmes trois puissances.

*Lüroth* (*J.*). — Sur la détermination d'une surface par des mesures géodésiques. (27-52).

*Brunn* (*H.*). — Sur l'enchaînement d'anneaux de formes quelconques ou de chaînes quelconques d'anneaux. (77-99).

A chaque chaîne d'anneaux correspond un schéma formé par un Tableau

de lettres disposées d'une façon déterminée. Inversement à chaque schéma correspond une chaîne d'anneaux. A chaque chaîne correspondent aussi des nombres caractéristiques.

*Dyck* (*W.*). — Sur la forme affectée par une famille de courbes planes définies par une équation différentielle du premier ordre. Second article (101-138).

Pour étudier la forme générale des courbes intégrales d'une équation différentielle du premier ordre, on peut suivre une voie toute différente de celle indiquée par M. Dyck dans un premier article (tome XXI). Elle consiste à envisager, au lieu de l'équation différentielle du premier ordre $F(x, y, y') = 0$, l'équation différentielle plus générale $F(x, y, y') - k = 0$, dans laquelle $k$ désigne un paramètre arbitraire, et à étudier la façon dont varient les courbes intégrales de cette équation différentielle, quand on fait varier le paramètre $k$ d'une façon continue. La variation continue de $k$ ne change pas, en général, le caractère d'ensemble, au sens de l'*Analysis situs*, de la famille de courbes intégrales; ce caractère change seulement en certains points où des singularités apparaissent, se transforment ou disparaissent; tout revient à déterminer et à caractériser ces points quand $k$ tend vers zéro à partir d'une valeur particulière $k_0$ pour laquelle l'étude de la forme affectée par la famille de courbes intégrales de l'équation différentielle $F(x, y, y') - k = 0$ est immédiate.

M. Dyck montre comment on peut ainsi étudier effectivement la forme générale des courbes intégrales de toute équation différentielle du premier ordre

$$F(x, y, y') = 0,$$

dans laquelle F désigne une fonction univoque réelle du point analytique réel $(x, y, y')$ qui ne s'annule que pour des valeurs finies de $x, y, y'$ et est développable en série de Taylor aux environs de chacun des points analytiques $(x_0, y_0, y'_0)$ dont les coordonnées vérifient identiquement l'équation $F = 0$, de façon que, dans ce développement, les trois coefficients $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}$ de $x - x_0$, $y - y_0, y' - y'_0$, ne s'annulent pas simultanément [sauf, tout au plus, en des points $(x_0, y_0, y'_0)$ à distance finie les uns des autres].

*von Voit.* — Notice biographique sur William Weber. (199-200).

*von Voit.* — Notice biographique sur Léopold Kronecker. (202).

*Pringsheim* (*A.*). — Sur la théorie de la série de Taylor et sur celle des fonctions analytiques n'existant que dans un domaine restreint. (211-245).

Il existe des fonctions réelles d'une variable réelle qui, en un point déterminé, sont finies et déterminées et admettent des dérivées finies et déterminées de tous les ordres sans cependant pouvoir être développées en série de Taylor aux environs de ce point. Ni l'exemple classique de ce fait, donné par Cauchy, ni celui de Paul du Bois-Reymond ne semblent absolument probants à M. Pringsheim; il ne cite pas celui de M. Lerch qu'il ne connaissait pas

encore au moment où il écrivait cet article. Au contraire des exemples cités, les fonctions envisagées par M. Pringsheim sont assez simples pour permettre de contrôler directement qu'elles jouissent de la propriété annoncée.

M. Pringsheim établit ensuite des conditions générales sous lesquelles on peut appliquer en toute rigueur le *principe de la condensation* pour obtenir des fonctions jouissant de la même propriété en une infinité de points. Il obtient ainsi diverses fonctions du type

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{c_\nu}{a_\nu - x} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} A_\lambda x^\lambda,$$

qui, non seulement à l'intérieur, mais aussi en chacun des points de la circonférence (C) du cercle de centre o et de rayon 1, sont finies et continues ainsi que leurs dérivées de tous les ordres

$$n! \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{c_\nu}{(a_\nu - x)^{n+1}}, \quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) A_\lambda x^{\lambda-n},$$

et qui cependant ne sont développables en série de Taylor aux environs d'aucun des points de la circonférence (C), en sorte que la fonction analytique que définit une de ces fonctions à l'intérieur de la circonférence (C) ne peut être continuée hors de cette circonférence. Ces fonctions sont, il est vrai, moins simples que celle qui est due à M. Fredholm (*Acta mathematica*, t. 15, p. 279); mais la façon dont elles sont obtenues permet de se rendre compte de l'origine des points singuliers, partout denses sur la circonférence (C), qui empêchent de continuer la fonction hors de cette circonférence; pour ces fonctions la série de Taylor, formée au moyen des dérivées finies et déterminées de la fonction en un de ses points, converge sans que sa somme représente cette fonction. Enfin M. Pringsheim construit des fonctions, d'un type aussi simple que celui de M. Fredholm, qui, ainsi que toutes leurs dérivées, sont encore finies et déterminées en chacun des points de la même circonférence (C), mais pour lesquels la série de Taylor, formée au moyen de ces dérivées en chacun des points d'un ensemble partout dense sur (C), est *divergente*.

## *Voss* (*A.*). — Sur les équations fondamentales de la théorie des surfaces. (247-278).

Établissement des équations fondamentales de la théorie des surfaces en ne faisant intervenir, dans la mesure du possible, que des invariants isométriques ayant un caractère géométrique, au lieu de n'envisager, comme l'a fait Gauss, que des invariants isométriques ayant un caractère analytique. (Les coefficients E, F, G qui figurent dans l'expression de $ds^2$ en coordonnées curvilignes sont des invariants isométriques; mais ils changent quand on passe, sur la surface, d'un système de coordonnées curvilignes à un autre; ils n'ont donc qu'un caractère *analytique*. Au contraire, le rayon de courbure géodésique d'une courbe quelconque tracée sur la surface est un invariant isométrique qui a un caractère *géométrique*.)

Expression générale de la mesure de la courbure d'une surface au moyen d'invariants isométriques ayant un caractère géométrique.

*Boltzmann* (*L.*). — Sur un milieu impondérable jouissant de propriétés mécaniques permettant d'établir les équations de l'électromagnétisme dues à Maxwell. (271-301).

*Boltzmann* (*L.*). — Étude sur l'équilibre de la force vive. Troisième partie. (329-358).

*Dyck* (*W.*). — Présentations d'un catalogue de modèles, appareils et instruments de Mathématique et de Physique mathématique. (370).

Tome XXIII.

Aucune Communication mathématique n'a été faite à l'Académie en 1893.

Tome XXIV.

Communications mathématiques faites à l'Académie en 1894.

*Döhlemann* (*K.*). — Sur une transformation très simple de l'espace, qui est univoque et du troisième ordre. (41-50).

Il s'agit de la correspondance univoque que voici : Soient $a_1$, $a_2$, $a_3$ trois droites quelconques d'une variété (X) à trois dimensions et $b_1$, $b_2$, $b_3$ trois droites quelconques d'une variété (Y) à trois dimensions. Par chacune de ces six droites menons un faisceau de plans et faisons se correspondre projectivement les deux faisceaux menés par $a_1$ et $b_1$, les deux faisceaux menés par $a_2$ et $b_2$ et les deux faisceaux menés par $a_3$ et $b_3$. A chaque point P de la variété (X), envisagé comme intersection de trois plans des trois faisceaux menés par $a_1, a_2, a_3$ correspond alors un point Q intersection des trois plans correspondants des trois faisceaux menés par $b_1$, $b_2$, $b_3$. Si P décrit une droite dans la variété (X), Q décrit en général une courbe gauche du troisième ordre dans la variété (Y). Si P décrit un plan dans la variété (X), Q décrit une surface du troisième ordre dans la variété (Y). C'est cette correspondance bien connue que M. Döhlemann étudie en détail.

*Brunn* (*H.*). — Rapport sur un Mémoire intitulé : *Fondements exacts d'une théorie des ovales.* (93-111).

Il s'agit de recherches sur la théorie des courbes planes ovales faites à un point de vue géométrique, recherches parallèles à certains égards à celles que M. Minkowski a faites en se plaçant à un point de vue analytique dans son Ouvrage sur la *Géométrie des nombres* (*Geometrie der Zahlen*). L'Auteur reprend ensuite la démonstration de théorèmes fondamentaux publiés dans sa thèse de doctorat et concernant les ovoïdes (*Eiflächen*).

*von Voit.* — Notice biographique sur Ernst-Eduard Kummer, (140-141).

*von Voit.* — Notice biographique sur Moritz-Abraham Stern. (142).

*von Voit.* — Notice biographique sur Heinrich-Rudolph Hertz. (146-148).

*Seeliger* (*H.*). — Remarques concernant les recherches de Maxwell et celles de Hirn sur la constitution de l'anneau de Saturne. (161-188).

*Boltzmann* (*L.*). — Sur la démonstration de la loi de Maxvell concernant la distribution des vitesses entre des molécules gazeuses. (207-210).

*Boltzmann* (*L.*). — Contribution à l'intégration de l'équation de la diffusion lorsque le coefficient de diffusion est variable. (211-217).

*Wassmuth* (*A.*). — Sur une application du principe du plus petit effort (principe de Gauss) à l'Électrodynamique. (219-230).

*Schütz* (*I.-R.*). — Sur une généralisation des intégrales-tourbillons de von Helmholtz à laquelle correspond une variété infinie d'images mécaniques dans l'électrodynamique de Maxwell. (273-295).

*Maurer* (*L.*). — Sur la théorie des groupes continus homogènes et linéaires. (297-341).

Ce Mémoire complète celui qui est inséré dans le Tome XVIII des *Sitzungsberichte*, Mémoire dont on a donné plus haut un compte rendu sommaire.

Envisageons deux substitutions du groupe continu le plus général de substitutions linéaires homogènes qui transforme en elle-même une forme rationnelle et homogène de $n$ variables $x_1, x_2, \ldots x_n$. Soient $u_1, u_2, \ldots u_m$ les $m$ paramètres au moyen desquels les coefficients $a_{\lambda\mu}$ de la première substitution s'expriment rationnellement et soient $v_1, v_2, \ldots, v_m$ les $m$ paramètres au moyen desquels les coefficients $a_{\lambda\mu}$ de la seconde substitution s'expriment rationnellement. En comparant ces deux substitutions, on obtient une nouvelle substitution du groupe; soient $w_1, w_2, \ldots, w_m$ les $m$ paramètres au moyen desquels les coefficients $a_{\lambda\mu}$ de cette nouvelle substitution s'expriment rationnellement. Il est clair que $w_1, w_2, \ldots, w_m$ sont des fonctions algébriques de

$u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_m$; mais on démontre de plus que par un choix convenable des $m$ transformations infinitésimales régulières linéairement indépendantes, dont l'existence est assurée comme on l'a vu dans l'article précédent, on peut toujours s'arranger de façon que $w_1, w_2, \ldots, w_m$ soient des fonctions *rationnelles* de $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_m$.

L'intérêt que présente ce théorème dans la théorie des groupes continus de transformations fait présager son importance dans la théorie générale des invariants.

Pour démontrer son théorème, M. Maurer montre que non seulement les $n^2$ coefficients de substitution $a_{\lambda\mu}$ s'expriment rationnellement en fonction de $m$ paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_m$, mais que, par un choix convenable des $m$ transformations infinitésimales régulières linéairement indépendantes dont il a été question dans l'article précédent, les paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_m$ s'expriment eux-mêmes rationnellement en fonction de $n^2$ coefficients $a_{\lambda\mu}$. Il le montre successivement pour les groupes dont les transformations infinitésimales sont régulières de première ou de seconde espèce, puis pour ceux dont les transformations infinitésimales sont irrégulières. Il s'appuie, à cet effet, sur une suite de théorèmes empruntés à la théorie des formes bilinéaires, théorèmes dont la démonstration forme la première partie de son Mémoire.

## *Bauer* (*G.*). — Remarques sur certaines propriétés des polynomes de Legendre dont on a l'occasion de faire usage dans la théorie des nombres. (343-359).

Soit $X_n$ le polynome de Legendre de degré $n$, c'est-à-dire le polynome

$$X_n = \frac{1.3.5(2n-1)}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(n-1)(2n-3)}x^{n-4}\ldots\right],$$

ou encore le coefficient de $z^n$ dans le développement, en série entière en $z$, de l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

On sait que, pour $x = 1$, on a, quel que soit l'indice $n$,

$$X_n = 1;$$

en s'appuyant sur une remarque faite par Euler, M. Bauer avait montré que, dans chaque polynome $X_n$, les coefficients des puissances de $x$, réduits à leur plus simple expression, ne peuvent contenir à leur dénominateur que des puissances de 2; les coefficients de $X_n$ ne peuvent d'ailleurs contenir à leur dénominateur le facteur 2 que $(n-1)$ fois au plus. Dans le Mémoire actuel, M. Bauer montre en outre que, *pour toute valeur entière de $x$, chaque polynome $X_n$ se réduit lui-même à un nombre entier impair*. De plus, la valeur de l'intégrale $\int_1 X_n\,dx$ et les valeurs de toutes les dérivées de $X_n$, prises par rapport à $x$, sont, pour $x$ entier impair, nécessairement des nombres entiers.

## *Planck* (*M.*). — Sur la démonstration de la loi de distribution des vitesses de Maxwell, entre des molécules gazeuses. (391-394).

2nd Partie.



*Lindemann* (*F.*). — Sur la représentation conforme sur un demi-plan, d'une aire simplement connexe limitée par une courbe algébrique. (403-422).

Lorsque l'aire envisagée est limitée par un nombre fini de segments et d'arcs de cercle, on peut effectuer sa représentation conforme sur un demi-plan en suivant la méthode de M. Schwarz; la question est alors ramenée, comme on sait, à résoudre une équation différentielle déterminée du troisième ordre. M. Lindemann démontre que, quand l'aire simplement connexe envisagée est limitée par une des boucles d'une courbe algébrique, la représentation conforme de cette aire sur un demi-plan se ramène aussi à la résolution d'une équation différentielle du troisième ordre déterminée et il montre comment on peut obtenir cette équation différentielle.

*Seeliger* (*H.*). — Sur l'ombre projetée par une planète. (423-438).

Tome XXV.

Communications faites à l'Académie en 1895.

*Dyck* (*W.*). — Sur la détermination du nombre de racines communes à $n$ équations à $n$ inconnues et sur le calcul de la somme des valeurs qu'une fonction de $n$ variables prend quand on y remplace les $n$ variables par ces racines communes. (1).

Exposé des travaux de Kronecker et de ceux de M. Picard. Continuation de ces recherches dans la voie ouverte par Cauchy. Ce Mémoire est analysé plus loin (*Comptes rendus* des tomes XXV, p. 261, 305, 447 et XXVIII, p. 209).

*Boltzmann* (*L.*). — Nouvelles observations sur la loi de distribution des vitesses de Maxwell. (25-26).

*Pringsheim* (*A.*). — Sur l'intégrale de Cauchy. (39-72).

Critique des démonstrations du théorème fondamental de Cauchy que l'on trouve dans la plupart des Traités et qui s'appuient soit sur le calcul des variations, soit sur des considérations infinitésimales ne pouvant être développées d'une façon rigoureuse qu'en supposant que les fonctions que l'on envisage jouissent de propriétés restrictives qui enlèvent au théorème une grande partie de sa portée. La démonstration si simple et élégante de M. Goursat n'échappe pas à la critique de M. Pringsheim; il lui semble, en particulier, *illusoire* d'admettre le théorème comme évident pour les intégrales $\int dz$ et $\int z\,dz$, prises le long du contour fermé que l'on envisage; il en donne pour raison que, dans le cas de ces intégrales particulières, le passage à la limite, nécessaire pour établir en toute rigueur le théorème de Cauchy, n'est guère plus simple que dans le cas général.

La démonstration, due elle aussi à Cauchy (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXIII, p. 251) et qui consiste à déduire son théorème fondamental de la formule analogue à celle de Green, qui permet de transformer une intégrale double prise dans une aire donnée en une intégrale curviligne prise le long du contour de cette aire, est quelque peu indirecte et la difficulté qu'éprouvent à la bien comprendre, les personnes peu familières encore avec le calcul intégral, ne semble pas entièrement supprimée par la simplification qu'y a apportée Kronecker (*Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, 1885, p. 785, et *Vorlesungen*, t. I, publié par E. Netto, p. 37-41).

Pour toutes ces raisons, il n'a pas semblé inutile à M. Pringsheim de proposer une nouvelle démonstration du théorème fondamental de Cauchy qui, tout en se rattachant aux dernières démonstrations que nous venons de rappeler, soit aisée à comprendre même pour les commençants tout en étant entièrement rigoureuse. A cet effet, il commence par reprendre la définition des intégrales curvilignes et la démonstration de leurs propriétés; il montre ensuite comment on peut représenter d'une façon approchée une intégrale curviligne quelconque par une intégrale prise le long des côtés d'un polygone, supposés alternativement parallèles aux deux axes coordonnés rectangulaires; on pourrait, peut-être, donner à ces intégrales le nom de *scalaires*. Ceci posé, si les fonctions P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ de deux variables $x$, $y$, sont univoques, finies et, en général, continues dans un domaine (E) (qui est supposé connexe, mais n'est pas nécessairement *simplement* connexe) et si, $(x_0, y_0)$, $(x, y)$ désignant deux points fixés arbitrairement à l'*intérieur* de ce domaine, les intégrales

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} (P\, d\xi + Q\, d\eta),$$

prises le long de toutes les courbes tracées tout entières à l'*intérieur* du domaine envisagé et joignant les deux points $(x_0, y_0)$, $(x, y)$, ont une seule et même valeur, on a nécessairement, en chacun des points $(x_1, y_1)$ du domaine (E) aux environs desquels les fonctions P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ des deux variables $x$, $y$ sont continues, la relation

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_1\\ y=y_1}} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_1\\ y=y_1}}.$$

Inversement, si les fonctions P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ de deux variables $x$, $y$ sont univoques et finies en chacun des points d'un domaine (E), qui peut être soit simplement connexe, soit d'une connexion multiple; si ces mêmes fonctions sont uniformément continues dans chaque domaine (E') situé tout entier à l'*intérieur* du domaine (E); si enfin on a, en chacun des points *intérieurs* du domaine (E), la relation

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

l'intégrale

$$\int (P\, d\xi + Q\, d\eta),$$

prise le long du contour d'une aire connexe quelconque située tout entière à

l'intérieur du domaine (E), est nécessairement *nulle*. L'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} (P\, d\xi + Q\, d\eta),$$

prise le long d'une courbe *quelconque* joignant les points $(x_0, y_0)$, $(x, y)$, et située tout entière dans une partie simplement connexe du domaine (E), définit une fonction univoque et continue

$$W(x, y)$$

des deux variables $x$, $y$, dont les dérivées partielles sont égales à

$$\frac{\partial W}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = Q.$$

## *Pringsheim* (*A.*). — Sur le développement des fonctions analytiques univoques d'une variable, en séries entières. (75-92).

Développement analogue à celui dû à Cauchy et inséré dans ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. I, p. 269, et à celui que donne J. Serret dans son *Calcul différentiel et intégral*, t. I, p. 570, en ce sens que M. Pringsheim forme les coefficients du développement au moyen de *valeurs moyennes* de la fonction et non au moyen d'intégrales, comme on le fait généralement dans la plupart des Traités de Calcul différentiel et intégral. Ce qui distingue la démonstration de M. Pringsheim, c'est sa grande simplicité et son caractère élémentaire.

Pour abréger l'écriture, désignons par $\lambda_n$ l'expression

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}},$$

formée au moyen de $(n-3)$ radicaux superposés, chacun de ces radicaux étant pris avec sa détermination arithmétique, et par $a_n$ le nombre complexe

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_n} + i\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda_n},$$

où chacun des deux radicaux est pris avec sa détermination arithmétique.

Si une fonction $f(x)$ d'une variable complexe $x$ est univoque et, en général, continue en chacun des points $x$ dont la valeur absolue $|x|$ est égale à un nombre positif déterminé $r$, on appellera *valeur moyenne* de $f(r)$ et l'on désignera par le symbole $Mf(r)$ l'expression

$$Mf(r) = \lim_{n=\infty} \left[ \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=0}^{\nu=2^n-1} f(r a_n^{\nu n}) \right],$$

Si la fonction envisagée $f(x)$ est, en outre, *analytique* pour toutes les valeurs de $x$ pour lesquelles

$$R_0 \leqq |x| \leqq R,$$

où $R_0$ et $R$ sont deux nombres positifs donnés (le cas où $R_0$ est *nul* n'étant pas

exclu), on peut démontrer que la valeur moyenne $Mf(r)$ que l'on vient de définir est *la même* quel que soit celui des nombres $r$ que l'on choisisse dans l'intervalle $(R_0, R)$. Cela fait, il est aisé de voir que, pour chaque valeur de $x$ dont la valeur absolue vérifie les inégalités

$$R_0 < |x| < R,$$

l'égalité

$$f(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} x^\mu M\left[\frac{f(r)}{r^\mu}\right]$$

est vérifiée quel que soit le nombre $r$ que l'on choisisse dans l'intervalle $(R_0, R)$. C'est la formule du commandant Laurent; elle est démontrée en toute rigueur et d'une façon élémentaire pour toute fonction analytique univoque $f(x)$. Dans le cas où $R_0 = 0$, on a, en particulier,

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} x^\mu M\left[\frac{f(r)}{r^\mu}\right];$$

c'est la formule de Maclaurin.

*Nöther* (*M.*). — Sur les sept systèmes de coniques qui passent par les points de tangence des tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre. (93-100).

Étude complète de ces systèmes, complétant les recherches de O. Hesse (*Journal für Mathematik*, t. 40 et 49) et celles de M. Nöther lui-même (*Mathematische Annalen*, t. XV).

*von Weber* (*Ed.*). — Sur les équations aux dérivées partielles simultanées, du second ordre, dépendant de trois variables indépendantes. (101-113).

Recherche, par un nouveau procédé, plus simple que ceux de Valyi et de Bianchi, des intégrales communes à deux équations aux dérivées partielles du second ordre, dépendant de trois variables indépendantes. Notion nouvelle d'un *système de bandes partout intégrables* (*unbeschränkt integrabeln Streifensystem*). Étude, au moyen de cette notion nouvelle, d'un cas particulier qui joue un rôle important dans la théorie générale des équations aux dérivées partielles d'ordres supérieurs (comparer Darboux, *Annales de l'École Normale supérieure*, t. VII).

*von Voit*. — Notice biographique sur Carl Maximilian von Bauernfeind. (161-170).

*Lindemann* (*F.*). — Sur la représentation conforme d'un demi-plan sur un polygone curviligne limité par des arcs de coniques homofocales. (219-237).

Lorsqu'on cherche à résoudre le problème de la représentation conforme

univoque d'une aire limitée par une courbe déterminée, sur un demi-plan, les points de ramification de la fonction qui fournit cette représentation conforme détruisent en général l'univocité de la représentation conforme précisément aux points où il serait indispensable qu'elle ne fût pas détruite. Parfois cependant on peut éviter la difficulté; le Mémoire de M. Lindemann en fournit un exemple intéressant.

*Dyck* (*W.*). — Contribution à la théorie du potentiel. Premier article : Sur la représentation par des intégrales définies du nombre que Kronecker a nommé *caractéristique* d'un système de $n+1$ fonctions de $n$ variables indépendantes réelles. (261-277).

L'intégrale par laquelle Kronecker représente la *caractéristique* d'un système de $n+1$ fonctions de $n$ variables indépendantes réelles et les deux formules de sommation de Kronecker au moyen desquelles on peut déterminer les caractéristiques, peuvent être envisagées la première comme un cas particulier, la seconde comme un cas limite d'une représentation générale de la caractéristique due à M. Walther Dyck.

On remarquera, dans son Mémoire, la représentation presque immédiate qu'il donne de la caractéristique d'un système de $n+1$ fonctions de $n$ variables au moyen d'une intégrale multiple d'ordre $n$ dont l'élément peut être envisagé comme la généralisation dans une variété d'ordre $n$ de l'angle solide élémentaire introduit par Gauss dans la formule fondamentale de la théorie du potentiel qui porte son nom.

*Lindemann* (*F.*). — Sur la représentation conforme d'une aire limitée par des arcs de paraboles ayant même axe. (278).

Cette Communication n'a pas été publiée.

*Lindemann* (*F.*) présente à l'Académie un modèle antique en bronze trouvé en Asie Mineure et représentant une des figures rhomboïdales d'Archimède. (278).

Archimède a, comme on sait, étudié le premier les polyèdres semi-réguliers à angles solides égaux; Pappus énumère les treize polyèdres rentrant dans ce type. Les figures polaires de ces polyèdres semi-réguliers sont des polyèdres semi-réguliers à faces égales; ils n'ont été étudiés qu'au dix-neuvième siècle. Le spécimen, trouvé en Asie Mineure, que M. Lindemann présente à l'Académie, rentre cependant dans ce dernier type, et comme son authenticité ne semble pas pouvoir être mise en doute, il faut bien admettre qu'au moins une des figures polaires des treize polyèdres énumérés par Pappus a été envisagée par les anciens. Ce polyèdre n'est pas mentionné par Pappus; il est donc fort probable qu'il n'avait pas encore été envisagé de son temps; il est bien possible qu'il ait été envisagé pour la première fois par un mathématicien vivant au quatrième, cinquième ou sixième siècle de notre ère; le modèle qui nous est parvenu ornait peut-être son tombeau.

Le spécimen présenté par M. Lindemann est massif; il est limité par trente

losanges égaux formant un polyèdre circonscrit à une sphère; sur les trente-deux sommets de ce polyèdre il y en a *douze* où viennent aboutir *cinq* des trente losanges et *vingt* où viennent aboutir *trois* seulement des trente losanges.

*Pringsheim* (*A.*). — Sur l'intégrale de Cauchy. Deuxième article. (295-304).

Démonstration pour les fonctions d'une variable complexe de la formule des accroissements finis, ou plutôt de la généralisation de cette formule que l'on doit à M. Darboux.

Ce théorème une fois établi, il est aisé de démontrer que la condition *nécessaire et suffisante* pour qu'une fonction $f(z)$ d'une variable complexe $z$, univoque et finie dans un domaine (E), soit continue dans ce domaine et y admette une fonction dérivée $f'(z)$, elle-même univoque et *continue*, est que le quotient des différences

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},$$

soit une fonction uniformément continue des deux variables $z$, $\Delta z$, pour toutes les valeurs de $z$ faisant partie du domaine (E) et pour tous les $\Delta z$ plus petits, en valeur absolue, qu'un nombre fini arbitrairement fixé.

*Schmidt* (*Adolph*). — Sur une nouvelle détermination du potentiel magnétique terrestre. (305).

Cette communication est insérée dans les Mémoires de l'Académie.

*Dyck* (*W.*). — Contribution à la théorie du potentiel. Second article : Sur la formule de Gauss se rapportant à l'enlacement réciproque de deux courbes gauches et sur son extension à des variétés d'ordre supérieur. Représentation du nombre des enlacements au moyen de caractéristiques de certains systèmes de fonctions. (305, 447-499).

Ce Mémoire de M. Dyck comprend deux parties. Dans la première il édifie une théorie générale de l'enlacement de deux courbes gauches fermées quelconques n'ayant aucun point commun. A cet effet, il établit les relations qui lient l'intégrale de Gauss, au moyen de laquelle on peut évaluer le nombre des enlacements de deux courbes gauches, et la caractéristique (au sens de Kronecker) de certains systèmes de fonctions. On obtient ces systèmes de fonctions en représentant les coordonnées des deux courbes gauches en fonction de paramètres convenablement choisis et aussi en envisageant chacune des deux courbes gauches comme l'intersection de surfaces convenablement choisies.

Dans la seconde partie de son Mémoire M. Dyck définit l'enlacement d'une variété d'ordre $k$ autour d'une variété d'ordre $(n-k-1)$ lorsque ces deux variétés sont situées dans un espace (linéaire) à $n$ dimensions. Il étend à ce cas général des formules analytiques obtenues directement dans le cas où $n=3$ et $k=1$. Il obtient ainsi, dans l'espace à $n$ dimensions, tout un système de

paires de variétés d'ordres 0 et $n-1$, 1 et $n-2$, 2 et $n-3$, ..., auxquelles correspond le *même nombre* d'enlacements.

Ces recherches de M. Dyck, mettent en pleine lumière l'importance de la notion de *caractéristique* due à Kronecker.

*Pringsheim* (*A.*). — Sur la façon dont peuvent se comporter les séries entières sur la circonférence de leur cercle de convergence et sur les séries de Fourier. (337-370).

Soit

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu,$$

une fonction représentée par la somme d'une série entière convergente à l'intérieur du cercle (C) décrit de l'origine des coordonnées comme centre avec un rayon égal à l'unité. Nous supposerons, d'une part que, sauf en un nombre *fini* de points $x = e^{\omega i}$ de la circonférence (C), l'expression $f(e^{\omega i})$ envisagée comme une fonction de la variable réelle $\omega$, est non seulement continue mais admet aussi des dérivées de tous les ordres; et, d'autre part, que cette même fonction $f(e^{\omega i})$ de la variable réelle $\omega$, est intégrable en chaque point de la circonférence (C). Nous supposerons aussi que la série dont le terme général est $a_\nu e^{\nu\omega}$ est convergente, sauf pour des valeurs de $\omega$ correspondant à un nombre fini de points de la circonférence (C).

Sous ces trois hypothèses, il est clair que l'expression

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu e^{\nu\omega i},$$

envisagée comme une fonction de la variable réelle $\omega$, est identique avec le développement en série trigonométrique de la fonction $f(e^{i\omega})$ de la variable réelle $\omega$. La première des trois hypothèses est d'ailleurs inutile; la seconde peut être remplacée par une hypothèse bien moins restrictive; quant à la troisième, on a cru pendant assez longtemps qu'elle était toujours vérifiée dès que l'expression $f(e^{\omega i})$, envisagée comme une fonction de la variable réelle $\omega$, est développable en série trigonométrique. Cette erreur étant encore assez répandue, il y a quelque intérêt à démontrer le contraire et à en donner des exemples; c'est ce qu'a fait M. Pringsheim en démontrant qu'il existe des séries entières qui *divergent* sur la circonférence de leur cercle de convergence, quoique la fonction que représente la somme de ces séries à l'intérieur du cercle de convergence, envisagée comme une fonction de l'argument de la variable complexe sur la circonférence de ce cercle de convergence, soit développable en série trigonométrique.

M. Pringsheim donne aussi un exemple d'une série qui converge sur la circonférence de son cercle de convergence, sauf en un seul point de cette circonférence, et qui, envisagée sur cette circonférence comme une fonction de l'argument de la variable complexe, ne peut être développée en une série de Fourier dans laquelle les coefficients soient représentés par des intégrales définies proprement dites, mais seulement en une série de Fourier dans laquelle les coefficients sont représentés par des intégrales définies « généra-

lisées », suivant la terminologie de M. Jordan, ou « artificielles » suivant celle de M. Méray.

*Lehmann-Filhès* (*R.*). — Sur les perturbations séculaires de la Lune sous l'influence d'une force de gravitation n'agissant pas à distance d'une façon instantanée. (371-422).

Si l'on suppose que la gravitation est une force émanant des centres d'attraction et se transmettant en ligne droite avec une vitesse constante avant de faire sentir son action sur les points matériels sur lesquels elle agit, il en résulte nécessairement certaines perturbations dans le mouvement des corps célestes et ces perturbations offrent une certaine analogie avec les phénomènes d'aberration et de lumière.

On peut se proposer d'évaluer ces perturbations en fonction de la vitesse constante de la gravitation, dans le mouvement de la Lune. M. Lehmann-Filhès démontre qu'elles ont nécessairement pour effet de *retarder* le moyen mouvement séculaire constant de la longitude de cet astre. L'expérience, comme on sait, montre que c'est justement le contraire qui a lieu; le moyen mouvement séculaire de la longitude de la Lune va en augmentant. On n'est donc pas en droit de faire l'hypothèse qui a servi de point de départ aux calculs de M. Lehmann-Filhès; la gravitation ne peut être une force émanant de centres d'attraction et se transmettant en ligne droite avec une vitesse constante.

*von Weber* (*Ed.*). — Sur certains systèmes d'équations de Pfaff. (423-442).

Dans ce Mémoire, M. von Weber pose les fondements d'une théorie générale de l'intégration des équations aux dérivées partielles dépendant de trois variables indépendantes. La théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, due à M. Darboux, peut être complétée, interprétée suivant les principes géométriques de Sophus Lie, et enfin étendue à des équations et systèmes d'équations aux dérivées partielles d'un ordre quelconque.

## Tome XXVI.

Communications faites à l'Académie en 1896.

*Voss* (*A.*). — Sur la transformation cogrédiente des formes bilinéaire en elles-mêmes. (1-23).

Dans les leçons de Géométrie de Clebsch, rédigées par M. Lindemann, on trouve une méthode permettant d'obtenir *toutes* les transformations linéaires qui transforment en elle-même une forme quadratique dépendant de trois ou de quatre variables. M. Lœwy s'est proposé d'effectuer la même recherche, en suivant la méthode de Clebsch, mais en l'étendant au cas général où la forme quadratique dépend d'un nombre quelconque de variables. Comme les formules générales obtenues par M. Lœwy ne permettent pas d'évaluer le nombre de paramètres indépendants figurant dans les transformations et que, d'autre part,

on n'aperçoit aucune analogie entre ces formules et celles bien connues de Cayley qui se rapportent à la transformation d'une somme de carrés en elle-même, M. Voss a cru devoir reprendre le même problème en se plaçant à un point de vue différent.

La solution qu'il en donne peut être étendue au problème plus général encore de la transformation cogrédiente en elle-même d'une forme bilinéaire quelconque, à déterminant différent à zéro.

Parmi les transformations cogrédientes d'une forme bilinéaire en elle-même, M. Voss envisage, en particulier, celles qui transforment en elles-mêmes les formes bilinéaires symétriques et celles qui transforment en elles-mêmes les formes bilinéaires alternées. Il montre comment on peut déterminer aisément, dans ces deux cas, le nombre de paramètres indépendants figurant dans la transformation et étudie la fonction caractéristique de chacune de ces deux transformations.

## *Seeliger* (*H.*). — Sur l'agrandissement apparent de l'ombre de la Terre dans les éclipses de Lune. (24).

Cette Communication est insérée dans les Mémoires de l'Académie.

## *Lœwy* (*A.*). — Remarques sur la théorie des transformations conjuguées d'une forme bilinéaire en elle-même. (25-30).

Une transformation conjuguée d'une forme bilinéaire $A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i y_k$ en elle-même est *propre* ou *impropre* suivant que le déterminant de transformation est égal à $+1$ ou à $-1$. On reconnaît aussi qu'elle est *propre* ou *impropre* suivant que le produit des racines de l'équation caractéristique

$$|A - \rho E| = 0$$

est égal à $+1$ ou à $-1$. Rappelons que $\rho$ désigne un paramètre variable, E la forme $E = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i$ et $|A - \rho E|$ le déterminant de la forme bilinéaire $A - \rho E$.

M. Lœwy démontre que pour qu'une forme bilinéaire A, à déterminant différent de zéro, se transforme en elle-même par des transformations conjuguées, propres et impropres, il faut et il suffit que la fonction caractéristique $|A - \rho E|$ de cette forme A admette au moins un diviseur élémentaire à exposant impair. Ce sont donc deux choses entièrement équivalentes que l'on exprime en disant que les exposants des diviseurs élémentaires de la fonction caractéristique d'une forme bilinéaire sont tous pairs, ou que la forme bilinéaire ne peut être transformée en elle-même que par des transformations propres.

M. Voss avait montré que toute forme symétrique se transforme en elle-même par des transformations symétriques. En appliquant aux formes symétriques les considérations générales développées par M. Lœwy, on peut compléter ce résultat en ajoutant que, parmi les formes symétriques, il y en a certainement qui ne peuvent être transformées en elles-mêmes par des transformations symétriques impropres.

*Lindemann* (*F.*). — Sur les transformations linéaires d'une variété quadratique en elle-même. (31-66).

L'objet principal du Mémoire de M. Lindemann est de mettre les formules générales de M. Lœwy, concernant les transformations linéaires d'une variété quadratique quelconque en elle-même, sous une forme telle que les résultats se rapportant aux mêmes transformations, obtenus par M. Voss dans un Mémoire dont il a été rendu compte plus haut, s'en déduisent aisément.

*Godt* (*W.*). — Sur le cercle de Feuerbach et sur une courbe du quatrième ordre et de troisième classe envisagée par Steiner. (119-166).

Soit $I_0 I_1 I_2 I_3$ un quadrangle dont les trois paires de côtés opposés se coupent à angle droit en trois points A, B, C. On sait que ces trois points A, B, C et les milieux des six côtés du quadrangle sont situés sur la circonférence d'un cercle auquel on donne parfois le nom de *cercle de Feuerbach*. On sait aussi que l'emploi de ce cercle permet d'établir facilement plusieurs théorèmes intéressants de Géométrie élémentaire. M. Godt montre qu'il permet aussi de démontrer plusieurs des théorèmes énoncés sans démonstration par Steiner (*Œuvres*, t. II, p. 641 et suivantes) et démontrés en partie par Cremona (*Journal für Mathematik*, t. 64) par une tout autre voie.

*Pringsheim* (*A.*). — Sur la théorie des fonctions synectiques (167-182).

Démonstration nouvelle du théorème d'après lequel toute fonction *synectique* dans un domaine (E) (c'est-à-dire univoque et admettant dans ce domaine une dérivée continue au sens de la théorie des fonctions d'une variable complexe), est développable en série entière aux environs de chacun des points de ce domaine.

Le mode de démonstration est le même que celui dont M. Pringsheim a déjà fait usage dans une précédente Communication à l'Académie en 1895. Il s'appuie sur les propriétés de la *valeur moyenne*

$$\mathrm{M}f(r),$$

d'une fonction $f(r)$ dont on trouvera la définition dans le compte rendu de cette communication.

Ce théorème une fois établi, l'étude des *intégrales* des fonctions synectiques ne présente naturellement plus aucune difficulté; le théorème fondamental de Cauchy, en particulier, se présente sous forme d'une identité. On voit aussi directement que l'intégrale $\int \frac{dx}{x-a}$, prise le long d'une courbe fermée entourant le point $a$, est égale à $2i\pi$, sans qu'il soit nécessaire pour obtenir ce résultat d'introduire des coordonnées polaires comme on le fait d'habitude. Plus généralement l'étude des intégrales des fonctions rationnelles d'une variable et celle des fonctions rationnelles de $x$ et de la racine carrée d'un polynome en $x$, peut être abordée avec un bagage très restreint de connaissances empruntées à la théorie générale des fonctions d'une variable complexe.

*Voss* (*A.*). *a.* — Sur le nombre des transformations cogrédientes et adjointes d'une forme bilinéaire en elle-même. (211-272).

*Voss* (*A.*). *b.* — Solutions symétriques et alternées de l'équation $SX = XS'$. (273-281).

*a.* Le problème se ramène à la détermination du nombre de solutions linéairement indépendantes de deux systèmes d'équations linéaires déterminées.

Dans le cas général, l'étude directe des mineurs des déterminants de ces deux systèmes d'équations linéaires ne semble pas être facile. Mais il est un cas particulier où cette étude se ramène, par des opérations rationnelles seulement, à celle de la fonction caractéristique de la forme envisagée. M. Voss consacre la plus grande partie de son Mémoire à l'étude de ce cas particulier qu'il développe avec soin. Le dernier paragraphe contient toutefois quelques considérations d'un caractère plus général.

On remarquera le lien qui unit la solution du problème proposé à la détermination du nombre de formes bilinéaires X, symétriques ou alternées, vérifiant une relation de la forme particulière

$$SXS' = S'XS.$$

*b.* Recherche analogue ayant pour objet de déterminer le nombre de formes X symétriques ou alternées qui vérifient une relation de la forme

$$SX = XS';$$

la forme S est donnée; son déterminant est différent de zéro; S' est semblable à S.

*Charlier* (*C.*). — Recherche sur les méthodes permettant de construire des Tables pour les perturbations des petites planètes. (287-308).

*von Voit.* — Notice biographique sur Franz-Ernst Neumann. (338-343).

*Seeliger* (*H.*). — Sur la loi de gravitation de Newton. (373-400).

D'après M. Seeliger, si nous admettons que la loi de gravitation de Newton s'applique à tout l'Univers, il nous faut aussi admettre que les masses de densité finie n'occupent qu'un espace *fini* (et non indéfini) dans tout l'Univers. Si, au contraire, nous admettons que les masses de densité finie distribuées dans l'Univers y occupent un espace infini, il nous faut aussi admettre que la loi de Newton ne saurait être qu'une loi approchée. Il est fort possible que l'on parvienne un jour à expliquer, sans modifier aucunement la loi de Newton, les quelques rares anomalies que semble encore présenter notre système solaire; mais, même alors, on ne serait aucunement en droit d'en conclure à la *possibilité* d'étendre la loi de Newton à tout l'Univers; bien au contraire, on devrait admettre que seules les petites dimensions de notre système solaire, relative

ment aux distances qui nous séparent des étoiles, permettent de lui appliquer sans aucune correction la loi de Newton.

Dans une seconde partie de son Mémoire, M. Seeliger montre que, dans l'hypothèse d'une masse infinie distribuée dans l'Univers, il n'est aucunement *nécessaire*, pour expliquer que l'éclat de la voûte céleste est loin d'être comparable à celle du Soleil, de supposer, comme l'ont fait L. de Cheseaux et, plus tard, Olbers, que la lumière provenant des étoiles est absorbée, en tout ou partie, par les espaces célestes qu'elle traverse avant de frapper notre rétine.

*Lindemann* (*F.*). — Continuation analytique des fonctions qui permettent d'effectuer la représentation conforme, sur un demi-plan, de l'aire intérieure à une conique donnée. (401-424).

Les formules au moyen desquelles on peut effectuer la représentation conforme sur un cercle de rayon égal à 1 ou, si l'on veut, sur un demi-plan, soit de la partie d'un plan située à l'intérieur soit de celle située à l'extérieur, d'une ellipse ou d'une parabole sont, comme on sait, dues à M. H.-A. Schwarz [*Œuvres*, t. II, p. 77, 102 et 141]. M. Lindemann a résolu le même problème dans le cas où l'ellipse est remplacée par une hyperbole.

Dans sa Communication à l'Académie, il commence par établir à nouveau les formules de M. Schwarz. Il étudie ensuite la continuation analytique de chacune des fonctions obtenues.

*von Weber* (*Ed.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles ordinaires. (425-437).

En s'appuyant sur une suite de propositions énoncées sans démonstration en 1872 par M. Lévy dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, M. König a, dans le tome XXIV des *Mathematische Annalen*, énoncé à son tour, sans le démontrer, un théorème d'après lequel l'application des criteriums donnés par M. Darboux (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. VI) permet d'obtenir *toutes* les classes d'équations aux dérivées partielles du second ordre dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles ordinaires.

M. von Weber se propose de démontrer le théorème de König. D'une façon plus précise, il démontre que pour que l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre dont les deux systèmes de caractéristiques sont distincts, se ramène à celle d'une équation différentielle ordinaire, *il faut et il suffit* qu'il existe deux nombres distincts $r$, $r'$ tels que les équations définissant les caractéristiques d'ordre $r$ et les caractéristiques d'ordre $r'$ de l'un des deux systèmes de caractéristiques admettent les unes et les autres une combinaison intégrale.

*Kantor* (*S.*). — Sur les moments $n$, de complexes $R_i$ dans $R_r$. (531-544).

Il s'agit d'une extension de la théorie des moments de M. Reye.

*Pringsheim* (*A*). — Sur la limite et sur le domaine limite entre convergence et divergence. (605-624).

Envisageons deux suites indéfinies monotones décroissantes de nombres positifs tendant vers zéro,

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \ldots$$
$$d_0, \quad d_1, \quad d_2, \quad \ldots, \quad d_n, \quad \ldots,$$

la première *convergente,* la seconde *divergente,* telles que l'on ait, pour chaque indice $\nu$,

$$d_\nu > c_\nu$$

et que

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{d_\nu}{c_\nu} = +\infty.$$

Si

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

désigne une suite indéfinie monotone de nombres positifs, cette suite ne peut être que *convergente,* lorsqu'il existe un entier $n$ tel que, pour tout indice $\nu \geqq n$, on ait

$$(A) \qquad a_\nu \leqq c_\nu;$$

elle ne peut être que *divergente,* lorsqu'il existe un entier $n$ tel que, pour tout indice $\nu \geqq n$, on ait

$$(B) \qquad a_\nu \geqq d_\nu;$$

Mais si, quelque grand que soit l'indice $\nu$, $a_\nu$ vérifie les inégalités

$$(C) \qquad c_\nu \leqq a_\nu \leqq d_\nu,$$

sans que l'on puisse assigner un nombre déterminé $n$ tel que l'on ait pour tout $\nu$ plus grand que $n$, soit $c_\nu = a_\nu$, soit $a_\nu = d_\nu$, les deux cas peuvent se présenter, la suite $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ peut être convergente, elle peut aussi être divergente : on dira, dans ce cas, qu'elle appartient au *domaine-limite* entre convergence et divergence, borné par les deux suites $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$, et $d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots$.

P. du Bois-Reymond et plusieurs autres géomètres ont cru qu'il suffisait de fixer arbitrairement ces deux bornes $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$, et $d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots$, pour pouvoir partager les séries à termes positifs décroissant d'une façon monotone, en trois groupes nettement caractérisés, le premier par les inégalités (A), le second par les inégalités (B), le troisième par les inégalités (C). Ce n'est pas exact. On peut, en effet, démontrer que, quel que soit le choix que l'on ait fait des deux bornes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ et $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$, il existe une infinité de suites monotones

$$a'_0, \quad a'_1, \quad a'_2, \quad \ldots, \quad a'_n, \quad \ldots$$

n'appartenant à aucun de ces trois groupes et pour lesquelles on a, ou bien

$$(A') \qquad a'_\lambda < c_\lambda, \quad c_\lambda < a'_\lambda < d_\lambda,$$

ou bien

$$(B') \qquad a'_\lambda > d_\lambda, \quad c_\mu \leq a'_\mu < d_\mu,$$

ou bien

$$(C') \qquad a'_\lambda < c_\lambda, \quad a'_\mu > d_\mu,$$

pour un nombre indéfini d'indices *distincts* $\lambda$ et $\mu$; dans les cas (A') et (B') les nombres $\lambda$ et $\mu$ épuisent entièrement la suite des nombres entiers plus grands qu'un nombre assignable $n$.

Ainsi à tout choix de deux suites monotones $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ et $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$, correspond une infinité de suites monotones $a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$, n'appartenant pas au domaine-limite entre convergence et divergence borné par les deux suites $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, et $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$, et dont la convergence ou divergence ne peut cependant pas être discernée en comparant les termes $a'_\nu$ avec ceux de même rang $c_\nu$ ou $d_\nu$. On en conclut qu'il ne saurait exister à la fois une borne générale de convergence et une borne générale de divergence. Or, il y a une borne générale de convergence qu'on va apprendre à former; *il n'y a donc pas de borne générale de divergence.*

Dans une seconde partie de son Mémoire, M. Pringsheim étudie de plus près d'abord le cas de la convergence, puis celui de la divergence des séries. Il montre que la condition

$$\lim_{\nu=\infty} (\nu a_\nu) = 0,$$

est *nécessaire* pour que la suite

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

soit convergente, mais qu'il peut se faire que cette suite soit convergente sans que la condition

$$\lim_{\nu=\infty} [\nu m_\nu a_\nu] = 0$$

soit vérifiée *quelque lentement* que l'on suppose que les nombres $m_\nu$ croissent indéfiniment avec l'indice $\nu$.

Chaque suite

$$\varepsilon, \quad \frac{\varepsilon}{1}, \quad \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{\varepsilon}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{\varepsilon}{n}, \quad \ldots,$$

où $\varepsilon$ désigne un nombre positif *fixé* arbitrairement aussi petit que l'on veut, est une *borne générale de convergence,* car si la suite

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

est convergente, il existe nécessairement un entier $n$ tel que, pour tout indice $\nu \geq n$, on ait

$$a_\nu < \frac{\varepsilon}{\nu};$$

mais quelque lente que soit la façon dont on imagine que les termes d'une suite

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n, \quad \ldots$$

tendent vers zéro quand $n$ augmente indéfiniment, il existe une infinité de séries monotones décroissantes

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

qui sont *convergentes* et dont les termes deviennent cependant, à partir d'un terme quelconque $n$, une infinité de fois plus grands et une infinité de fois plus petits que le terme de même rang de la suite

$$\varepsilon_0, \quad \frac{\varepsilon_1}{1}, \quad \frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{\varepsilon_n}{n}, \quad \ldots.$$

Il en résulte que, *quelque rapide que soit la convergence d'une série donnée*

$$\frac{1}{C_0}, \quad \frac{1}{C_1}, \quad \frac{1}{C_2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{C_n}, \quad \ldots,$$

on peut toujours concevoir des séries monotones décroissantes

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

qui soient *divergentes* et dont les termes deviennent cependant une infinité de fois, à partir d'un indice quelconque $n$, plus *petits* que les termes correspondants de la série convergente donnée, en sorte que la *limite inférieure,* au sens de Cauchy, du produit $C_\nu a_\nu$ pour $\nu = \infty$, soit nulle.

On peut d'ailleurs toujours former effectivement de telles séries $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, dès que les coefficients $C_n$ de la série donnée sont connus. Ces résultats s'étendent immédiatement aux intégrales de la forme

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx,$$

où $f(x)$ désigne une fonction monotone décroissante tendant vers zéro quand $x$ augmente indéfiniment. Cette intégrale converge ou diverge, en effet, en même temps que la somme $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} f(\nu)$. Chaque courbe ayant une équation de la forme

$$xy = \varepsilon,$$

où $\varepsilon$ est un nombre positif fixé arbitrairement aussi petit que l'on veut, forme donc une *borne de convergence* pour l'intégrale envisagée, en sorte que toutes les courbes monotones

$$y = f(x),$$

à intégrale convergente sont situées *au-dessous* de cette courbe $xy = \varepsilon$; elles coupent cependant une infinité de fois toute courbe dont l'équation est de la forme

$$xy = \theta(x),$$

où $\theta(x)$ désigne une fonction quelconque de $x$, tendant vers l'infini en même que $x$, aussi *lentement* d'ailleurs que l'on veut.

Il n'existe, au contraire, aucune *borne de divergence* pour l'intégrale envisagée en sorte que cette intégrale peut diverger, même si la courbe monotone ayant pour équation $y = f(x)$ coupe un nombre infini de fois toute courbe

dont l'équation $y = \varphi(x)$ est telle que l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$ converge aussi rapidement que l'on veut.

*Lindemann* (*F.*). — Contribution à l'histoire des origines et des premiers développements de la notion des polyèdres et des symboles numériques. (625-758).

On attribue généralement aux Grecs l'origine des polyèdres réguliers, pour la plupart en pierre ou en bronze, que l'on a trouvés dans diverses fouilles; ce sont, en général, des dodécaèdres. On admet qu'ils datent environ du cinquième siècle avant notre ère. M. Lindemann ne partage pas cette manière de voir. Ayant constaté que l'un au moins de ces dodécaèdres est certainement d'origine plus ancienne et l'ayant comparé à d'autres dodécaèdres moins anciens, découverts soit dans les limites de l'ancienne Gaule, soit dans des régions voisines, il est parvenu à des conclusions bien différentes.

Les habitants du Piémont et de l'île d'Elbe pendant la période préhistorique que nous appelons l'*âge du fer* ont été, d'après M. Lindemann, les premiers hommes qui aient envisagé des dodécaèdres et des icosaèdres réguliers : les cristaux de pyrite de fer trouvés dans ces régions affectent souvent à très peu près la forme d'un icosaèdre régulier ou d'un dodécaèdre à faces pentagonales presque régulières; pour ces habitants le fer était certainement un métal ayant une grande valeur; il est donc assez naturel qu'ils aient été frappés par la forme presque régulière affectée par ces cristaux et qu'ils lui aient attribué un sens symbolique conforme à leurs idées religieuses. Les mêmes idées semblent s'être répandues plus tard chez les Étrusques et les Gaulois où elles persistaient encore du temps des empereurs romains. Ce sont les Gaulois, ou, peut-être, les Étrusques, qui ont appris à Pythagore l'existence d'icosaèdres et de dodécaèdres. (Il en est sans doute de même du pentagone étoilé que l'on connaissait avant Pythagore.)

M. Lindemann remarque, d'autre part, que les signes que portent sur leurs faces les dodécaèdres d'origine antique, et sans doute celtique, qu'il a pu comparer entre eux, sont des *signes de nombres* dont l'origine égyptienne ou babylonienne n'est pas douteuse. En Égypte, les symboles représentant les premiers nombres ont été formés au moyen des éléments les plus simples tels que les signes ., |, —, /, ou \, peut-être, en partie, en utilisant des modèles babyloniens; les symboles représentant les nombres plus grands comme 60, 80, 90, 100, 1000 et peut-être 10 et 40, sont directement empruntés au système babylonien. Ces symboles ont été sans doute répandus en Italie par l'intermédiaire des Phéniciens pendant la période qui comprend les dix premiers siècles avant notre ère; il est toutefois fort possible que les Étrusques en aient eu connaissance avant l'an — 1000, lors d'expéditions lointaines entreprises par eux et les ayant mis en contact avec les Égyptiens. L'origine étrusque des chiffres romains s'expliquant de la façon la plus naturelle, on voit comment les différents signes dont nous venons de parler, employés par les anciens pour représenter les nombres, peuvent être rattachés les uns aux autres et comment l'on est amené à leur donner une origine babylonienne commune.

Il est probable que, dans ses calculs, Pythagore s'est servi de chiffres égyptiens. Un grand nombre d'autres façons de se représenter les nombres, les unes ayant une origine préhistorique, les autres une origine historique très ancienne,

mais ayant les unes et les autres un caractère symbolique, se rencontrent sur tout le littoral de la Méditerranée; on en a fait usage pendant toute la durée du moyen âge et même parfois pendant les temps modernes.

M. Lindemann conclut aussi, des nombreuses recherches auxquelles il s'est livré au sujet des signes tracés sur les polyèdres d'origine antique dont il vient d'être question, que la philosophie pythagoricienne est en relation intime avec les doctrines qu'enseignaient les prêtres étrusques et gaulois. Il rapporte en particulier à ces doctrines le goût prononcé des pythagoriciens pour les relations ayant un caractère arithmétique.

## Tome XXVII.

Communications faites à l'Académie, en 1897.

### *Föppl* (*A.*). — Sur une extension possible de la loi de Newton. (93-99).

Supposons que les points de l'espace soient affectés de coefficients, les uns *positifs*, d'autres *négatifs*, d'autres encore *nuls*, auxquels nous donnerons, par une extension assez naturelle du langage, le nom de *masse* de ces points. Supposons aussi que l'action de la gravitation ne soit pas instantanée, mais se propage par l'intermédiaire de l'éther, que les masses des divers points soient les *sources* de flux de forces allant des masses positives, par exemple, aux masses négatives, que la somme des sources positives soit égale à la somme des sources négatives et que l'énergie du champ de gravitation distribuée sur un élément de volume $dv$ soit donnée par une expression analogue à celle qui donne, d'après Maxwell, l'énergie du champ électrique distribuée sur un élément $dv$; il suffit, pour l'obtenir, de changer le signe de l'expression $\frac{1}{2} cV^2 dv$, donnée par Maxwell et d'ajouter une constante $e_0$; la fonction vectorielle V, sans tourbillon, qui y figure et détermine l'état actuel du champ de gravitation, est supposée ne dépendre que du rayon vecteur aboutissant à un point de l'élément envisagé $dv$; les *sources* de cette fonction vectorielle enfin sont supposées coïncider avec les masses positives ou négatives de l'espace. Quant aux deux constantes $c$ et $e_0$, elles dépendent du milieu par lequel on suppose que la gravitation se propage dans l'espace; la seconde $e_0$ est l'énergie contenue dans l'unité de volume de l'espace quand la fonction vectorielle y est nulle.

M. Föppl démontre que, sous ces hypothèses, deux masses quelconques de *même signe s'attirent suivant la loi de Newton*, tandis que deux masses quelconques de *signes contraires se repoussent suivant la loi de Newton*. L'univers entier serait donc comparable à un ensemble de masses électriques les unes positives, les autres négatives; seulement là où il y aurait attraction avec ces masses électriques il y a répulsion, et inversement.

On sait que l'on a observé dans plusieurs systèmes d'étoiles doubles que le mouvement relatif du compagnon autour de l'étoile principale a lieu conformément à la loi de Newton. D'après le théorème démontré par M. Föppl, ce fait peut tout aussi bien concorder avec l'hypothèse d'après laquelle l'étoile principale et son compagnon auraient des masses négatives toutes deux, qu'avec

celle d'après laquelle leurs masses seraient positives toutes deux, si l'on admet que la distribution de l'énergie dans le champ de la gravitation a lieu suivant la loi analogue à celle de Maxwell, indiquée plus haut. On n'est pas en droit d'en conclure que le champ de la gravitation s'étend nécessairement à l'infini; il peut fort bien être limité; il l'est sous les hypothèses faites plus haut, hypothèses que M. Föppl estime avoir quelque caractère de vraisemblance; mais comme, malgré tout, ces hypothèses ne sont que des hypothèses, rien ne nous prouve cependant qu'il le soit. Une seule chose est certaine, c'est que dans notre système solaire les masses sont toutes de même signe, même celles des comètes qui y pénètrent sans en faire partie.

## *Pringsheim* (*A.*). — Sur les principes fondamentaux de la théorie des séries à double entrée. (101-152).

Il s'agit d'établir ces principes par des considérations directes et ayant un caractère élémentaire. M. Pringsheim commence par exposer en détail comment on obtient les relations, en partie bien connues, sous lesquelles les limites

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} [a_\mu^{(\nu)}], \qquad \lim_{\mu=\infty}\left[\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right], \qquad \lim_{\nu=\infty}\left[\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right],$$

ou, plus généralement, les limites supérieures d'indétermination

$$\limsup_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} [a_\mu^{(\nu)}], \qquad \limsup_{\mu=\infty}\left[\limsup_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right], \qquad \limsup_{\nu=\infty}\left[\limsup_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right],$$

ou enfin les limites inférieures d'indétermination

$$\liminf_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} [a_\mu^{(\nu)}], \qquad \liminf_{\mu=\infty}\left[\liminf_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right], \qquad \liminf_{\nu=\infty}\left[\liminf_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right],$$

sont égales.

Les différentes éventualités qui peuvent se présenter dans l'étude de la convergence ou de la divergence d'une série à double entrée sont ensuite mises en pleine lumière, et l'on perçoit nettement la différence qu'il y a entre une série à double entrée et la série à simple entrée dont les éléments sont les sommes des séries formées par les colonnes (ou les lignes) de cette série à double entrée. A chaque cas sont joints un ou plusieurs exemples.

M. Pringsheim s'attache aussi à caractériser la différence qu'il y a entre une série convergente à double entrée

$$u_\mu^{(\nu)} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

et la série à simple entrée dont les éléments

$$w_\nu = u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + u_2^{(\nu-2)} + \ldots + u_{\nu-1}^{(1)} + u_\nu^{(0)}$$

sont les sommes des diagonales du Tableau formé par les éléments $u_\mu^{(\nu)}$ de la série à double entrée. Il démontre que si S est la somme

$$S = \sum u_\mu^{(\nu)} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

des éléments d'une série convergente à double entrée

$$u_{\mu}^{(\nu)} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

et si chaque colonne et chaque ligne du Tableau formé par les éléments $u_{\mu}^{(\nu)}$ de cette série à double entrée, converge, ou encore *oscille entre des limites finies*, la série

$$w_0, \quad w_1, \quad w_2, \quad \ldots, \quad w_n, \quad \ldots$$

ne peut aussi que converger ou osciller entre des limites finies, tandis qu'elle ne peut jamais *diverger* dans le sens propre du mot. Dans le cas où chaque ligne et chaque colonne du Tableau envisagé *converge*, on a d'ailleurs nécessairement

$$S = \sum_{n=0}^{n=\infty} w_n.$$

Parmi les séries convergentes à double entrée

$$u_{\mu}^{(\nu)} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

celles pour lesquelles la série à double entrée

$$|u_{\mu}^{(\nu)}| \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

est convergente jouent un rôle particulier; on dit qu'elles sont absolument convergentes. On sait que, dans toute série à double entrée qui est absolument convergente, on peut intervertir à volonté l'ordre des termes, ou grouper à volonté ces termes, sans changer la valeur de sa somme. Inversement, *lorsque, dans une série à double entrée convergente, on peut intervertir à volonté l'ordre des termes, ou grouper à volonté ces termes, sans changer la valeur de sa somme, cette série à double entrée est nécessairement absolument convergente.*

Un dernier paragraphe est consacré à l'exposé de diverses méthodes propres à fournir des critériums de convergence et de divergence pour les séries à double entrée.

## *Lindemann* (*F.*). — Lettre de M. Hermite. (153).

M. Lindemann donne lecture à l'Académie d'une lettre de M. Hermite dans laquelle l'illustre géomètre remercie l'Académie de l'envoi qu'elle a bien voulu lui faire des Œuvres complètes de Hesse et rend hommage aux services rendus à la science par ce mathématicien bavarois.

## *von Orff* (*K.*). — Remarques sur l'utilité que peuvent avoir pour le développement de la Géologie les mesures de la pesanteur effectuées en diverses régions. Rapport sur les mesures effectuées en Bavière au moyen du pendule. (155-179).

On ne saurait déduire directement des mesures de la pesanteur effectuées en diverses régions aucune conséquence concernant la constitution interne du

globe terrestre; mais si quelque hypothèse concernant la position occupée par des masses perturbatrices situées à l'intérieur du globe terrestre, ou encore la forme, les dimensions et la densité de ces masses, semble vraisemblable aux géologues, les mesures de la pesanteur permettent de contrôler l'hypothèse ou au moins de décider s'il y a lieu de la rejeter purement et simplement ou de l'envisager comme ayant quelque caractère de probabilité. M. von Orff en donne un exemple.

## *Korn* (*A.*). — Sur les fonctions moléculaires. (181-196).

A la formule exacte

$$\varepsilon = \frac{dm}{dv} = \lim_{\Delta v = 0} \frac{\Delta m}{\Delta v},$$

qui fournit en mécanique rationnelle l'expression de la masse spécifique $\varepsilon$ d'un continuum mathématique quelconque, en un point enveloppé par l'élément d'étendue $\Delta v$ de ce continuum, élément dans lequel on suppose distribuée la masse $\Delta m$, on substitue en Physique expérimentale la formule approchée

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta m}{\Delta v},$$

qui fournit l'expression de la masse spécifique $\varepsilon_0$ d'une *petite* partie de l'étendue que l'on envisage. Ces deux masses spécifiques $\varepsilon$ et $\varepsilon_0$ sont manifestement liées par la relation

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\Delta v} \int \varepsilon \, dv,$$

où l'intégrale est étendue à tous les éléments de la petite étendue envisagée $\Delta v$, en sorte que $\varepsilon_0$ est une *valeur moyenne* de $\varepsilon$ dans le volume de $\Delta v$. On supposera qu'en chaque point situé à l'intérieur de l'étendue envisagée, l'expression $\varepsilon_0$ ne diffère de la valeur d'une fonction continue déterminée de $x$, $y$, $z$ que de quantités qui, par rapport à l'unité de densité, sont petites, de l'ordre du rapport des dimensions de $\Delta v$ à l'unité de longueur.

Sous cette hypothèse, M. Korn se propose d'évaluer l'erreur que l'on commet en remplaçant $\varepsilon$ par $\varepsilon_0$ dans la formule de d'Alembert convenant au cas où il n'y a pas de forces données et mise sous la forme

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \varepsilon \left[ \frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right] dv = 0,$$

où l'intégrale intérieure est étendue à tous les éléments $dv$ de l'étendue que l'on envisage. Il est ainsi amené à introduire des quantités auxquelles il donne le nom de *fonctions moléculaires du premier ordre, du second ordre,* etc. Il étudie, en particulier, l'influence des fonctions moléculaires du premier ordre sur la forme que prennent, dans le cas envisagé, les équations de l'Hydrodymamique.

## *Korn* (*A.*). — Modèle se rapportant à la théorie hydrodynamique de la gravitation. (197-201).

Imaginons un fluide impondérable incompressible, ou d'une compressibilité

très faible, remplissant tout l'espace. Supposons que notre système solaire soit formé par des éléments E beaucoup plus compressibles baignés dans le fluide impondérable et que la partie de ce fluide impondérable dans laquelle se trouve notre système solaire soit soumise à une pression périodique. On peut démontrer que les éléments E se mettront alors tous à se dilater et à se comprimer alternativement de telle façon que les périodes et les phases des oscillations représentant ces *pulsations* des éléments E soient identiques. Dès lors il résulte des recherches de M. Bjerkness (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1879-81; *Journal de Physique*, 1880) que *les éléments* E *du système solaire se mouvront comme s'ils s'attiraient suivant la loi de Newton.*

Un appareil construit par M. Korn a pour objet de permettre de contrôler les calculs en faisant une série d'expériences déterminées.

## *Voss* (*A.*). — Contribution à la théorie des déformations infiniment petites des surfaces flexibles. (229-301).

Dans sa *Théorie générale des surfaces* (t. IV, p. 42 et suivantes), M. Darboux a donné des formules qui fournissent les expressions des trois coordonnées des points d'une surface sous une forme que l'on peut envisager comme résultant d'une transformation en coordonnées curvilignes quelconques des formules de Lelieuvre (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1888, p. 126). Les formules de M. Darboux présentent un intérêt particulier; elles permettent, par exemple, de mettre les équations aux dérivées partielles d'une surface courbe quelconque sous une forme tout autre que celle de Gauss et bien plus avantageuse à certains égards.

Le Mémoire de M. Voss a pour objet de montrer que cette forme des équations aux dérivées partielles d'une surface courbe quelconque facilite singulièrement l'étude générale des déformations infiniment petites des surfaces flexibles. Dans l'exposé d'ensemble qu'il fait de la question, M. Voss retrouve naturellement plusieurs des résultats connus dus à MM. Darboux, Bianchi ou Cosserat, mais il parvient aussi à quelques propositions nouvelles qui pourront elles-mêmes servir de point de départ à de nouvelles recherches.

## *Pringsheim* (*A.*). — Sur la notion de limite de convergence de Paul du Bois-Reymond et sur une forme particulière donnée par cet auteur à la condition sous laquelle une série est convergente. (303-334, 356-358).

Paul du Bois-Reymond a cherché (*Mathematische Annalen*, t. XXI, p. 158 et suivantes) à légitimer l'introduction, dans la théorie générale des fonctions, d'une certaine fonction $\tau(x)$ (qu'il démontre d'ailleurs ne pouvoir être aucune des fonctions connues) marquant la limite entre la convergence et la divergence des intégrales de la forme

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} f(x)\,dx,$$

en ce sens que pour toutes les fonctions $f(x) < \tau(x)$ dans l'intervalle envisagé, l'intégrale serait convergente tandis qu'elle serait divergente pour toutes les fonctions $f(x) > \tau(x)$ dans l'intervalle envisagé.

M. Pringsheim examine de près les arguments de P. du Bois-Reymond et montre qu'ils sont loin d'être probants. L'étude de la façon dont P. du Bois-Reymond a présenté la condition nécessaire et suffisante de la convergence d'une série donnée par Cauchy dans le Tome II de ses *Exercices de Mathématiques* (p. 221), amène ensuite M. Pringsheim à critiquer plusieurs des idées fondamentales émises par P. du Bois-Reymond sur les principes de la théorie des fonctions.

*Dyck* (*W.*). — Sur les machines à calculer en général, et sur un nouveau type de machine à calculer construit par MM. O. Steijer et E. Egli, à Zurich. (335).

*Pringsheim* (*A.*). — Sur deux théorèmes d'Abel concernant la continuité des fonctions représentées par des sommes de séries convergentes. (343-356).

Il s'agit de deux théorèmes démontrés par Abel (*Œuvres*, t. I, p. 223-224) et dont le premier concerne la continuité de la fonction de $x$ définie par la somme $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$ d'une série entière où les coefficients $a_\nu$ sont des constantes par rapport à $x$, tandis que le second concerne la continuité de la fonction de $y$ définie par la somme d'une série convergente de la forme $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} f_\nu(y) x^\nu$, dans laquelle $x$ est envisagée comme une constante par rapport à $y$.

La Communication de M. Pringsheim comprend des considérations historiques à propos du premier de ces deux théorèmes, suivies d'une extension de ce premier théorème aux fonctions d'une variable complexe; on peut, en effet, démontrer que si la série

$$a_0, \quad a_1 x, \quad a_2 x^2, \quad \ldots, \quad a_\nu x^\nu, \quad \ldots,$$

converge en un point X de la circonférence de son cercle de convergence, elle converge *uniformément* dans toute aire limitée par un quelconque des triangles $x_0 X x_1$ déterminés par ce point X et deux points quelconques $x_0$, $x_1$ intérieurs au cercle de convergence (les points situés sur les côtés de ce triangle étant supposés faire partie de l'aire du triangle).

M. Pringsheim examine, d'autre part, les critiques formulées contre le mode de démonstration employé par Abel pour établir son second théorème. Il est ainsi amené à se demander si ce second théorème d'Abel est toujours exact. Il ne l'est pas toujours, et pour le mettre en évidence M. Pringsheim construit une fonction pour laquelle il est en défaut.

*Bauer* (*G.*). — Sur deux tétraèdres qui sont à la fois inscrits et circonscrits l'un à l'autre. (359-366).

Recherches plus complètes et plus générales mais rentrant dans le même ordre que certaines recherches de Mœbius (*Œuvres*, t. I, p. 439).

*Kantor* (*S.*). — Théorie de l'équivalence de faisceaux linéaires $\infty^{\lambda}$ de formes bilinéaires. (367-381).

Recherches rentrant, quant au fond, dans l'ordre des recherches de M. Gordan sur la théorie des *Combinantes* ou dans celui de la théorie plus générale de la transformation des formes de plusieurs systèmes de variables par des substitutions linéaires indépendantes. (*Voir* aussi FROBENIUS, *Journal für Mathematik*, t. 86).

Le point de vue auquel se place M. Kantor est toutefois entièrement différent. A ce point de vue la théorie des diviseurs élémentaires de Weierstrass apparaît sous un jour tout nouveau. En résumé, l'auteur est amené à une généralisation de la théorie de l'équivalence.

*von Voit.* — Notice biographique sur Carl-Theodor-Wilhelm Weierstrass. (402-409).

*von Voit.* — Notice biographique sur Hugo-Johann-August Gylden. (409-413).

*von Orff* (*K.*). — Rapport sur les mesures de la pesanteur exécutées dans le courant de l'année par la section bavaroise de l'Association géodésique internationale, en vue de contribuer à la détermination de la forme et des dimensions de la Terre. (475).

*Lindemann* (*F.*). — Sur l'étude des dodécaèdres et des monnaies d'origine ancienne ainsi que sur celle des symboles ayant autrefois servi à représenter les nombres. Résultat de recherches entreprises pendant un voyage fait en Italie sous les auspices de l'Académie de Munich. (475).

Cette Communication fera l'objet d'un Mémoire qui sera inséré ultérieurement.

## Tome XXVIII.

Communications faites à l'Académie en 1898.

*Franke* (*J.-H.*). — Transformations de coordonnées dans un réseau de triangles. (19-36).

*Lindemann* (*F.*). — Sur certains problèmes d'inversion que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques. (37-54).

Les équations du mouvement d'un point matériel P de masse 1 attiré par deux

centres fixes de masses $m$ et $m'$ suivant la loi de Newton, déduites du théorème fondamental d'Hamilton-Jacobi, se réduisent, quand on y fait $m' = 0$, à deux équations de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^p \frac{du}{\sqrt{R(u)}} + \int_0^q \frac{du}{\sqrt{R(u)}} = w, \\ \displaystyle\int_0^p \frac{u^2\,du}{\sqrt{R(u)}} + \int_0^q \frac{u^2\,du}{\sqrt{R(u)}} = w', \end{cases}$$

où $R(u)$ désigne un polynome du quatrième degré à racines inégales, et où les limites supérieures d'intégration $p$ et $q$ sont liées très simplement aux coordonnées elliptiques planes du point P, pour une ellipse de référence convenablement choisie.

D'autre part, le mouvement envisagé se réduit, pour $m' = 0$, au mouvement elliptique (non troublé) d'une planète autour du Soleil, pourvu que la vitesse initiale du point matériel P ne dépasse pas une limite déterminée, et l'on sait que l'étude de la loi du mouvement et, par conséquent, celle de l'expression des coordonnées du point P en fonction du temps $t$, se ramène à la résolution de l'équation de Képler.

Il faut donc que l'inversion des équations (1) se ramène à la résolution d'une équation transcendante identique à celle de Képler.

M. Lindemann commence par établir cette équation transcendante; puis il montre comment on peut, par des transformations convenables, la réduire effectivement à l'équation de Képler. Il examine enfin quelques conséquences géométriques bien intéressantes que l'on peut tirer des transformations effectuées.

## *Pringsheim* (*A.*). — Contribution à la théorie des intégrales doubles. (59-74).

Lorsqu'on suppose connus les résultats obtenus dans la théorie des ensembles de Cantor, on n'éprouve aucune difficulté à étendre aux intégrales définies doubles les définitions et les démonstrations concernant l'existence des intégrales définies simples. Il en est tout autrement lorsqu'on se propose de démontrer que le calcul d'une intégrale définie double peut, sous certaines restrictions, se ramener au calcul successif de deux intégrales définies simples. Cela provient de ce que l'existence d'une intégrale définie double

$$\int f(x, y)\, d\sigma,$$

étendue à une aire déterminée, n'entraîne pas nécessairement celle des intégrales simples correspondantes $\int f(x, y)\, dx$ ou $\int f(x, y)\, dy$, dans lesquelles $y$ ou $x$ est envisagé comme constant.

M. C. Jordan a, le premier, élucidé la question en faisant usage des notions d'intégrale par excès et par défaut, dues, comme on sait, à M. Darboux. M. Pringsheim reprend la question en se plaçant à un point de vue moins abstrait que ne l'a fait M. Jordan. Il parvient ainsi à compléter et à rendre rigoureuses deux démonstrations dont le principe est dû à Paul du Bois-Reymond et à Harnack.

Se bornant ensuite à envisager le cas où l'aire plane donnée est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes coordonnés, M. Pringsheim montre sous quelles conditions on a, en désignant par $d\sigma$ l'aire élémentaire $dx\,dy$ du rectangle,

$$\iint\limits_{(x_0, y_0)}^{X\ Y} f(x, y)\, d\sigma \begin{cases} = \displaystyle\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy, \\ = \displaystyle\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx. \end{cases}$$

Un artifice dont on fait parfois usage dans la théorie de l'attraction des corps et dans d'autres branches de l'Analyse, mais que l'on n'avait pas encore songé à appliquer à l'objet actuel, lui permet enfin d'étendre les résultats obtenus au cas où le contour de l'aire plane donnée est un contour curviligne de forme quelconque constitué par une ou plusieurs courbes continues formées d'un nombre fini de parties monotones par rapport à chacun des deux axes coordonnés.

*Glan* (*P.*). — Recherches théoriques sur les corps élastiques et sur l'électricité. (117-125).

*Korn* (*A.*). — Sur les causes du magnétisme terrestre quand on adopte la théorie hydrodynamique de la gravitation. (129-134).

La théorie hydrodynamique de la gravitation permet de se rendre compte des raisons pour lesquelles l'axe magnétique de la Terre est voisin de l'axe de rotation de la Terre. En supposant que les oscillations des *pulsations* de la Terre (*voir* l'analyse de la Communication précédente de M. Korn à l'Académie, t. XXVII des *Sitzungsberichte*) aient même période et même phase que les oscillations magnétiques, M. Korn démontre, en effet, que l'axe magnétique de la Terre coïncide *nécessairement* avec son axe de rotation. Le manque de coïncidence absolue, en fait, peut provenir de ce que les corps conducteurs ne sont pas distribués d'une façon uniforme à l'intérieur de la Terre, et les variations diurnes et séculaires du magnétisme terrestre peuvent avoir pour cause l'action exercée par les autres corps célestes sur la distribution des corps conducteurs et sur la direction des courants électriques dans l'intérieur de la Terre.

M. Korn indique, en terminant, comment on pourrait étendre au magnétisme permanent, en général, le point de vue hydrodynamique auquel il se place dans ses recherches.

*Korn* (*A.*). — Sur la conservation de l'état diélectrique d'un fluide incompressible. (135-146).

*Lindemann* (*F.*). — Sur le mouvement d'un solide rigide autour de son centre de gravité. (181-202).

L'intégration des équations différentielles du mouvement d'un solide rigide pesant autour de son centre de gravité se ramène, comme on sait à l'intégration successive de deux systèmes de trois équations différentielles simultanées

du premier ordre. L'intégration du premier de ces deux systèmes n'offre aucune espèce de difficulté; il n'en est pas de même de l'intégration du second, malgré les grandes simplifications que les recherches d'Hermite ont permis d'apporter à la solution de ce problème.

M. Lindemann cherche à simplifier la question en envisageant, au lieu du mouvement du corps solide rigide dans l'espace, le mouvement de l'espace par rapport au solide rigide. Le problème se ramène alors à la solution d'un problème d'Hydrodynamique étudié par M. Voigt; M. Venske a d'ailleurs ramené la solution de ce problème à des quadratures.

M. Lindemann a effectué tous les calculs en ne perdant pas un seul instant de vue la symétrie et l'élégance des formules, et a choisi ses notations de façon que les résultats se présentent sous la forme même sous laquelle ils ont été donnés par M. Hermite.

Dans un dernier paragraphe, il montre que des considérations analogues, ayant pour point de départ l'analogie qu'offre le mouvement d'un solide rigide dans un fluide incompressible et le mouvement d'un solide rigide dans le vide lorsque l'un des points du solide est fixe, permettent de ramener de même la solution de certains problèmes de rotation d'un solide rigide autour de son centre de gravité, dans le cas où d'autres forces que la pesanteur sont distribuées sur ce solide, à la solution de problèmes d'Hydrodynamique déjà étudiés par Clebsch, M. H. Weber et M. Kötter.

Supposons, pour en donner un exemple, qu'une masse $m_1$ soit distribuée d'une façon uniforme sur un cercle fixe de rayon $r_0$, ayant son centre au point fixe du solide rigide envisagé. Si cette masse attire le solide rigide suivant la loi de Newton, le premier système de trois équations différentielles simultanées du premier ordre qu'il s'agit d'intégrer est le suivant

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = \frac{3}{2} f \frac{m_1}{r_0^3} (B - C)\gamma_2\gamma_3,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = \frac{3}{2} f \frac{m_1}{r_0^3} (C - A)\gamma_3\gamma_1,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = \frac{3}{2} f \frac{m_1}{r_0^3} (A - B)\gamma_1\gamma_2;$$

dans ces équations A, B, C désignent les trois moments d'inertie principaux du solide par rapport au point fixe O; $p$, $q$, $r$ désignent les composantes, suivant les trois axes principaux d'inertie en O, de la vitesse angulaire de rotation actuelle du solide autour de O; $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ désignent les cosinus directeurs, par rapport à ces trois axes principaux d'inertie en O, de la normale menée par O au plan du cercle fixe dans l'espace; enfin f désigne la constante numérique mesurant l'attraction exercée par deux masses-unité placées à l'unité de distance. Le second système d'équations différentielles qu'il faut ensuite intégrer, après y avoir remplacé $p$, $q$, $r$ par les intégrales fournies par le premier système d'équations différentielles que l'on vient d'écrire, est d'ailleurs manifestement

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p.$$

Ces équations différentielles rentrent comme cas particulier dans le type plus général auquel Clebsh (*Mathematische Annalen*, t. III) a ramené l'étude

du mouvement d'un solide rigide dans un fluide, quand ce solide rigide admet, relativement à sa forme et à la distribution de sa masse, trois plans de symétrie rectangulaire. M. H. Weber a étudié (*Mathematische Annalen*, t. XIV) un cas particulier du problème de Clebsch dans lequel les équations différentielles du mouvement s'intègrent au moyen de fonctions thêta de deux variables; les équations différentielles de ce cas particulier peuvent être identifiées avec les six équations différentielles du problème de M. Lindemann, à condition toutefois de prendre $(-f)$ égal au carré d'une constante qui, dans le problème de M. Weber, dépend de l'état initial des vitesses; il en résulte que les arguments des fonctions thêta de deux variables qui fournissent la solution du problème de M. Lindemann sont purement imaginaires.

M. H. Weber n'avait poussé jusqu'au bout la solution de son problème d'Hydrodynamique qu'en faisant certaines restrictions concernant les conditions initiales; mais M. Kötter (*Sitzungsberichte* de Berlin, 1891) s'est affranchi de ces restrictions et a montré que, quelles que soient les conditions initiales, la solution du problème peut être donnée d'une façon complète. Il en résulte que, dans tous les cas, le problème du mouvement de rotation d'un solide rigide fixé par un de ses points et attiré par la masse envisagée $m_1$ suivant la loi de Newton, peut être envisagé comme entièrement résolu. Si le solide rigide est pesant, le point fixe doit être supposé en son centre de gravité.

## *Dyck* (*W.*). — Contribution à la théorie du potentiel. Troisième article. (203-224).

Envisageons dans un espace à $n$ dimensions une région $(R)_k$ de dimension $(n-k)$, ayant pour enceinte une variété d'ordre $(n-k-1)$; désignons par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les coordonnées d'un point quelconque de l'espace à $n$ dimensions; les coordonnées des points de la région $(R)_k$ vérifient l'inégalité

$$F_0(z_1, z_2, \ldots, z_n) > 0$$

et les $k$ égalités

$$F_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0, \quad F_2(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0, \quad \ldots, \quad F_k(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0,$$

tandis que ceux de l'enceinte de $(R)_k$ vérifient les $(k+1)$ égalités

$$F_0(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0, \quad \ldots, \quad F_k(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0.$$

Désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_p$ les points de la région $(R)_k$ dont les coordonnées $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ annulent $(n-k)$ fonctions univoques

$$F_{k+1}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0, \quad F_{k+2}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0, \quad \ldots, \quad F_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$

des $n$ variables réelles $z_1, z_2, \ldots, z_n$, en sorte que, si $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}$ sont les coordonnées du point $A_i$, on a

$$F_0(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}) > 0$$

et

$$F_p(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}) = 0$$

pour

$$p = 1, 2, \ldots, n.$$

M. Dyck démontre que l'on peut obtenir, au moyen de deux intégrales multiples, l'une d'ordre $(n-k)$ étendue à toute la région $(R)_k$, l'autre d'ordre $(n-k-1)$ étendue à l'enceinte de cette région, *la somme*

$$S = \sum_{i=1}^{i=p} F(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)})$$

*des valeurs que prend une fonction univoque quelconque donnée*

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

*des n variables réelles* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *aux points envisagés* $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

C'est la généralisation COMPLÈTE d'un problème bien connu résolu par Cauchy.

L'indice $k$ peut, pour chaque valeur donnée de $n$, prendre une quelconque des valeurs $0, 1, 2, \ldots (n-1)$. Dans le cas où $k = n-1$, la détermination de la somme S se ramène à celle d'une intégrale simple et à celle d'une somme algébrique. Dans le cas où $k = 0$, la région $(R)_0$ est de même dimension $n$ que l'espace dans lequel elle est située et l'enceinte de cette région a pour équation

$$F_0(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0;$$

les deux intégrales qui fournissent la somme S sont alors l'une d'ordre $n$, l'autre d'ordre $(n-1)$, et l'on retombe sur un théorème démontré par Kronecker en 1869 dans les *Monasteberichte* de Berlin.

Toutefois, quand on applique le théorème de Kronecker à une fonction univoque donnée

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

ce n'est pas la somme

$$\sum_{i=1}^{i=p} f(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)})$$

des valeurs que prend cette fonction aux points $A_1, A_2 \ldots, A_p$ que l'on obtient, mais la somme pour $i = 1, 2, \ldots, p$ des valeurs que prend cette fonction en $A_i$, multipliée chacune par $+1$ ou par $-1$ suivant que la valeur

$$\Delta_0(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)})$$

que prend au point $A_i$ le déterminant fonctionnel $\Delta_0(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ des $n$ fonctions $F_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $F_2(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, ..., $F_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est positif ou négatif. M. W. Dyck a fait observer dès 1894 et 1895, dans deux Communications faites à l'Académie des Sciences de Paris (*Comptes rendus*, t. CXIX, p. 1254, et t. CXX, p. 34) et intitulées *Sur la détermination des nombres des racines communes à un système d'équations simultanées* et *Sur le calcul de la somme des valeurs d'une fonction en ces points*, qu'il suffit de prendre pour la fonction $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ le produit de la fonction $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ par une fonction $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ qu'il apprend à former et qui se réduit à $+1$ en ceux des points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ où $\Delta_0(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)})$ est positif et à $-1$ en ceux de ces points où $\Delta_0(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)})$ est négatif, pour déduire

de l'expression trouvée par Kronecker celle de la somme cherchée

$$S = \sum_{i=1}^{i=p} F(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}).$$

M. Dyck montre, en outre, que si l'on remplace $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ par le produit de $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ par une autre fonction convenablement choisie et tout aussi aisée à former que la fonction $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, la formule de Kronecker fournit l'expression de la somme

$$\sum_{i=1}^{i=p} |F(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)})|$$

des valeurs absolues de la fonction $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ aux points $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

Ce qui, dans le Mémoire actuel, se rapporte au cas où $k = 0$ peut être considéré comme le développement des Communications à l'Académie des Sciences de Paris que l'on vient de rappeler. Si l'on remplace $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, qui est à notre disposition, par l'*unité*, l'expression de S fournit, *en particulier*, le nombre $p$ de points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ situés dans la région $(R)_0$, et la formule que l'on obtient coïncide avec celle due à M. Picard (*Comptes rendus*, 7 et 12 novembre 1891), qui l'a d'ailleurs obtenue par une autre voie.

La forme des fonctions données peut ne pas être avantageuse pour effectuer les intégrales multiples à la détermination desquelles se ramène, dans tous les cas, la somme S. Dans cet ordre d'idées, on peut observer tout d'abord que l'*Analysis situs* fournit parfois un moyen de modifier avantageusement les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$ en les remplaçant par d'autres fonctions se prêtant mieux au calcul; les *zéros* de ces fonctions importent seuls en effet; il suffit donc de faire ce changement de façon que les points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ ne changent pas. On peut de même modifier parfois avantageusement la fonction F en la faisant varier d'une façon continue sans que les valeurs $F(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)})$ qu'elle prend aux points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ ne changent. On peut aussi, et cette remarque est loin d'être aussi évidente, remplacer la fonction donnée $F_0(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dont dépendent les limites d'intégration, par d'autres fonctions se prêtant mieux au calcul. M. Dyck montre, en effet, que l'on peut, dans tous les cas, remplacer les intégrales à effectuer, par ces intégrales prises dans des régions (T) *arbitrairement fixées* parmi celles qui comprennent le champ d'intégration, et par d'autres intégrales déterminées étendues aux mêmes nouvelles régions, intégrales dans l'élément différentiel desquelles figure la fonction $F_0$ que l'on a éliminée des limites des champs d'intégration.

Dans le cas où $k = 0$, la détermination de la somme S peut ainsi toujours se ramener à celle de deux intégrales multiples effectuées dans l'espace à $n$ dimensions, l'une d'ordre $n$, l'autre d'ordre $(n-1)$, étendues à des variétés *planes* caractérisées chacune par le fait que l'une des variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ y a une valeur constante, en sorte qu'elles forment dans l'espace à $n$ dimensions une figure *scalaire* analogue à un polyèdre dont les faces seraient toutes parallèles à l'un ou à l'autre des trois plans de coordonnées rectangulaires.

Kronecker avait démontré son théorème fondamental concernant la détermination de S dans le cas où $k = 0$, au moyen de formules empruntées à la théorie du potentiel d'une masse distribuée dans une région déterminée à $n$ di-

mensions située dans un espace à $n$ dimensions. M. Dyck établit les propositions les plus générales que nous venons de citer au moyen de formules concernant le potentiel d'une masse distribuée dans une variété à $(n-k)$ dimensions, section plane de la masse à $n$ dimensions envisagée par Kronecker. Dans le cas où $k = n - 1$ le potentiel logarithmique remplace le potentiel.

## *Seeliger* (*H.*). — Considérations générales sur la distribution des étoiles dans l'espace. (226 et 363).

Cette Communication est publiée dans les *Mémoires de l'Académie.*

## *Pringsheim* (*A.*). — Sur la convergence des fractions continues illimitées. (295-324).

Ce Mémoire est consacré à l'établissement de conditions *suffisantes* pour la convergence de fractions continues illimitées dont les termes sont des quantités quelconques, réelles ou complexes. Ces conditions sont très simples et assez générales pour permettre dans un nombre de cas relativement considérable de reconnaître immédiatement la convergence des fractions continues que l'on envisage.

Envisageons une fraction continue illimitée

$$(1) \qquad b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_\nu}{b_\nu + \ddots}}}$$

dont les termes $b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_\nu, b_\nu, \ldots$ soient des quantités réelles ou imaginaires; désignons par $A_0, B_0, A_1, B_1, \ldots, A_\nu, B_\nu, \ldots$ les expressions

$$\begin{array}{ll}
A_0 = b_0, & B_0 = 1, \\
A_1 = b_1 b_0 + a_1, & B_1 = b_1, \\
A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0, & B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}, & B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{array}$$

$\frac{A_\nu}{B_\nu}$ est la *réduite* d'ordre $\nu$ de la fraction continue illimitée; il convient d'étudier de près le cas où le dénominateur $B_\nu$ de l'une des réduites s'annule.

Une fraction continue illimitée (1) est convergente lorsque $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ tend vers une limite déterminée (qui peut être nulle) quand $\nu$ augmente indéfiniment. Elle est divergente dans le cas contraire.

De ce qu'une fraction continue illimitée (1) est convergente on ne peut conclure que la fraction continue que l'on obtient en laissant de côté quelques-uns de ses premiers termes est encore convergente; il convient donc de distinguer, parmi les fractions continues illimitées (1) convergentes, celles pour lesquelles

la fraction continue illimitée

$$(2)\qquad \cfrac{a_{m+1}}{b_{m+1}+\cfrac{a_{m+2}}{b_{m+2}+\ddots+\cfrac{a_\nu}{b_\nu+\ddots}}},$$

obtenue en laissant de côté, dans l'expression (1), les premiers termes $b_0$, $a_1$, $b_1$, .... $a_m$, $b_m$, est encore convergente, *quel que soit* $m$, et celles pour lesquelles il existe au moins un entier positif $m$ pour lequel la fraction continue illimitée (2) est divergente. Nous dirons des premières qu'elles sont convergentes *sans restriction*, et des secondes qu'elles ne sont que *conditionnellement convergentes*.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction continue illimitée convergente

$$(3)\qquad \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_\nu}{b_\nu+\ddots}}}$$

le soit sans restriction, est qu'aucune de ses réduites $\frac{A_m}{B_m}$ ne soit égale à la valeur finie K de cette fraction continue illimitée convergente. Lorsque la fraction continue illimitée convergente (3) ne converge que conditionnellement, il existe donc au moins un nombre positif $m$ tel que l'on ait

$$\frac{A_m}{B_m} = K,$$

en sorte que l'on peut remplacer, dans ce cas, la fraction continue illimitée (3) par la fraction continue limitée

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_m}{b_m}}};$$

lorsque $K = 0$, on a nécessairement $m = 0$ et cette dernière fraction continue limitée doit être remplacée par 0. Une fraction continue illimitée ayant une somme nulle ne peut être convergente que conditionnellement.

On peut mettre toute fraction continue illimitée (3) sous la forme

$$\cfrac{\frac{\alpha_1}{\beta_1}|a_1|}{|b_1|+\cfrac{\frac{\alpha_2}{\beta_1\beta_2}|a_2|}{|b_2|+\ddots+\cfrac{\frac{\alpha_\nu}{\beta_{\nu-1}\beta_\nu}|a_\nu|}{|b_\nu|+\ddots}}}$$

où, pour chaque indice $\nu$, $|a_\nu|$ et $|b_\nu|$ désignent les valeurs absolues de $a_\nu$ et $b_\nu$, et $\alpha_\nu$, $\beta_\nu$ des nombres réels ou complexes ayant une valeur absolue égale à 1; tout critérium concernant la convergence, sans restriction ou conditionnelle, des fractions continues illimitées de la forme

$$(4) \qquad \cfrac{\varepsilon_1 p_1}{q_1 + \cfrac{\varepsilon_2 p_2}{q_2 + \ddots + \cfrac{\varepsilon_\nu p_\nu}{p_\nu + \ddots}}}$$

où $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_\nu, q_\nu, \ldots$ sont des nombres *positifs* et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ des nombres réels ou complexes égaux à 1 en valeur absolue, fournit donc immédiatement un critérium correspondant pour les fractions continues illimitées du type général (3). Or, M. Pringsheim démontre qu'il *suffit* que l'on ait, pour tout indice $\nu = 1, 2, 3, \ldots$,

$$(5) \qquad q_\nu - p_\nu \geqq 1,$$

*pour que la fraction continue illimitée* (4) *converge sans restriction.* C'est une généralisation d'un théorème démontré par Seidel, en 1855, dans le cas où tous les nombres $p_\nu$ sont égaux à 1 et les $\varepsilon_\nu$ à $-1$, puis par Stern dans le cas où les $p_\nu$ désignant des nombres positifs quelconques, les $\varepsilon_\nu$ sont encore égaux à $-1$.

Si K désigne la valeur de la fraction continue illimitée (4), qui converge sans restriction sous les hypothèses (5), on peut démontrer que la valeur absolue de K vérifie nécessairement les inégalités

$$0 < |K| < 1,$$

sauf dans le cas où la limite

$$\lim_{\nu = \infty} [1 + p_1 + p_1 p_2 + \ldots + (p_1 p_2 \ldots p_\nu)]$$

est infinie et où l'on a, en outre, pour tout indice $\nu \geqq 1$,

$$q_\nu - p_\nu = 1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{\nu+1} = -1$$

auquel cas on a

$$|K| = 1$$

ou d'une façon précise

$$K = \varepsilon_1.$$

Ce théorème permet de démontrer le théorème suivant déjà énoncé par Legendre et donnant des conditions suffisantes sous lesquelles une fraction continue définit un *nombre irrationnel :*

« La fraction continue illimitée (4) dans laquelle chacun des nombres réels $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ désigne à volonté l'unité positive ou l'unité négative, est convergente et représente un nombre irrationnel, à moins que l'on ne puisse assigner un nombre $m \geqq 1$ tel que pour tout indice $\nu \geqq m$, on ait

$$q_\nu - p_\nu = 1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{\nu+1} = -1,$$

auquel cas le produit de $\varepsilon_1$ par la valeur de la fraction continue illimitée (4)

2ud Partie



est égal à 1, ou à une fraction plus petite que 1, suivant que $m = 1$ ou que $m > 1$. »

On rencontre souvent des fractions continues illimitées de la forme

$$\pm \cfrac{1}{b_1 \pm \cfrac{1}{b_2 \pm \ddots \pm \cfrac{1}{b_\nu \pm \ddots}}}$$

où $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$ désignent des nombres réels (ou complexes) quelconques. M. Pringsheim démontre qu'une telle fraction continue illimitée converge toujours sans restriction lorsque l'on a, pour tout indice $\nu = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\left|\frac{1}{b_{2\nu-1}}\right| + \left|\frac{1}{b_{2\nu}}\right| \leqq 1.$$

La condition

$$|b_\nu| \leqq 2$$

est, *a fortiori*, suffisante pour qu'il en soit ainsi: cette condition est celle que fournit le théorème précédent pour $a_\nu = 1$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$). M. Pincherle avait donné comme condition suffisante (*Comptes rendus de l'Académie de Rome*, série IV, t. V, p. 640) que pour tout indice $\nu$ on ait

$$|b_\nu| > 2 + \varepsilon$$

où $\varepsilon$ désigne un nombre positif.

On rencontre aussi bien souvent des fractions continues illimitées de la forme

$$\pm \cfrac{a_1}{1 \pm \cfrac{a_2}{1 \pm \ddots \pm \cfrac{a_\nu}{1 \pm \ddots}}}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ désignent des nombres réels (ou complexes) quelconques. M. Pringsheim démontre qu'une telle fraction continue illimitée est toujours convergente sans restriction lorsque l'on a, pour tout indice $\nu = 1, 2, 3, \ldots$,

$$|a_{2\nu+1}| + |a_{2\nu+2}| \leqq \frac{1}{2},$$

et

$$|a_2| \leqq \frac{1}{2}.$$

Les conditions

$$|a_2| \leqq \frac{1}{2}; \qquad |a_\nu| \leqq \frac{1}{4} \qquad (\nu \geqq 3),$$

sont, *a fortiori*, suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Comme toute fraction continue illimitée (3) peut être mise sous la forme

$$\cfrac{\frac{a_1}{b_1}}{1+\cfrac{\frac{a_2}{b_1 b_2}}{1+\ddots+\cfrac{\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}}{1+\ddots}}},$$

on déduit immédiatement du dernier théorème une condition suffisante sous laquelle toute fraction continue illimitée (3) est convergente sans restriction. Cette condition est exprimée par les inégalités

$$\left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| < \frac{1}{2}; \qquad \left|\frac{a_{2\nu+1}}{b_{2\nu} b_{2\nu+1}}\right| + \left|\frac{a_{2\nu+2}}{b_{2\nu+1} b_{2\nu+2}}\right| \leqq \frac{1}{2} \qquad (\nu \geqq 1).$$

Si l'on a

$$\left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| < \frac{1}{2}; \qquad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \frac{1}{4} \qquad (\nu \geqq 3),$$

la fraction continue illimitée (3) est, *a fortiori*, convergente sans restriction. M. Helge von Koch avait donné (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXX, p. 145), comme condition suffisante, que l'on ait

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| < \frac{1}{2}.$$

## *Pringsheim* (*A.*). — Sur la première démonstration de l'incommensurabilité des nombres $e$ et $\pi$. (325-327).

On admet généralement que la première démonstration de l'irrationalité des nombres $e$ et $\pi$ et de celle des nombres que l'on obtient en remplaçant $x$ par un nombre rationnel quelconque dans les expressions de $e^x$ ou de $\operatorname{tang} x$, est due à Lambert et que Legendre a complété la démonstration de Lambert en la rendant plus rigoureuse. M. Pringsheim montre que cette opinion est contraire aux faits.

Et d'abord, ce n'est pas à Lambert, mais à Euler, qu'est due la première démonstration de cet ordre. Dans un Mémoire inséré dans les *Commentaires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. IX, p. 98-137, et intitulé : *De fractionibus continuis dissertatio*, Euler a montré comment on peut, au moyen de l'équation de Riccati, obtenir le développement, en fraction continue, d'un grand nombre d'expressions telles que

$$(1) \qquad e, \quad \frac{e-1}{2}, \quad \sqrt{e}, \quad \frac{1}{2}(\sqrt[3]{e}-1), \quad \frac{1}{2}(e^2-1), \quad \frac{e+1}{e-1},$$

et, plus généralement, des fonctions

$$e^{\frac{1}{s}}, \quad \frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1}.$$

Il suffit, à cet effet, d'intégrer l'équation de Riccati de deux manières, d'une part au moyen d'une fraction continue illimitée, d'autre part sous forme finie au moyen de fonctions exponentielles, dans tous les cas où cela est possible. Comme Euler observe expressément qu'à tout nombre *rationnel* correspond un développement *limité* de la forme

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ddots + \cfrac{1}{b_m}}}$$

où $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$ sont des nombres entiers, on peut conclure de ses recherches que tout développement illimité de la forme

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \ddots + \cfrac{1}{b_m + \ddots}}$$

comme ceux auxquels il est parvenu pour les expressions précédentes, ne peut représenter qu'un nombre irrationnel.

Pour être en droit d'envisager comme rigoureuses les recherches d'Euler, il faut, sans doute, y joindre, d'une part, la démonstration de la convergence des fractions continues illimitées auxquelles il parvient et, d'autre part, la démonstration que ces développements convergents représentent effectivement les nombres (1). Mais cette démonstration ne se trouve pas plus dans les Mémoires de Legendre que dans celui d'Euler. Ce n'est d'ailleurs que vers le milieu du XIX^e siècle que la nécessité de ce genre de recherches commence à s'imposer à l'esprit des géomètres.

Il est d'autant plus remarquable que Lambert ait donné implicitement cette démonstration dans le cas du développement de tang $v$,

$$\operatorname{tang} v = \cfrac{1}{\frac{1}{v} - \cfrac{1}{\frac{3}{v} + \cfrac{1}{\frac{5}{v} + \cfrac{1}{\frac{7}{v} + \ddots + \cfrac{1}{\frac{2v+1}{v} + \ddots}}}}}$$

Cette démonstration est contenue dans un Mémoire lu en 1767 et inséré, en 1768, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*. Lambert forme directement, sur le développement obtenu, les réduites successives $\frac{A_v}{B_v}$ de ce développement et montre ensuite que si l'on fait croître $v$ indéfiniment, *l'expression de* $\frac{A_v}{B_v}$ *tend effectivement vers* tang $v$.

La démonstration de Legendre, loin de rendre plus rigoureuse celle de Lambert, comme on le répète si souvent, n'est au contraire pas rigoureuse du tout. Elle ne complète même pas cette démonstration. Par contre, elle la rend plus élégante, en substituant un procédé de récurrence à la recherche de plus grands communs diviseurs qu'effectue Lambert avec quelque lourdeur.

On remarquera toutefois que l'exactitude du lemme de Legendre, qui constitue en réalité le nœud de la démonstration et que l'on peut énoncer en disant que, si $m, n, m', n', \ldots, m^{(\nu)}, n^{(\nu)}, \ldots$ désignent des nombres entiers positifs ou négatifs tels que les quotients $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \ldots, \frac{m^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}, \ldots$ soient tous plus petits que 1, la fraction continue

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{m' + \ddots + \cfrac{m^{(\nu)}}{n^{(\nu)} + \ddots}}}$$

a toujours une valeur irrationnelle, ne peut être mise en doute dans aucun cas. Elle a été démontrée en toute rigueur par M. Pringsheim lui-même (*voir* l'analyse de sa communication précédente à l'Académie).

*von Weber* (*E.*). — Sur les faisceaux de formes bilinéaires. (369-394).

Exposé de la théorie des invariants d'un faisceau de formes bilinéaires

$$u \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x_\alpha y_\beta + v \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta} x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

dans le cas où les formes envisagées sont symétriques gauches, cas caractérisé par les conditions

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}, \qquad b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha},$$

et où l'on n'envisage que des transformations linéaires congruentes des deux groupes de variables $x$ et $y$.

Les méthodes générales de *réduction*, dues à Weierstrass et à Kronecker, ne s'appliquent à ce cas que si on leur fait subir des modifications profondes. Comme, d'autre part, ce cas joue un rôle important dans la théorie générale des systèmes d'équations de Pfaff, il y a lieu de l'étudier avec soin. C'est ce qu'a fait M. von Weber.

*von Voit.* — Notice biographique sur Leonhard Sohncke. (440-449).

*von Voit.* — Notice biographique sur Francesco Brioschi. (449-452).

*Dyck* (*W.*) présente le premier fascicule de l'édition allemande de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Munich et de Vienne et de la Société des Sciences de Gœttingue.

J. M.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, par MM. les Secrétaires perpétuels.

Tome CXXVIII; 1899 (1).

*Poisson* (*G.*). — Sur la propagation des ondes liquides dans les cours d'eau. (42-45).

Les travaux dus à De Saint-Venant et surtout à M. Boussinesq expliquent la plupart des faits constatés. Néanmoins, quand il faut appliquer les formules, on est souvent arrêté par ce fait qu'elles sont établies pour des ondes de faible hauteur, se propageant dans des canaux de forme régulière, tandis qu'on peut avoir à considérer des ondes relativements hautes, et des cours d'eau de forme et de pente très variables.

M. G. Poisson se propose de donner dans ce cas une indication approximative sur les variations de la hauteur maxima de l'onde en chaque point du cours d'eau. Sous le bénéfice des hypothèses habituellement admises, il trouve que l'écoulement permanent se fait à débit constant, et que le profil en long de la surface libre correspondante est déterminé si l'on connaît la hauteur et la vitesse dans une section quelconque. Son analyse fournit ainsi la hauteur maxima dans chaque section et la vitesse correspondante de l'eau.

Elle permet en outre d'étudier en première approximation les modifications que subit la hauteur d'une onde liquide, par l'effet des variations de pente et de section du cours d'eau dans lequel elle se propage.

*Hatt.* — Rapport sur un Mémoire de M. Partiot, du 6 juin 1898 : *Choix d'une formule de célérité.* (73-76).

*Fabry* (*Eug.*). — Généralisation du prolongement analytique d'une fonction. (78-80).

Lorsqu'une fonction analytique a une ligne singulière fermée, on considère cette fonction comme n'ayant plus aucun sens, si la variable traverse cette ligne singulière. L'auteur se propose de montrer que l'on peut, par la seule considération de la continuité, généraliser la définition des fonctions analytiques, de façon à pouvoir, dans des cas très généraux, les prolonger au delà des lignes singulières.

*Servant.* — Sur les points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor. (80-83).

L'auteur, après avoir rappelé les travaux de ses devanciers, généralise un résultat dû à M. Borel. A une série de Taylor

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

(1) Voir *Bulletin*, t. XXIV₂, p. 91.

convergente à l'intérieur du cercle de rayon 1, on associe la fonction adjointe

$$E(a) = c_0 + \frac{c_1 a}{1} + \frac{c_2 a^2}{2!} + \ldots + \frac{c_n a^n}{n!} + \ldots.$$

Si l'argument d'un point singulier est $\alpha$, on a

$$\lim_{a=\infty} \sup [E(az)]^{\frac{1}{a}} = e^{\rho\cos(\theta-\alpha)} \qquad (z = \rho e^{i\theta}),$$

formule qui permet de déterminer les points singuliers de $f(z)$ situés sur le cercle de convergence et même sur le polygone de sommabilité, quelle que soit leur nature.

Suivent diverses généralisations de propriétés découvertes par MM. Hadamard et Borel.

*Lovett* (*E.-O.*). — Sur la correspondance entre les lignes droites et les sphères. (83-86).

Il s'agit de savoir si, dans l'espace à $n$ dimensions, la droite

$$\sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ij} x_j + \alpha_{i,0} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

peut être transformée en sphère par la correspondance établie par les équations

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i(X_1, \ldots, X_n) x_i + \varphi_0(X_1, \ldots, X_n) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \psi_i(X_1, \ldots, X_n) x_i + \psi_0(X_1, \ldots, X_n) = 0.$$

Pour les espaces à cinq dimensions et davantage, il n'existe point de correspondance de cette forme entre droites et sphères. Pour l'espace à quatre dimensions, les équations

$$x + (Z - iW)z - (X + iY)(w + 1) = 0,$$
$$y - (X - iY)z - (Y + iW)(w + 1) = 0$$

transforment les droites arbitraires en sphères. Mais la transformation ainsi définie n'est pas une transformation de contact; elle dégénère en la transformation de Sophus Lie quand la quatrième dimension s'annule. La correspondance directe est (1, 1), mais l'inverse est $(1, \infty^1)$. Si une droite réelle doit être transformée en une sphère réelle, la sphère se réduit à un point.

*Ribière*. — Sur la flexion du cylindre à base circulaire. (86-88).

*Saltykow*. — Sur les intégrales complètes des équations aux dérivées partielles. (166-168).

On considère un système de $m$ équations aux dérivées partielles du premier

ordre pour une fonction $z$ de $n$ variables ($n \geqq m$). Le système étant supposé en involution, il s'agit d'exprimer $z$ et ses $n$ dérivées premières en fonction des variables indépendantes et de $n - m + 1$ constantes arbitraires.

Le problème dépend de l'intégration d'un système de $2(n - m) + 1$ équations aux différentielles totales. Les intégrales générales étant supposées obtenues avec $2(n - m) + 1$ constantes arbitraires, l'auteur indique trois cas dans lesquels la connaissance de ces intégrales suffit pour résoudre la question proposée.

## *Picard* (*Ém.*). — Quelques remarques sur le prolongement analytique des fonctions. (193-195).

Le mode de prolongement proposé par M. Picard consiste à employer toujours des fonctions *analytiques*, mais *en augmentant le nombre des variables*. Ainsi, soit $u(x, y)$ la partie réelle d'une fonction analytique de $x + iy$ qui aurait pour coupure une certaine courbe fermée C. Supposons qu'on puisse trouver une fonction *analytique* réelle

$$F(x, y, t)$$

des trois variables réelles $x$, $y$, $t$, fonction définie pour toutes valeurs réelles de $x$, $y$ et $t$, quand $t$ n'est pas nul, et pour toutes valeurs de $x$ et $y$ correspondant à un point non situé sur la courbe C quand $t$ est nul; supposons enfin qu'à l'intérieur de C, on ait

$$F(x, y, 0) = u(x, y).$$

On peut alors aller d'un point A intérieur à C à un point B extérieur, sans franchir C, en cheminant dans l'espace $(x, y, t)$; on fait ainsi une succession de prolongements analytiques et l'on arrive en B avec une valeur déterminée.

M. Picard donne ensuite l'indication de moyens propres à restreindre l'indétermination de la fonction F.

## *Saltykow*. — Généralisation de la première méthode de Jacobi sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. (225-227).

Le système ne contient pas la fonction inconnue et on le suppose en involution. Son intégration dépend de celle d'un système d'équations aux différentielles totales (*système canonique*).

L'auteur établit le lien étroit qui existe entre l'intégration de l'un de ces systèmes et l'intégration de l'autre, ce qui lui permet de généraliser les théorèmes classiques de Jacobi et de Liouville sur les systèmes canoniques d'équations différentielles ordinaires.

## *Miller* (*G.-A.*). — Sur les groupes d'opérations. (227-229).

L'auteur a énuméré (*Comptes rendus*, t. CXXII, p. 371) tous les groupes possibles dont l'ordre n'excède pas 35. Il communique ici un Tableau contenant les nombres de ces groupes jusqu'à l'ordre 64 inclusivement et ajoute quelques indications sur la façon dont ce tableau a pu être constitué.

*Crelier.* — Sur le développement de certaines irrationnelles en fraction continue. (229-231).

*Guichard.* — Sur la déformation des quadriques de révolution. (232-233).

Énoncé de trois théorèmes mettant en évidence les relations géométriques qui existent entre les déformées de la sphère et celles des quadriques de révolution.

*Pellet* (*A.*). — Sur l'équation normale des surfaces. (233-235).

Résultats divers relatifs aux surfaces de l'espace à $n$ dimensions et à leurs lignes de courbure.

*Saltykow.* — Sur la généralisation de la première méthode de Jacobi. (274-276).

L'auteur étend aux systèmes considérés dans sa première Note (*Sur les intégrales complètes des équations aux dérivées partielles*) les résultats qu'il a démontrés dans la suivante (*Généralisation de la première méthode de Jacobi sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles*) pour des systèmes plus particuliers.

*Maillet* (*Edm.*). — Sur les groupes de classe $N - u$ et de degré $N$ au moins $u - 1$ fois transitifs. (277).

*Lémeray.* — Sur le problème de l'itération. (278-279).

*Stekloff* (*W.*). — Sur le développement d'une fonction donnée suivant les fonctions harmoniques. (279-282).

Considérons les fonctions $V_s$ ($s = 1, 2, \ldots$) qui satisfont respectivement aux conditions

$$\Delta V_s + k_s V_s = 0,$$
$$V_s = 0,$$

à l'intérieur d'un domaine (D) et sur la frontière de ce domaine, les $k_s$ étant des nombres positifs qui croissent indéfiniment avec $s$.

L'auteur démontre au sujet de ces fonctions la proposition suivante :

Une fonction est développable en série procédant suivant les fonctions $V_s$, si elle est fixe et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de (D) et s'annule à la frontière.

*Borel.* — Sur le prolongement des fonctions analytiques. (283-285).

L'auteur précise le point de vue auquel on doit, suivant lui, se placer pour généraliser la définition du prolongement analytique due à Weierstrass.

*Pellet* (*A.*). — Sur les systèmes orthogonaux. (284-285).

Indication de surfaces formant des systèmes orthogonaux dans l'espace à $n$ dimensions.

*Raffy* (*L.*). — Surfaces doublement cylindrées et surfaces isothermiques. (285-288).

Si une surface présente un réseau conjugué $(u, v)$ tel que les plans osculateurs, menés aux courbes $v =$ const. en tous les points de chaque courbe $u =$ const. soient parallèles à une direction fixe, l'auteur dit que la famille $u =$ const. est *cylindrée* (ce qui est le cas de toute famille de lignes de courbures planes); la surface est dite *doublement cylindrée* si la même propriété appartient aux deux familles du réseau.

M. Raffy donne d'abord le moyen de déterminer toutes les surfaces doublement cylindrées suivant leurs lignes de courbure; puis il définit géométriquement celles de ces surfaces qui sont isothermiques.

*Tzitzéica*. — Sur les surfaces à courbure totale constante. (288).

*Blutel*. — Sur les lignes de courbure de certaines surfaces. (289-291).

L'auteur étudie les surfaces (S) qui jouissent de cette propriété que les sphères principales relatives à l'une des familles de lignes de courbure coupent un plan ou une sphère sous un angle constant.

Parmi ces surfaces figurent celles à lignes de courbure planes, celles à lignes de courbure sphériques dans un système et plus généralement celles qui ont même image sphérique qu'une surface à lignes de courbure sphériques.

Si la propriété des sphères principales peut être réalisée de deux manières, la surface est à lignes de courbure sphériques ou à lignes de courbure planes.

*Poincaré* (*H.*). — Le phénomène de Hall et la théorie de Lorentz. (339-341).

Réflexions sur la façon dont s'explique dans la théorie de M. Lorentz le phénomène de Hall : il y a lieu de rechercher expérimentalement si le phénomène ne se produit pas pour tous les métaux quand ils portent une forte charge, et s'il ne change pas de signe avec cette charge, quand elle est très forte.

*Hurwitz*. — Sur un théorème de M. Hadamard. (350-353).

En appliquant le théorème de Cauchy généralisé à l'intégrale double

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\int \frac{f(z)\varphi(t)\,dz\,dt}{zt - x},$$

l'auteur a retrouvé un théorème de M. Hadamard et obtenu divers résultats analogues, dont celui-ci

Si les fonctions

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{z^{n+1}}, \qquad \varphi(z) = \sum_0^\infty \frac{b_n}{z^{n+1}}$$

n'admettent, en dehors du point $z = 0$, d'autres singularités que des pôles simples, la fonction

$$\psi(z) = \sum_0^\infty \left(a_0 b_n + n a_1 b_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0\right) \frac{1}{z^{n+1}}$$

sera uniforme dans tout le plan et n'admettra, elle aussi, en dehors de points singuliers de $f(z)$ et $\varphi(z)$, d'autres singularités que des pôles simples; leurs affixes seront les sommes des affixes des pôles des deux fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$, leurs résidus les produits des résidus correspondants.

## *Pincherle* (*S.*). — Sur les séries de puissances toujours divergentes. (407-410).

L'auteur indique un moyen pour transformer ces séries (séries entières à rayon de convergence nul) en d'autres séries ayant un champ de convergence; ce procédé est fondé sur l'emploi de la *dérivée fonctionnelle* d'une opération distributive $A(\varphi)$ appliquée à une fonction $\varphi(x)$. Cette opération que M. Pincherle a introduite est définie par l'identité

$$A'(\varphi) = A(x\varphi) - xA(\varphi).$$

## *Autonne* (*L.*). — Sur les intégrales algébriques de l'équation de Riccati. (410-412).

Pour qu'une équation algébrique

$$f(u, t) = 0$$

entière et de degré $n$ en $u$, rationnelle en $t$, soit transformable par une substitution fractionnaire effectuée sur $u$ en un polynome $F(u)$ à coefficients indépendants de $t$, il faut et il suffit que $n - 3$ invariants absolus de $f(u, t)$ soient des constantes.

## *Borel* (*Ém.*). — Sur la croissance des fonctions définies par des équations différentielles. (490-492).

On doit à Paul du Bois-Reymond ce théorème important :

Étant donnée une infinité dénombrable quelconque de fonctions positives croissantes, on peut trouver une fonction positive croissante qui croisse plus vite que chacune d'elles.

M. Borel montre que ce théorème est susceptible d'innombrables applications, à raison de la conséquence suivante qu'on en peut tirer et qui se prête à beaucoup de généralisations :

Étant donnée une équation différentielle dont le premier membre est un polynome quelconque en $x, y, y', \ldots$, à coefficients entiers, on considère une

intégrale réelle de cette équation, définie par des conditions initiales rationnelles $x_0, y_0, y'_0, \ldots$; il existe toujours une fonction qui croît plus rapidement que le module de $y$ aux environs de ses divers points singuliers.

## *Le Roy.* — Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. (492-495).

L'auteur résume les recherches qu'il a faites en vue d'obtenir des caractères qui permettent de découvrir la nature d'une fonction définie par un développement en série entière (Voir *Comptes rendus,* 1898, second semestre). Il représente la série par une intégrale définie qui fournit une expression analytique de la fonction, valable pour un domaine absolument quelconque sauf des coupures grâce auxquelles on atteint les points singuliers et les périodes qui s'y rapportent.

Cette méthode, convenablement généralisée, permet dans des cas très étendus l'étude effective d'une série donnée; elle donne, dans nombre de cas, une solution *déterminée* du *problème des moments* de Stieltjes; elle s'applique à l'étude des fonctions définies par certaines séries autres que la série de Taylor (notamment les séries trigonométriques).

Ces mêmes procédés s'appliquent au *problème des séries entières toujours divergentes;* si on les combine avec celui de M. Borel, ils permettent d'étudier les séries entières (convergentes ou divergentes) par lesquelles s'intègrent les équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des polynomes entiers par rapport à la variable.

## *Cotton* (*Ém.*). — Sur les formes de différentielles invariantes vis-à-vis de certains groupes. (495-497).

L'auteur indique une méthode pour former des systèmes d'expressions de Pfaff, invariants vis-à-vis de certains groupes finis et continus; puis il applique ses résultats à la détermination des $ds^2$ à trois variables qui admettent un groupe continu de transformations.

M. Bianchi a traité complètement le problème pour les $ds^2$ *définis positifs*. Les autres sont réductibles à l'un des six types nouveaux que M. Cotton énumère.

La méthode qu'il emploie permet de reconnaître si deux variétés *données* sont applicables et de déterminer la transformation de passage.

## *Darboux* (*G.*). — Notice sur M. Sophus Lie. (525-529).

## *Vessiot.* — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. (544-546).

L'objet de cette Note est de répondre à la question suivante :

On suppose que deux intégrales indépendantes de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \lambda(t, x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \mu(t, x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

satisfont à un système connu d'équations aux dérivées partielles, d'ordre d'ail

leurs quelconque. Quel parti peut-on en tirer pour l'intégration de l'équation proposée?

*Stekloff* (*W.*). — Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique. (588-591).

En rapprochant et combinant les travaux récents de divers auteurs, M. Stekloff a réussi à résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique d'une façon simple et rigoureuse, sans admettre le principe de Dirichlet.

Il communique, dans la présente Note, le théorème suivant :

Soit $v$ le potentiel d'une couche simple de masse totale nulle, répandue sur une surface (S) fermée, admettant partout un plan tangent et ayant partout sa courbure finie et déterminée; soient

$$A = \int \sum \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 d\tau, \qquad B = \int \sum \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 d\tau'$$

deux intégrales, étendues, la première à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine intérieur à (S), la seconde à tous les éléments de volume $d\tau'$ du domaine extérieur à (S), ces deux intégrales étant d'ailleurs supposées avoir un sens.

Si le rapport $\frac{A}{B}$ admet une limite supérieure finie et une limite inférieure différente de zéro, la méthode de Robin résout le problème de Neumann et celui de la distribution électrostatique pour la surface (S).

*Goursat.* — Sur le prolongement analytique. (591-593).

Étant donnée la série entière

$$F(z, z') = \sum A_{mn}(z-a)^m z'^n$$

qui, pour $z' = 0$, se réduit à $\varphi(z)$, on fait cheminer les deux variables indépendantes simultanément dans leurs plans respectifs, $z$ suivant un arc joignant le point $a$ au point $b$, $z'$ le long d'une courbe fermée partant de l'origine et y revenant, et cela de telle façon que l'on puisse poursuivre le prolongement analytique de $F(z, z')$ sans être arrêté. On arrive ainsi finalement à une nouvelle série

$$\sum B_{mn}(z-b)^m z'^n$$

qui, pour $z' = 0$, se réduit à $\psi(z)$. L'auteur montre par un exemple simple que les deux fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ peuvent être quelconques.

*Stephanos* (*Cyp.*). — Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. (592-596).

L'auteur fait connaître deux opérations nouvelles qu'il appelle *composition bialternée* et *conjonction* des formes bilinéaires et indique leurs principales propriétés.

*Borel (Em.).* — Sur la nature arithmétique du nombre $e$. (596-599).

On sait que $e$ ne peut vérifier aucune équation algébrique à coefficients entiers. Étant donné l'entier $n$, si l'on cherche à déterminer les coefficients (entiers) d'un polynome $P(x)$ de degré $n$, de manière que $P(e)$ soit inférieur à $\varepsilon$, la somme de leurs valeurs absolues est supérieure à $M\varepsilon^{-\mu}$, M étant un nombre fixe et $\mu$ étant défini par la relation

$$\frac{k}{\mu} = \log\log\varepsilon,$$

où $k$ est une constante.

*Guichard.* — Sur les réseaux conjugués dont les courbes d'un système sont des géodésiques. (599-601).

*Tzitzéica.* — Sur certains systèmes d'équations de Laplace. (601-603).

Étant donné un système de $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de la forme

$$\text{(L)} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_i\partial\rho_k} = a_{ik}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_i} + a_{ki}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_k} \qquad (i \neq k = 1, 2, \ldots, n),$$

supposé admettre les $n+2$ solutions

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad R; \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - R^2,$$

on peut obtenir $n+2$ autres fonctions

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n, \quad R'; \quad z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 - R'^2,$$

vérifiant un même système de Laplace de la forme (L) en posant

$$z_1\frac{\partial x_1}{\partial\rho_i} + \ldots + z_n\frac{\partial x_n}{\partial\rho_i} = x_1\frac{\partial x_1}{\partial\rho_i} + \ldots + x_n\frac{\partial x_n}{\partial\rho_i} - R\frac{\partial R}{\partial\rho_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 + \ldots + (z_n - x_n)^2 = R^2 + R'^2.$$

Cette proposition peut d'ailleurs être généralisée.

*Chessin.* — Sur les théorèmes de Green et de Cauchy. (604-606).

Pour que l'intégrale d'une fonction $f(z)$ soit nulle le long du contour d'un domaine simplement connexe (D) dans lequel $f(z)$ est uniforme et continue, il n'est point nécessaire, comme on l'admet généralement, que la dérivée $f'(z)$ soit continue dans tout ce domaine; il suffit que $f'(z)$ soit continue dans (D), sauf peut-être en des points ou sur des lignes formant un ensemble réductible, où nulle hypothèse sur l'existence ou la nature de $f'(z)$ n'est nécessaire.

*Poincaré (H.).* — Sur les nombres de Betti. (609-610).

Dans son Mémoire intitulé *Analysis situs*, l'auteur a énoncé ce théorème que, dans toute variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux.

Ce résultat n'est pas exact, ainsi que l'a remarqué M. Hugaard, si l'on définit les nombres considérés comme l'a fait Betti lui-même. Mais il est vrai des nombres définis comme l'a fait M. Poincaré.

*Blutel.* — Sur les lignes de courbure de certaines surfaces. (721-723).

Il s'agit des surfaces (S) que l'auteur a considérées dans une Note récente (*voir* ci-dessus). M. Blutel démontre que, si $(S_1)$ est l'une de ces surfaces rapportée à ses lignes de courbure, il existe une infinité de surfaces (S), dépendant d'une fonction arbitraire, qui admettent la même représentation sphérique que $(S_1)$. De plus, on peut trouver toutes les surfaces $(S_1)$ telles que les sphères correspondantes passent toutes par un point fixe.

*Guichard.* — Sur quelques applications de la loi de parallélisme des réseaux et des congruences. (723-725).

L'auteur présente diverses applications de la théorie des réseaux et des congruences parallèles, qui se rapportent principalement aux réseaux récemment considérés par M. Raffy (*voir* ci-dessus) sous le nom de *réseaux cylindrés* et *doublement cylindrés*.

Ainsi, parmi les réseaux parallèles à un réseau doublement cylindré, il y en a un dont les deux tangentes rencontrent chacune une courbe fixe. Cette propriété permet de construire tous ces réseaux.

Les surfaces doublement cylindrées suivant leurs lignes de courbure, que M. Raffy a déterminées analytiquement, peuvent être définies géométriquement : ce sont celles qui ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que les surfaces, déterminées par Ossian Bonnet, qui ont pour ligne de courbure des cercles géodésiques. Il suit de là que, sur chaque nappe de la surface des centres, les conjuguées des géodésiques sont des courbes planes.

*Stäckel* (*P.*). — Sur quelques propriétés arithmétiques des fonctions analytiques. (723-727).

Les équations algébriques à deux variables $(x, y)$, à coefficients rationnels, ne sont pas les seules qui fassent correspondre à toute valeur *algébrique* de l'une des variables *seulement* des valeurs *algébriques* de l'autre variable.

C'est ce que l'auteur met hors de doute en formant une équation transcendante qui jouit de cette propriété.

*Darboux* (*G.*). — Sur la déformation des surfaces du second degré. (760-766).

L'objet de cette Note est de retrouver et de compléter les relations que M. Guichard a établies entre la déformation de certaines surfaces du second degré et celle de la sphère. L'auteur énonce et établit la proposition suivante :

Quand une quadrique, tangente en un seul point au cercle de l'infini, roule

sur une surface applicable, les deux génératrices isotropes qui passent par le point de contact de la quadrique et du cercle de l'infini coupent le plan de contact suivant deux points dont le milieu décrit une surface à courbure totale constante.

*Boussinesq.* — De l'effet produit, sur le mouvement d'inclinaison d'une bicyclette en marche, par les déplacements latéraux que s'imprime le cavalier. (766-771).

*Leau.* — Sur les fonctions définies par un développement de Taylor. (804-805).

La méthode que l'auteur a indiquée (*Comptes rendus,* 1898, second semestre) pour l'étude d'une fonction sur le cercle de convergence de la série de Taylor qui la représente, s'applique également à la recherche des régions du plan, où cette fonction est holomorphe. M. Leau indique ici la modification qu'il convient d'y apporter à cette fin.

*Stäckel* (*P.*). — Sur quelques propriétés arithmétiques des fonctions analytiques. (805-808).

L'auteur revient sur sa récente Communication (*voir* ci-dessus) pour mettre hors de doute l'irréductibilité de l'équation transcendante qu'il avait considérée.

*Stekloff* (*W.*). — Sur l'existence des fonctions fondamentales. (808-810).

Démonstration, indépendante du principe de Dirichlet, de l'existence des fonctions fondamentales de M. Le Roy et de M. Poincaré, pour les surfaces considérées par l'auteur dans sa dernière Note (*voir* ci-dessus).

*Lebesgue* (*H.*). — Sur les fonctions de plusieurs variables. (811-813).

L'auteur fait connaître la suite des propositions par lesquelles il est arrivé à généraliser un théorème établi par M. Baire (*Comptes rendus,* 1898) sur les fonctions d'une variable :

Pour qu'une fonction de plusieurs variables soit développable en série de polynomes, il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue dans tout ensemble parfait.

M. Lebesgue a construit et représenté par des séries de polynomes des fonctions discontinues dans n'importe quel domaine et cependant continues sur toute courbe algébrique ou même analytique.

*Darboux* (*G.*). — Sur la déformation des surfaces du second degré. (854-859).

Suite de la Note précédente, de même titre. Étant donnée une surface à courbure totale constante, on peut se proposer de déterminer la quadrique (Q)

qui lui correspond. Après en avoir donné le moyen, M. Darboux fait connaître une propriété caractéristique des surfaces applicables sur les quadriques de révolution.

De chaque point d'une quadrique de révolution (Q) comme centre, décrivons les sphères (S) qui sont tangentes à une sphère fixe ayant pour centre l'un des foyers. Si la quadrique roule sur une autre surface applicable (Θ) en entraînant les sphères (S), l'enveloppe de celle de ces sphères qui a son centre au point de contact de (Θ) et de (Q) est une surface sur les deux nappes de laquelle les lignes de courbure se correspondent toujours et correspondent aux courbes du système conjugué commun à (Θ) et à (Q).

Ce résultat conduit à une nouvelle démonstration de l'un des théorèmes de M. Guichard.

*Boussinesq.* — Calcul, dans une hypothèse simple, du déplacement latéral que doit s'imprimer le cavalier, sur une bicyclette en marche, pour porter le centre de gravité du système à une petite distance horizontale voulue de la base de la bicyclette. (859-862).

*Dickson* (*L.-E.*). — Sur plusieurs groupes linéaires isomorphes au groupe simple d'ordre 25920. (873-875).

*Liapounoff.* — Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. (910-913).

Il s'agit de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \mu p(x) y = 0,$$

où $p(x)$ désigne une fonction donnée d'une variable réelle $x$, continue et périodique et $\mu$ un paramètre arbitraire dont $p(x)$ ne dépend point.

L'auteur se place dans l'hypothèse où $p(x)$ est une fonction réelle toujours positive et étudie l'influence de la valeur de $\mu$ sur la nature des intégrales.

*Méray* (*Ch.*). — Interprétation nouvelle de la condition requise pour qu'une intégrale double, prise sur une plaque de surface, ne dépende que du bord de celle-ci. (913-917).

Pour que l'intégrale

$$\iint (A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy),$$

où A, B, C sont des fonctions données de $(x, y, z)$, ne dépende pas de la forme de la plaque de surface à laquelle on l'étend, mais seulement de la courbe qui sert de bord à cette plaque, il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions $u$ et $v$ des trois variables $x$, $y$, $z$ telles qu'on ait identiquement

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} = A, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} = B, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = C.$$

2me Partie.



*Andrade.* — Sur l'homographie de la théorie des poutres. (917-920).

*Wälsch* (*Ém.*). — Sur les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques. (920-922).

*Hatzidakis.* — Trois formules très générales relatives aux courbes dans l'espace. (923-924).

L'auteur indique divers procédés pour résoudre le problème suivant :

Étant données deux courbes quelconques dans l'espace, exprimer la courbure et la torsion de l'une par la courbure, la torsion et l'élément d'arc de l'autre, et par la *position mutuelle* des deux courbes.

Le moyen le plus simple consiste à considérer les deux courbes comme tracées sur deux surfaces qui auront leurs normales parallèles aux points correspondants des deux courbes; on peut alors appliquer les formules données dans le Tome II des *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. Darboux. Les relations qu'on obtient ainsi en éliminant les rotations des trièdres auxiliaires reviennent à celles de M. Schönflies, et sont susceptibles de nombreuses applications.

*Darboux* (*G.*). — Sur les transformations des surfaces à courbure totale constante. (953-958).

Suite de la Communication précédente de M. Darboux. Cette Note contient deux démonstrations géométriques nouvelles des théorèmes de M. Guichard, démonstrations qui permettent à l'auteur d'établir que les méthodes de transformation des surfaces à courbure totale constante auxquelles conduisent ces théorèmes ne sont pas distinctes de celles que MM. Bianchi et Bäcklund ont fait connaître antérieurement.

*Levi-Civita.* — Sur les intégrales périodiques des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. (978-981).

Étant donnée l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y},$$

où l'on suppose X et Y fonctions périodiques de $t$, avec la période $\tau$, holomorphes par rapport à $x$ et $y$ autour de l'origine O et nulles à la fois en O pour toute valeur de $t$, reconnaître s'il existe des intégrales régulières dans le domaine du point O et périodiques en $t$ avec la période $\tau$.

Si l'on connaît deux intégrales régulières en O et dont le déterminant fonctionnel par rapport à $x$ et à $y$ ne s'annule pas pour $x = y = t = 0$, on peut décider si *toutes* les intégrales sont périodiques, ou si *aucune* ne l'est; en outre, si les deux intégrales supposées connues satisfont à une certaine condition d'inégalité, il existe une intégrale périodique, et une seule.

*Petrovitch.* — Extension du théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre. (981-984).

*Stekloff* (*W.*). — Sur la théorie des fonctions fondamentales. (984-987).

L'auteur fait connaître divers résultats relatifs aux fonctions fondamentales (*voir* sa Note précédente) et notamment une formule générale susceptible d'applications importantes.

*Darboux* (*G.*). — Sur les surfaces à courbure constante positive. (1018-1024).

Cette Note contient la vérification analytique des résultats que M. Darboux avait établis par voie géométrique dans sa dernière Communication (*voir* ci-dessus). Il y est montré que le théorème de M. Guichard permet d'utiliser, pour la Géométrie des éléments réels, les transformations de MM. Bianchi et Bäcklund lorsque, appliquées aux surfaces à courbure positive, elles se présentent sous une forme nécessairement imaginaire. On peut d'ailleurs utiliser plus complètement ces transformations, lorsqu'elles sont imaginaires, en effectuant successivement deux transformations de Bäcklund, assujetties à la seule condition d'être imaginaires conjuguées l'une de l'autre.

*Poincaré* (*H.*). — Sur les groupes continus. (1065-1069).

L'auteur présente quelques observations sur la théorie des groupes continus (Sophus Lie) et démontre d'une manière nouvelle l'existence d'un groupe de structure donnée.

*Dickson* (*L.-E.*). — Sur une généralisation du théorème de Fermat. (1083-1085).

*Liapounoff.* — Sur une équation transcendante et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. (1085-1088).

L'auteur revient (*voir* sa précédente Communication) sur l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu p(x) y = 0,$$

où $\mu$ est un paramètre arbitraire et $p(x)$ une fonction continue et périodique de la variable réelle $x$. Il se place dans un cas plus général, où $p(x)$ peut changer de signe, et donne des indications sur la nature des intégrales de l'équation différentielle, suivant les valeurs que l'on attribue à $\mu$.

*Zaremba.* — Note sur le développement d'une fonction arbi-

traire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques. (1088-1089).

L'auteur communique sans démonstration le théorème suivant :

Soit (D) un domaine limité par une surface fermée (S), pouvant se composer de plusieurs nappes, mais admettant en chacun de ses points des rayons de courbure principaux non inférieurs à une longueur fixe.

Soit $f(x, y, z)$ une fonction donnée s'annulant sur la surface (S) et admettant dans toute l'étendue du domaine (D) des dérivées secondes.

Soient $U_1$, $U_2$, $U_3$, ... la suite des fonctions harmoniques relatives au domaine (D) et $k_1$, $k_2$, $k_3$, ... celle des nombres caractéristiques correspondants.

On pourra trouver des constantes $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... et une suite infinie de nombres entiers positifs croissants $p_1$, $p_2$, $p_3$, ... tels que si l'on pose

$$W_\nu = \sum_{t=p_{\nu-1}+1}^{p_\nu} A_t U_t \qquad (p_{-1} = 0)$$

la série $W_1 + W_2 + W_3 + \ldots$ soit uniformément convergente dans toute l'étendue du domaine (D) et ait $f(x, y, z)$ pour somme.

*Guichard* (*C.*). — Sur les réseaux qui correspondent au cas où la suite de Laplace est limitée dans un sens. (1149-1152).

L'auteur commence par établir deux propriétés générales des congruences et des réseaux, d'où découlent les conséquences suivantes :

On sait trouver tous les systèmes conjugués formés d'une série de courbes planes et d'une série de géodésiques.

On sait trouver tous les réseaux cycliques qui contiennent un système de courbes planes.

*Le Vavasseur*. — Les groupes d'ordre $p^2q^2$, $p$ étant un nombre premier plus grand que le nombre premier $q$. (1152-1153).

*Mittag-Leffler*. — Sur la représentation d'une branche uniforme de fonction analytique. (1212-1215).

L'auteur communique sans démonstration trois théorèmes importants, qui permettent de former un développement propre à représenter une branche uniforme de fonction analytique, prolongée dans le domaine le plus étendu possible.

*Beudon* (*J.*). — Sur le calcul des formules contenant des fonctions arbitraires. (1215-1218).

*Darboux* (*G.*). — Sur la déformation des surfaces générales du second degré. (1264-1270).

Une quadrique générale (Q) roulant sur une surface applicable (Θ), on con-

sidère les surfaces décrites par les points où le plan de contact est rencontré par les huit génératrices isotropes de la surface. On a le théorème suivant :

Ces huit surfaces sont isothermiques et se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits; leurs lignes de longueur nulle correspondent aux asymptotiques de la surface ($\Theta$).

M. Darboux déduit ce résultat de la proposition générale que voici :

Si une surface réglée ($Q$) roule sur une surface applicable ($\Theta$), les points où les différentes lignes de longueur nulle de ($Q$) rencontrent le plan de contact de ($\Theta$) et de ($Q$), points qui sont tous situés sur la génératrice de ($Q$) contenue dans le plan de contact, décrivent des surfaces qui se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits; les lignes de longueur nulle de ces surfaces correspondent aux lignes asymptotiques de ($\Theta$).

## *Thybaut* (*A.*). — Sur les surfaces isothermiques et la déformation du paraboloïde. (1274-1276).

Sur la normale en chaque point M d'une surface (M) on prend le conjugué harmonique C de M par rapport aux deux centres de courbure; de C comme centre on trace la sphère (S) dont le rayon R est l'inverse de la courbure moyenne de la surface (M) au point M. Les sphères (S) sont tangentes à (M); *lorsqu'elles coupent une sphère fixe sous un angle constant, la surface* (M) *est isothermique.* La détermination des surfaces (M) qui jouissent de cette propriété revient à celle des surfaces applicables sur un paraboloïde quelconque.

Les surfaces isothermiques que ce théorème fait correspondre à la déformation du paraboloïde à un plan directeur isotrope sont celles que M. Thybaut a découvertes précédemment (Thèse de Doctorat).

## *Tzitzéica*. — Sur la déformation de certaines surfaces liées aux surfaces du second degré. (1276-1277).

Les surfaces tétraédrales, en nombre simplement infini, pour lesquelles on a

$$x = A(a+u)^{\frac{3}{2}}(a+v)^{\frac{3}{2}},$$
$$y = B(b+u)^{\frac{3}{2}}(b+v)^{\frac{3}{2}},$$
$$z = C(c+u)^{\frac{3}{2}}(c+v)^{\frac{3}{2}},$$

avec les relations

$$A^2a^i + B^2b^i + C^2c^i = m_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

les $m$ étant des constantes données, sont applicables les unes sur les autres.

## *Painlevé* (*P.*). — Sur le développement d'une branche uniforme d'une fonction analytique. (1277-1280).

L'auteur rattache les résultats récemment publiés par M. Mittag-Leffler (*voir* ci-dessus) à un mode de développement des fonctions analytiques réelles antérieurement étudié par lui-même, et qui lui permet de démontrer et de compléter en même temps les théorèmes dont il s'agit.

*Borel* (*Em.*). — Sur le calcul des séries de Taylor à rayon de convergence nul. (1281-1283).

L'auteur indique le parti qu'on peut tirer des séries de M. Mittag-Lefler (*voir* ci-dessus) pour l'étude des séries entières dont le rayon de convergence se réduit à zéro.

*Darboux* (*G.*). — Sur les surfaces isothermiques. (1299-1305).

Dans quel cas une sphère qui dépend de deux paramètres enveloppe-t-elle une surface dont les deux nappes se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits? Tel est le problème que se pose M. Darboux. Après avoir montré que les deux nappes de l'enveloppe doivent être isothermiques, il établit ce théorème :

Étant donnée une surface isothermique quelconque (M), on peut lui faire correspondre, avec similitude des éléments infiniment petits et conservation des lignes de courbure, une infinité d'autres surfaces isothermiques (M′) qui, prises chacune avec (M), constituent les deux nappes d'une enveloppe de sphères.

Voici, en outre, une propriété caractéristique des surfaces isothermiques :

Étant donnée une surface quelconque (M), on construit en chacun de ses points M la sphère tangente qui a pour centre le conjugué harmonique de M par rapport au segment formé par les centres de courbure principaux. La condition nécessaire et suffisante pour que (M) soit isothermique est que cette sphère enveloppe, en même temps que (M), une surface (M′) dont les lignes de courbure correspondent à celles de (M).

*Guichard* (*C.*). — Sur les réseaux cycliques qui contiennent un système de géodésiques. (1308-1310).

La représentation sphérique des surfaces (M) telles que la congruence des tangentes à l'une des familles de lignes de courbure soit une congruence cyclique, dépend d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

A chaque surface (M) on peut faire correspondre une infinité de surfaces (M′) telles que

1° Les rayons de courbure correspondants sont égaux;

2° Les lignes de courbure d'une famille ont même longueur;

3° Celles de l'autre famille ont même rayon de courbure aux points correspondants.

*Lerch.* — Sur les séries de Dirichlet. (1310-1311).

*Picard* (*Em.*). — Sur les développements en série des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy. (1363-1366).

L'auteur montre que, sous certaines conditions très peu restrictives, on peut obtenir par la méthode de Cauchy-Lipschitz des développements qui convergent tant que les intégrales restent continues. En particulier, étant donné le

système

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les $X_i$ sont des polynomes, les $x$ pourront être représentés par des séries de polynomes en $t$, qui seront convergentes tant que les $x$ seront des fonctions continues de $t$.

La méthode en question, dont l'application n'est pas d'ailleurs restreinte aux éléments réels, est donc supérieure à toutes les autres méthodes proposées pour le même objet.

*Maillet* (*Edm.*). — Sur les équations indéterminées à deux et trois variables qui n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers. (1383-1385).

Énoncé de diverses conditions qui assurent l'existence de points à coordonnées *entières* sur les courbes et les surfaces algébriques dont les équations ont leurs coefficients entiers et sont arithmétiquement irréductibles.

*Coulon* (*J.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles. (1386-1389).

Extension à l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2 U}{\partial y_q^2} = 0$$

des résultats obtenus par MM. Volterra et Tedone dans le cas particulier où la dérivée partielle affectée du signe *plus* est seule de son espèce ($p = 1$).

*Phragmén*. — Sur une extension d'un théorème de M. Mittag-Leffler. (1434-1437).

Il s'agit du théorème sur la représentation d'une branche uniforme de fonction analytique, récemment publié par M. Mittag-Leffler (*voir* ci-dessus).

Ce théorème peut être démontré d'une manière tout à fait élémentaire, si l'on suppose connue la représentation analogue de la fonction

$$\frac{1}{1 - x},$$

qu'on peut obtenir très facilement. Ce mode de démonstration permet, en outre, comme le montre l'auteur, de généraliser le résultat en question.

*Darboux* (*G.*). — Sur une classe de surfaces isothermiques liées à la déformation des surfaces du second degré. (1483-1487).

L'auteur caractérise, parmi toutes les surfaces isothermiques, celles qui sont décrites, quand une quadrique $(Q)$ roule sur une surface applicable $(\Theta)$, par les huit points où les génératrices isotropes de $(Q)$ percent le plan de contact

de Q et de (Θ). Chacune de ces surfaces satisfait à une équation de la forme

$$H^2\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + H^2\left(\frac{\partial u}{\partial \rho_1}\right)^2 + \frac{u^2 u'^3}{4} + A\,uu' + 2B\,u + 2C\,u' + D = 0,$$

son élément linéaire rapporté aux lignes de courbure étant

$$ds^2 = H^2(d\rho^2 + d\rho_1^2),$$

$u$ et $u'$ désignant les quantités suivantes

$$u = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}, \qquad u' = H^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)$$

(R, $R_1$ rayons de courbure principaux) et A, B, C, D des constantes. M. Darboux montre que cette condition nécessaire est en même temps suffisante.

*Picard* (*Ém.*). — Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé. (1487-1489).

M. Picard, ayant complété des travaux antérieurs sur l'extension du principe de Dirichlet à diverses équations du second ordre, énonce les résultats qu'il a obtenus relativement à l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

sous certaines conditions simples. Ainsi, en supposant que les coefficients $d$, $e$, $f$ soient continus ainsi que leurs dérivées premières, on peut, par une série d'approximations successives, obtenir l'intégrale qui prend des valeurs données sur un contour (simple ou composé), pourvu que cette succession de valeurs soit continue et admette des dérivées des trois premiers ordres. Si les coefficients $d$, $e$, $f$ sont analytiques, il est possible de traiter la question dans des cas plus étendus.

*Lebesgue* (*H.*). — Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan. (1502-1503).

L'auteur substitue à la définition classique de l'applicabilité la nouvelle définition que voici :

Une surface est applicable sur le plan, s'il est possible d'établir entre les points de cette surface et ceux d'une aire plane une correspondance univoque et continue telle qu'à toute courbe rectifiable de la surface corresponde dans l'aire plane une courbe *rectifiable* ayant même longueur, et inversement.

Avec cette définition, il existe d'autres surfaces applicables sur le plan que les surfaces développables. M. Lebesgue donne des modes de génération de pareilles surfaces, les unes réglées mais non développables, les autres ne contenant aucun segment de droite.

*Painlevé* (*P.*). — Sur le calcul des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy-Lipschitz. (1505-1508).

M. Painlevé s'est servi de cette méthode pour étudier le mouvement d'un

système matériel *dans l'intervalle de temps le plus grand possible*, avec le minimum de restrictions relatives à la continuité. Il résume les résultats généraux qu'il a obtenus et leurs principales applications.

Ainsi, étant données deux quantités positives $\Delta$ et $\varepsilon$ ($\Delta \geqq \varepsilon$) aussi petites que l'on veut, on peut, *dans le problème des n corps*, calculer avec l'approximation $\varepsilon$ les positions des $n$ corps dans un intervalle de temps ou affirmer que dans cet intervalle l'écart minimum de deux astres est moindre que $\Delta$.

Pour un système matériel quelconque, s'il n'existe pas de position *singulière* à distance finie et si la force vive du système reste finie pour $t$ fini, on peut représenter le mouvement du système par des séries qui convergent, *quel que soit t*.

## *Saltykow* (*N.*). — Considérations sur les travaux de MM. S. Lie et A. Mayer. (1550-1553).

L'intégration d'un système *complet* de $m$ équations aux dérivées partielles du premier ordre pour une fonction de $n$ variables ($n > m$) revient, suivant Jacobi, à former $n - m$ nouvelles équations constituant avec les premières un système complet et *résoluble* par rapport à toutes les dérivées.

Cette dernière restriction n'est point nécessaire, ainsi que S. Lie l'a démontré dans le cas d'une seule équation. Ensuite ce résultat a été étendu par Mayer aux équations simultanées. Mais l'analyse de Mayer prête à une objection que M. Saltykow fait connaître, avec une nouvelle démonstration non sujette à cette difficulté.

## *Pépin* (*le P.*). — Nouvelle formule relative aux résidus quadratiques. (1853-1856).

Après avoir communiqué une formule nouvelle pour déterminer le caractère quadratique d'un nombre impair et positif A relativement à un nombre premier, le P. Pépin en déduit la démonstration de ce théorème, deviné par Euler : Les nombres premiers renfermés dans une même forme linéaire $4Ax + r$ sont, ou bien tous diviseurs, ou bien tous non-diviseurs de $x^2 - A$.

La formule du P. Pépin se démontrant sans le secours de la *loi de réciprocité*, on possède, grâce à elle, deux méthodes complètes et indépendantes l'une de l'autre pour établir à la fois la théorie des diviseurs de $x^2 - A$, la loi de réciprocité et la théorie des formes réduites de Lagrange complétée par le théorème déduit de cette formule.

Tome CXXIX, 1899.

## *Lovett*. — Sur les transformations des droites. (20-23, 144-147).

L'auteur soumet les droites de l'espace $(x, y, z)$ aux transformations

$$\Phi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \qquad \Psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$

qui leur font correspondre des surfaces de l'espace $(X, Y, Z)$.

En particulier, si les équations $\Phi = 0$ et $\Psi = 0$ sont linéaires en $x$, $y$, $z$, pour que les droites soient transformées en quadriques, il faut que les équations soient bilinéaires. On trouve $\infty^{36}$ transformations de cette espèce; si l'on veut que la quadrique soit une sphère, il n'y en a plus que $\infty^{13}$, parmi lesquelles figure la célèbre transformation de Lie, et qui sont toutes des transformations de contact.

Viennent ensuite quelques indications sur les transformations de droites en sphères dans les espaces à $n$ dimensions ($n$ ne peut dépasser 11).

*Guichard.* — Sur les surfaces de M. Voss. (23-26).

Il s'agit des surfaces qui admettent un réseau conjugué exclusivement formé de lignes géodésiques. L'auteur montre que la recherche des surfaces de Voss est équivalente à celle des congruences dont l'un des réseaux focaux est formé par les lignes de courbure d'une surface et dont l'autre se projette sur un plan fixe suivant un réseau orthogonal.

*Le Vavasseur.* — Les groupes d'ordre $16p$, $p$ étant un nombre premier impair. (26-27).

Trente-quatre de ces groupes sont décomposables. L'auteur énumère les autres.

*Painlevé (P.).* — Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique en série de polynomes. (27-31).

Applications diverses de la méthode donnée par l'auteur pour démontrer le théorème récemment publié par M. Mittag-Leffler.

*Goursat.* — Sur deux équations intégrables du second ordre. (31-32).

L'auteur fait connaître les intégrales générales des deux équations

$$s z = \sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}, \qquad s \sin z = \sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}.$$

*Fredholm.* — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles. (32-34).

Étant donnée une forme définie $f(\xi, \eta, \zeta)$ du degré $2n$, on considère l'équation linéaire

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u = 0. \tag{1}$$

Si l'on désigne par $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ une forme quelconque du degré $2n-2$, l'intégrale

$$u = \int \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{f(\xi, \eta, \zeta)} (a\,d\xi + b\,d\eta + c\,d\zeta).$$

étendue à tous les éléments d'une droite située dans le plan

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0$$

et passant par le point

$$\xi = cy - bz, \qquad \eta = az - cx, \qquad \zeta = bx - ay$$

est une intégrale homogène et de degré $-1$ de l'équation (1) sans autre point singulier réel que l'origine. Si l'on prend en particulier

$$\psi = \xi^\alpha \eta^\beta \zeta^\gamma \qquad (\alpha + \beta + \gamma = 2n - 2),$$

on obtient une intégrale dont le rôle par rapport à l'équation (1) est analogue à celui de la fonction $\frac{1}{r}$ par rapport à l'équation de Laplace.

## *Saltykow.* — Considérations sur les travaux de MM. S. Lie et A. Mayer. (34-37).

L'auteur revient sur le changement de variables de M. A. Mayer, indiqué dans sa dernière Communication, et l'applique à l'exemple qu'il avait déjà traité.

## *Painlevé (P.).* — Sur le développement des fonctions analytiques de plusieurs variables. (92-95).

L'auteur considère une fonction $F(z, w)$ de deux variables complexes, holomorphe pour $z = 0$, $w = 0$. Après avoir indiqué le moyen de définir le domaine de convergence, dans l'espace à quatre dimensions, de la série de Mac-Laurin qui représente F aux environs de l'origine, il introduit un développement de M. Mittag-Leffler qui représente $\frac{1}{1-z}$ en dehors du segment de droite $(1, +\infty)$; soit

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(z)$$

ce développement. Si dans les $P_n$ on remplace $z^j$ par

$$\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial F}{\partial z_0} z + \frac{\partial F}{\partial w_0} w\right)^{(j)},$$

la série ainsi obtenue converge et représente $F(z, w)$ dans toute l'*étoile* de convergence de cette fonction (relative à l'argument de $z$).

## *Guichard.* — Sur la théorie générale des congruences de cercles et de sphères. (147-149).

L'emploi des coordonnées pentasphériques fait correspondre les congruences de sphères de l'espace ordinaire aux congruences de droites de l'espace à cinq dimensions. Par un procédé qu'indique l'auteur, on fait correspondre les congruences de cercles aux réseaux de ce même espace.

En conséquence, à toute propriété des réseaux et congruences de l'espace à

cinq dimensions correspondent des propriétés des congruences de cercles et de sphères.

*Saltykow.* — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles. (195-198).

L'auteur revient sur ses précédentes recherches (*Comptes rendus*, janvier 1899) pour étendre sa théorie aux équations *quelconques* en involution, sans les supposer résolues par rapport aux dérivées partielles.

*Maillet* (*Edm.*). — Sur les équations indéterminées de la forme $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$. (198-199).

Indication de nombreux cas d'impossibilité.

*Demoulin* (*A.*). — Sur une correspondance entre deux espaces réglés. (200-202).

L'auteur fait connaître deux solutions particulières de ce problème : Établir entre deux droites une correspondance telle que, si l'une d'elles engendre une congruence de normales, il en soit de même de l'autre.

L'une de ces solutions constitue une généralisation nouvelle du théorème de Dupin.

*Lovett* (*E.-O.*). — Sur les équations de Pfaff. (274-275).

Généralisant un résultat de M. Guldberg (*Comptes rendus*, décembre 1898), l'auteur démontre que :

Une équation linéaire aux différentielles totales (intégrable ou non intégrable) peut admettre des intégrales singulières dont la détermination se fait sans intégration.

Il donne deux exemples, dont l'un échappe à la méthode de M. Guldberg.

*Dulac* (*H.*). — Sur les cols des équations différentielles. (276-279).

Une équation différentielle du premier ordre peut, en général, dans le voisinage d'un point singulier, se mettre sous la forme

$$(x + \ldots)\, dy = dx(-\lambda y + \ldots);$$

les coefficients de $dy$ et de $dx$ sont des fonctions holomorphes de $x$ et de $y$ dans le voisinage de $x = y = 0$; les termes non écrits sont de degré supérieur au premier.

Dans le cas où $\lambda$ *n'est pas un nombre réel positif*, on sait que l'équation admet une infinité d'intégrales pour lesquelles $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro (Poincaré).

M. Dulac aborde le cas où $\lambda$ *est positif*; il démontre que si $\lambda$ est *commensurable*, il y a *une infinité* d'intégrales qui vont passer par l'origine.

*Appell.* — Sur les mouvements de roulement ; équations du mouvement analogues à celles de Lagrange. (317-320).

Les équations de Lagrange ne peuvent pas être appliquées sans modifications aux problèmes dans lesquels des solides roulent et pivotent les uns sur les autres. L'auteur indique une forme simple des équations du mouvement, qui s'applique en particulier à ce genre de liaisons.

*Lovett* (*E.-O.*). — Sur la correspondance entre les lignes droites et les sphères. (383-385).

L'auteur complète les résultats de sa Note récente sur le même sujet (*voir* ci-dessus). Les transformations d'un espace $(x, y, z)$ en un autre espace $(X, Y, Z)$ définies par *deux* équations bilinéaires changent une droite du premier en une quadrique du second. Cette quadrique se réduit à une sphère dans deux cas; le premier est celui que M. Lovett avait signalé; le second, qu'il définit ici, conduit à une famille plus étendue de transformations de contact, à un groupe de $\infty^{15}$ transformations. On les obtient en combinant la célèbre transformation de Lie avec toutes les transformations du groupe projectif général.

*Lovett* (*E.-O.*). — Sur un groupe continu infini de transformations de contact entre les droites et les sphères. (405-407).

En rapprochant des résultats de la Note qui précède ceux que l'auteur a précédemment donnés (*Comptes rendus*, octobre 1898) sur les transformations de contact les plus générales qui conservent les développables, on obtient un groupe de transformations de contact contenant trois fonctions arbitraires (c'est-à-dire un groupe à une infinité de paramètres) qui transforme les droites en sphères.

*Appell*. — Sur une forme générale des équations de la Dynamique. (423-427).

L'auteur fait ressortir la grande étendue des cas auxquels convient la forme qu'il a donnée récemment (*voir* ci-dessus) aux équations de la Dynamique. Comme exemple, il retrouve d'une façon symétrique les équations d'Euler pour le mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

*Berry* (*Arthur*). — Sur les surfaces du quatrième degré qui admettent une intégrale de différentielle totale de première espèce. (449-451).

On ne connaissait, en dehors des cônes, que deux surfaces du quatrième degré (et leurs transformées homographiques) admettant une intégrale de différentielle totale de première espèce.

A ces deux surfaces que M. Poincaré avait signalées et qui lui paraissaient être les seules répondant à la question, M. Berry en ajoute trois nouvelles qu'il obtient par une méthode propre à fournir *toutes* les solutions du problème. Il conclut de son analyse que toute surface du quatrième degré, admettant une intégrale de différentielle totale de première espèce, a son genre numérique négatif et égal à $-1$.

*Appell.* — Sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique. (459-460).

L'auteur résume ses recherches précédentes dans l'énoncé que voici :

Soit un système à liaisons données, soumis à des forces pouvant dépendre des positions, des vitesses et du temps; désignons par J l'accélération d'un point quelconque du système, par $m$ sa masse et par F la force donnée qui lui est appliquée, puis formons la fonction

$$R = \frac{1}{2}\sum mJ^2 - \sum FJ\cos(F, J);$$

à un instant quelconque, la position du système et l'état des vitesses étant regardés comme déterminés, les accélérations ont des valeurs rendant la fonction R minimum.

*Mangeot* (*S.*). — Sur quelques dépendances géométriques entre deux systèmes de points définis par des équations algébriques. (464-466).

Indication d'un covariant très général relatif à plusieurs fonctions de $x$, $y$, $z$ dans la transformation de coordonnées rectangulaires. L'auteur en déduit les conditions pour que deux figures soient semblables, homothétiques, égales, superposables par translation ou par rotation, ou encore symétriques l'une de l'autre par rapport à un point, à une droite, à un plan.

*Renaux.* — Sur un développement d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour en une série de polynomes. (473-475).

Soient un contour simple (S) et $z_1 = f(z)$ la fonction qui représente d'une manière conforme l'aire extérieure à (S) sur l'aire extérieure à un cercle du plan des $z_1$ ayant l'origine pour centre, les points à l'infini se correspondant. Aux cercles ayant pour centre l'origine dans le plan des $z_1$ correspondent des *courbes de niveau* dans le plan des $z$. L'auteur énonce que toute fonction holomorphe à l'intérieur de l'une quelconque ($S_1$) des courbes de niveau extérieures à une certaine courbe de niveau ($S_0$) est développable suivant une série de polynomes déterminés, les mêmes pour toutes les courbes de niveau, pourvu que l'on connaisse les valeurs de cette fonction sur le contour ($S_1$).

*Poisson* (*G.*). — Sur l'identité de solution de certains problèmes d'élasticité et d'hydrodynamique. (513-515).

L'auteur montre que, dans les problèmes d'élasticité à deux dimensions, la recherche des pressions peut souvent se ramener à l'étude du mouvement permanent d'un fluide. Cette assimilation entre deux ordres de phénomènes physiques donne lieu à de nombreuses applications. C'est ainsi qu'on serait conduit à penser que la forme normale des plissements du sol terrestre est identique à celle des vagues de la mer.

*Lévy* (*Maurice*). — Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire. (535-539).

Navier a résolu le problème de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire appuyée sans encastrement sur tout son pourtour. M. Maurice Lévy résout le même problème dans le cas où deux bords opposés sont ainsi appuyés, chacun des deux autres bords pouvant être, ou libre, ou appuyé avec ou sans encastrement.

*Picard* (*Ém.*). — Quelques remarques sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. (539-540).

L'une des difficultés de la théorie tient au fait suivant. Étant donnée une fonction algébrique $z$ de $x$ et de $y$ et une fonction rationnelle R de $x$, $y$ et $z$ susceptible de se mettre sous la forme

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

il peut arriver que, pour toutes ces représentations, les fonctions rationnelles A et B deviennent infinies pour des valeurs de $x$, $y$ et $z$ qui laissent R finie. C'est ce que M. Picard montre sur une fraction rationnelle

$$\frac{U(x, y)}{z}$$

relative à la fonction algébrique $z = \sqrt{P(x)P(y)}$ où P est un polynome arbitraire.

Cette même fraction rationnelle, étant prise pour élément différentiel d'une intégrale double, donne lieu à une intégrale de seconde espèce dont *les périodes cycliques ne sont pas toutes nulles,* ce qui est une circonstance instructive.

*Renaux.* — Sur les fonctions fondamentales et sur le développement d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour en séries de fonctions fondamentales. (525-528).

*Appell.* — Sur les positions d'équilibre d'un navire avec un chargement liquide. (567-569).

Extension de la méthode de M. Guyou pour l'équilibre d'un flotteur sans liquide intérieur. La discussion de la stabilité est ramenée à ce problème de géométrie :

*Étant données deux surfaces, la surface* (C) *du centre de carène et la surface* (G) *lieu du centre de gravité totale du système fourni par le flotteur et les liquides, trouver la plus courte distance d'un point de* (G) *au plan tangent à* (C).

*Goursat.* — Sur un problème relatif aux congruences de droites. (578-580).

Ce problème, posé par M. Bricard, et dont M. Demoulin a fait connaître récemment deux solutions particulières (*voir* ci-dessus) est le suivant :

*Établir entre deux droites la correspondance la plus générale telle que, si l'une d'elles engendre une congruence de normales, il en soit de même de l'autre.*

M. Goursat résout complètement le problème en montrant que toute transformation de contact en $(x, p)$ de l'espace à trois dimensions fournit une correspondance de l'espèce demandée, et réciproquement; or on connaît toutes les transformations de contact en $(x, p)$.

*Marotte* (*P.*). — Sur la classification des groupes projectifs de l'espace à $n$ dimensions. (580-583).

La méthode de M. Lie ne pouvant être étendue à l'hyperespace, l'auteur part de ce principe :

Si une figure géométrique, ponctuelle ou non, reste invariable par un groupe projectif G, l'ensemble de ses éléments singuliers forme une multiplicité invariable par le groupe G.

Il est ainsi conduit à chercher *les multiplicités, ponctuelles ou non,* sans éléments singuliers. On obtient ainsi la classification demandée. L'auteur se borne ici aux groupes continus qui laissent invariable une multiplicité ponctuelle, et applique ses résultats à l'espace à quatre dimensions.

*Petrovitch* (*M.*). — Théorème sur le nombre de racines d'une équation algébrique, comprises à l'intérieur d'une circonférence donnée. (583-586).

*Appell.* — Équilibre d'un flotteur avec un chargement liquide. (636-637).

Nouvelle solution de ce problème; on est ramené à une condition identique à celle de M. Guyou pour les flotteurs sans liquides intérieurs, sauf que la surface des centres de carènes est remplacée par une autre surface.

*Humbert* (*G.*). — Sur certaines surfaces remarquables du quatrième ordre. (640-642).

Il s'agit de curieuses surfaces, les unes à 15 points doubles, les autres sans point double, mais avec deux groupes de 16 droites, auxquelles conduisent les fonctions que l'auteur appelle *intermédiaires normales* parmi les fonctions abéliennes de deux variables.

*Humbert* (*G.*). — Sur les fonctions hyperabéliennes. (667-669).

Contribution à la théorie des surfaces hyperabéliennes de M. Picard. L'auteur donne des exemples simples de surfaces dont les coordonnées s'expriment par des fonctions hyperabéliennes de deux paramètres, dans le cas où, les fonctions abéliennes correspondantes ayant pour périodes normales

$$1, 0 : 0, 1 : g, h : h, g',$$

la relation entre ces périodes est

$$h^2 - gg' = 2.$$

Telles sont, entre autres, les surfaces du quatrième ordre qui ont respectivement pour équations

$$\frac{xy+z}{xy-z} = \frac{xz+y}{x-yz}, \qquad x^2 = \frac{(y^2-1)(z^2-1)}{y^2+z^2}.$$

*Goursat.* — Sur les congruences de normales. (669-670).

Les formules par lesquelles l'auteur a défini récemment (*voir* ci-dessus) la correspondance la plus générale entre deux droites, qui conserve les congruences de normales, conduisent à l'élégante construction que voici :

A tout plan P faire correspondre une surface S de telle façon qu'à deux plans parallèles P, $P_1$ distants de $h$ correspondent deux surfaces parallèles S, $S_1$, dont l'une s'obtient en portant une longueur $mh$ sur les normales à l'autre, $m$ étant constant. Lorsque P reste tangent à une surface non développable $\Sigma$, la surface S a une enveloppe $\Sigma'$ qui correspond élément par élément à la surface $\Sigma$. Cette transformation de contact change deux surfaces parallèles en deux surfaces parallèles et fournit la solution la plus générale du problème.

*Guichard.* — Sur les congruences de cercles et de sphères qui interviennent dans l'étude des systèmes orthogonaux et des systèmes cycliques. (748-750).

L'auteur commence par énoncer les deux théorèmes suivants, où les *pôles* d'un cercle sont les centres des sphères de rayon nul qui passent par ce cercle :

Si une sphère S décrit une congruence, le cercle $C_1$, qui a pour pôles les points A et A' où la sphère touche son enveloppe, décrit aussi une congruence.

Réciproquement, si un cercle C décrit une congruence, la sphère S, qui a pour centre le point où le plan de C touche son enveloppe et qui passe par les pôles A et A' du cercle C, décrit aussi une congruence; la sphère S touche son enveloppe aux points A et A'.

Tout problème sur les congruences de sphères est ainsi ramené à un problème sur les congruences de cercles, et inversement.

Vient ensuite la définition de certaines congruences particulières de sphères.

*Painlevé (P.).* — Sur les équations du second ordre à points critiques fixes. (750-753).

L'auteur énonce la solution complète du problème suivant :

*Étant donnée une équation*

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$$

*où* R *est rationnel en* $\frac{dY}{dX}$ *et* Y, *analytique en* X, *reconnaître si elle a ses points critiques fixes et, quand il en est ainsi, l'intégrer ou la ramener à un type canonique irréductible.*

*Padé* (*H.*). — Sur la généralisation des développements en fractions continues, donnés par Gauss et par Euler, de la fonction $(1+x)^m$. (753-756).

Les fractions données par l'auteur dépendent d'un entier positif arbitraire; leurs réduites sont des *fractions rationnelles approchées* de la fonction $(1+x)^m$.

*Boussinesq* (*J.*). — Ce que devient un système d'ondes planes, latéralement indéfinies, dans un milieu transparent isotrope, mais hétérogène, formé de couches planes et parallèles. (794-799).

*Landau* (*Edm.*). — Contribution à la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. (812-815).

Démonstration de la convergence de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)\log k}{k}$$

où $\mu(1)=1$, $\mu(k)=0$ si $k$ est divisible par un carré $>1$, et enfin pour les autres valeurs de $k$, $\mu(k)=(-1)^{\rho}$, $\rho$ désignant le nombre des facteurs premiers de $k$.

*Andrade*. — Sur les systèmes isolés simultanés. (815-818).

*Boussinesq* (*J.*). — Propagation, dans un milieu transparent hétérogène, d'un pinceau latéralement limité de lumière parallèle; intégration des équations du mouvement. (859-864).

*Lebesgue* (*H.*). — Sur la définition de l'aire d'une surface. (870-872).

On ne peut pas définir l'aire d'une surface courbe par la considération des surfaces polyédrales inscrites, les aires de ces surfaces n'ayant pas de limite supérieure (Schwartz).

L'auteur donne une définition nouvelle de l'aire des surfaces qu'il appelle *rectifiables* (surfaces sur lesquelles, à toute courbe rectifiable du plan, correspond une courbe rectifiable); cette définition, analogue à celle de Peano, est plus facile à appliquer.

Elle conduit à une définition nouvelle des surfaces *applicables* (égalité des arcs des courbes *rectifiables* correspondantes), qui entraîne la conservation des aires, mais non celle des angles.

*Petrovitch* (*M.*). — Sur le nombre de racines d'une équation

algébrique, comprises à l'intérieur d'une circonférence donnée. (873-875).

*Padé* (*H.*). — Sur la généralisation des développements en fractions continues, donnés par Lagrange, de la fonction $(1+x)^m$. (875-879).

Les trois développements de Lagrange sont compris comme cas particuliers dans deux types nouveaux, auxquels l'auteur en ajoute deux encore, dont aucun cas particulier n'avait encore été donné.

Ces quatre types dépendent d'un entier positif arbitraire.

*Duhem* (*P.*). — Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants et, en particulier, d'un navire qui porte un chargement liquide. (879-880).

*Appell* (*P.*). — Remarque sur la Communication précédente de M. Duhem. (880).

*Boussinesq* (*J.*). — Justification du principe de Fermat sur l'économie du temps, dans la transmission du mouvement lumineux à travers un milieu hétérogène, d'ailleurs transparent et isotrope. (905-911).

*Guichard* (*C.*). — Sur quelques propriétés de certains systèmes de cercles et de sphères. (944-946).

L'auteur énonce les principales propriétés des systèmes de cercles et de sphères qu'il a définis dans sa précédente Note, et qui conduisent en particulier à une démonstration très simple du théorème de Weingarten sur la déformation des surfaces.

*Baire* (*R.*). — Sur la théorie des ensembles. (946-949).

L'auteur, ayant constaté que la théorie classique des ensembles de points ne suffit pas pour étudier certaines questions de la théorie des fonctions, a constitué une théorie plus générale qu'il appelle *théorie des ensembles de suites d'entiers*. Il en indique les principes et en énonce quelques théorèmes, particulièrement ceux qui interviennent dans la théorie des fonctions, par exemple, quand on recherche les fonctions discontinues développables en séries de polynomes.

*Painlevé* (*P.*). — Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. (949-952).

Étant donnée une équation

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$$

où R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$, algébrique en Y, analytique en X, l'auteur est parvenu à reconnaître si elle a ses points critiques fixes et, quand il en est ainsi, à la ramener à l'un des 25 types canoniques dont les 23 premiers correspondent au cas où R est rationnel en Y et dont les deux derniers sont propres au cas général.

On a ainsi la solution de plusieurs problèmes importants, tels que former les équations de l'espèce considérée où R a diverses formes analytiques assignées à l'avance, et la démonstration de théorèmes que M. Painlevé avait antérieurement énoncés comme très vraisemblables.

*Busche* (*E.*). — Généralisation d'une formule de Gauss. (952-954).

La formule célèbre de Gauss

$$\sum_{x=1}^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{E}\left(\frac{qx}{p}\right) + \sum_{y=1}^{\frac{q-1}{2}} \mathrm{E}\left(\frac{py}{q}\right) = \frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2},$$

où $\mathrm{E}(z)$ désigne l'entier contenu dans $z$, a été le point de départ des recherches d'Eisenstein, Dirichlet, Stern, Sylvester, qui l'ont considérablement généralisée. L'auteur établit une relation nouvelle qui semble être la source de tous les résultats obtenus par ses devanciers.

*Humbert* (*G.*). — Sur la transformation des fonctions abéliennes. (955-956).

Il s'agit des fonctions abéliennes à deux variables, dont les périodes

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & h, \\ 0, & 1, & h, & g, \end{matrix}$$

satisfont à la relation particulière $g' = 3g$.

Entre leurs modules existe une relation algébrique qu'on peut obtenir comme suit. On considère une conique, et à chacune de ses tangentes on fait correspondre, d'une manière univoque, un argument $x$. Soient $x_1, \ldots, x_6$ les arguments de six tangentes; le radical

$$\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_6)}$$

conduira à des fonctions abéliennes dont les périodes vérifieront la relation $g' = 3g$, si les six tangentes peuvent se répartir en trois couples tels qu'il existe un (et un seul) système simplement infini de cubiques passant par les sommets des trois couples et touchant les six droites.

C'est l'exemple le plus simple des transformations du premier ordre que l'auteur a appelées *singulières* et qui conduisent d'un système de fonctions abéliennes à des fonctions abéliennes de modules différents; M. Humbert fait connaître une représentation géométrique des relations qui existent entre les modules primitifs et les modules *conjugués*.

*Baire* (*R.*). — Sur la théorie des fonctions discontinues. (1010-1013).

L'auteur expose les vues d'après lesquelles il définit les fonctions discontinues de plusieurs variables réelles et répartit en classes, marquées par les nombres de M. Cantor, les fonctions d'une variable. Il énonce ensuite quelques propriétés des fonctions de classe 2. (Les fonctions de classe 1 ont été étudiées dans sa thèse; celles de classe 0 sont les fonctions continues.)

L. R.

## ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, publiées, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, par un Comité de rédaction composé de MM. les Maîtres de Conférences de l'École.

Troisième série, t. XVI, 1899 (1).

*Borel* (*Em.*). — Mémoire sur les séries divergentes. (9-131).

Avant d'aborder l'objet propre de ces recherches, qui est de montrer le parti que l'Analyse peut tirer des séries divergentes, l'auteur consacre un premier Chapitre à des *Considérations générales sur la convergence et la divergence :* après une discussion sur la portée des critères de M. Bertrand, il traite des divers ordres d'infinitude que peuvent présenter pour $x$ infini les fonctions qui, à partir d'une certaine valeur de la variable, croissent constamment et indéfiniment. La classification, arbitraire en principe, de ces ordres d'infinitude est établie à l'aide des fonctions $x^a$, $e^x$, $\log x$ et de leurs combinaisons les plus simples. Il va sans dire que les quinze types inscrits au tableau de M. Borel n'épuisent pas tous les modes possibles de croissance des fonctions; mais ils suffisent pour toutes les fonctions qui se présentent dans les applications de l'Analyse. C'est ainsi que, pour les équations différentielles rationnelles en $x$, $y$ et ses dérivées successives, où la variable $x$ ne prend que des valeurs *positives* infiniment grandes, on a ces deux théorèmes :

Pour l'équation du premier ordre, l'ordre d'infinitude de l'intégrale est inférieur à celui de la fonction $e^{e^x}$; pour l'équation du second ordre, il est inférieur à celui de la fonction $e^{e^{e^x}}$.

Entre le mode de divergence de la série à termes positifs

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

et l'ordre d'infinitude de $f(1)$, la fonction

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

ayant son rayon de convergence égal à *un*, il y a cette relation que, cet ordre

(1) Voir *Bulletin*, t. $XXIV_2$, p. 54.

d'infinitude étant donné entre ceux des deux fonctions

$$e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}}, \quad \log\log\ldots\log x$$

(quel que soit le nombre des exponentielles ou des logarithmes), on peut reconnaître la divergence de la série par l'un des critères de M. Bertrand.

Le Chapitre se termine par une classification nouvelle des fonctions de variable complexe, qui complète la classification usuelle et qui est fondée, non sur la nature des singularités, mais sur la *manière* dont la fonction tend vers la valeur ou les valeurs qu'elle prend en point singulier. L'auteur arrive par des considérations de cette sorte à démontrer que :

Étant donnée une équation algébrique, rationnelle et entière, entre la variable complexe $x$, une fonction $z$ et sa dérivée $z'$, si l'on pose

$$z = y + it$$

et qu'on élimine $t$, ce qui conduit à une équation différentielle du second ordre pour $y$; si, de plus, $y$ finit par croître constamment et indéfiniment, on a toujours, à partir d'une certaine valeur de $x$,

$$y < e^{e^{e^x}}.$$

Le Chapitre II a pour titre *Les séries sommables et le prolongement analytique*. C'est un problème singulièrement indéterminé que celui qui consiste, étant donnée une série divergente, à modifier ses termes de manière à en déduire une série nouvelle qui soit convergente : plusieurs solutions en avaient déjà été données. Voici celle dont M. Borel fait le plus fréquent usage : les sommes des premiers termes d'une série *divergente*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

étant $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$, si la série

$$s(a) = \sum \frac{a^n}{n!} s_n$$

est convergente quel que soit le nombre $a$, le quotient

$$\varphi(a) = \frac{s(a)}{e^a}$$

est toujours déterminé. Si $\varphi(a)$ a une limite $s$ pour $a$ infini, on dira que la série des $u$ est *sommable* et que $s$ est sa *somme* ou bien la *limite généralisée* de la suite

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots.$$

Si, en outre, l'intégrale

$$J = \int_0^\infty e^{-a} \operatorname{mod}\left(u_0 + \frac{u_1 a}{1} + \frac{u_2 a^2}{1.2} + \ldots\right) da$$

a un sens, la série des $u$ est dite *absolument sommable*. L'auteur ne considère que de pareilles séries.

Il applique d'abord son procédé de transformation (*méthode de sommation exponentielle*) aux séries entières, en supposant essentiellement que leur rayon

de convergence n'est ni nul, ni infini (ce qui permet de le faire égal à *un*) en vue d'arriver à une solution nouvelle de ce problème : *Étant donnée une série entière supposée divergente pour $z = z_0$, trouver la valeur, au point $z_0$, de la fonction analytique $f(z)$ définie par cette série dans son cercle de convergence.* (On rend le problème déterminé en traçant des coupures, de chaque point singulier de la fonction à l'infini.)

Ensuite M. Borel examine le cas particulier où la fonction n'admet sur son cercle de convergence qu'un seul point singulier, le point $z = 1$, se proposant de la définir dans une portion de plus en plus étendue du plan, au voisinage de ce point; il emploie à cet effet un second procédé de transformation des séries et divise son étude en deux parties : 1° rechercher si la fonction admet des points singuliers infiniment voisins de $z = 1$ et non situés sur l'axe réel; 2° supposant qu'elle n'admet pas de pareils points au moins dans un certain point de voisinage de $x = 1$, donner une expression analytique de la fonction

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon = 0} [f(xe^{i\varepsilon}) - f(xe^{-i\varepsilon})] \qquad (n > 1)$$

qui *mesure* en quelque sorte la non-uniformité de $f(x)$ au voisinage de $z = 1$.

Le Chapitre III est intitulé : *Les séries de Taylor à rayon de convergence nul.* C'est un cas dont l'étude est rendue plus difficile par les circonstances toutes particulières qui lui correspondent. L'auteur commence par généraliser le problème de l'interpolation en cherchant *une fonction entière $f(z)$ qui prenne des valeurs données pour une infinité de valeurs de $z$, dont le module est supposé croître indéfiniment.* En prenant comme élément simple la fonction $\sin \pi z$, on reconnaît que le problème est indéterminé; on peut, dans des cas très étendus, le rendre déterminé par l'adjonction de conditions supplémentaires, qui sont des conditions d'inégalité; encore faut-il que les données satisfassent à certaines inégalités.

Mais la série $f(z)$ qu'on obtient ainsi peut avoir son rayon de convergence nul. L'auteur lui applique dans ce cas la méthode de sommation exponentielle, ce qui le conduit à représenter $f(z)$ par une intégrale définie

$$\int_0^\infty F(u) e^{-\frac{u}{z}} \frac{dz}{z},$$

$F(u)$ étant une fonction analytique pour toutes les valeurs réelles de $u$. Il dit que le point $z = 0$ est pour $f(z)$ un point singulier d'*espèce* (A) quand $F(u)$ est régulière dans un angle fini comprenant l'axe réel $u$ et quand il existe un nombre positif $k$ tel que le produit

$$e^{-ku} \frac{d^p F}{du^p}$$

tende vers zéro quel que soit l'argument de $u$, quand $u$ s'éloigne indéfiniment dans cet angle, $p$ étant un nombre fini quelconque.

Il prouve ensuite qu'un développement divergent ne peut représenter dans un angle déterminé qu'*une seule fonction* pour laquelle le point $z = 0$ soit un point d'espèce (A); et que les séries qui jouissent de cette propriété peuvent être soumises aux règles ordinaires du calcul.

Appliquant ces considérations aux équations différentielles dont le premier membre est un polynome par rapport à la variable $x$, à la fonction inconnue $y$

et à ses dérivées, on reconnaît que si le développement de $y$ par la formule de Maclaurin conduit à une série divergente, mais d'espèce (A), il définit une fonction d'espèce (A) qui satisfait à l'équation proposée et qui, dans son angle de régularité, vérifie les conditions initiales données. M. Borel traite ensuite en particulier des équations

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = \varpi(x, y),$$

$\varpi$ étant un polynome sans terme constant et sans termes du premier degré; il cherche si une pareille équation admet une intégrale telle que l'on ait

$$y = 0, \qquad y' = 0,$$

quand $x$ devient nul par valeurs réelles et positives, et conclut que les équations jouissant de ces propriétés sont au nombre de celles pour lesquelles sa méthode semble devoir réussir. Les calculs peuvent être achevés pour l'équation linéaire

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = x^2.$$

Dans un dernier paragraphe, M. Borel reprend et généralise des résultats obtenus par Stieltjes sur une série remarquable

$$(1) \qquad \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \frac{c_4}{z^5} - \ldots.$$

Le problème qu'il traite est le suivant : Les $c_k$ étant des constantes réelles *données,* on pose

$$c_k = \int_0^\infty u^k f(u)\, du,$$

et l'on demande de déterminer à l'aide de ces égalités la fonction $f(u)$, en ajoutant des conditions supplémentaires telles que cette fonction soit unique. On est ainsi conduit à des séries plus générales que la série (1); M. Borel les appelle *séries de Stieltjes* et montre que ces séries forment une classe assez étendue de séries sommables (par un procédé différent de la sommation exponentielle) et sur lesquelles on peut faire les mêmes opérations que sur les séries entières.

## *Borel* (*Ém.*). — Addition au Mémoire sur les séries divergentes. (132-136).

Démonstration d'un théorème de M. Mittag-Leffler et conséquences nouvelles de ce théorème, relatives à une extension de la région de convergence, qui peut conduire à traverser des lignes singulières essentielles, et à la propriété du cercle de convergence d'être en général (Pringsheim) une coupure de la fonction.

## *Tzitzéica* (*G.*). — Sur les congruences cycliques et sur les systèmes triplement conjugués. (137-192).

L'objet de ce travail est l'étude de certains systèmes de coordonnées curvi-

lignes obliques que M. Darboux a rencontrés dans son Mémoire de 1878 (*Annales de l'École Normale*) et sur lesquels il est revenu plus tard dans son grand Ouvrage sur la théorie des surfaces. Ces systèmes, que M. Tzitzéica appelle *systèmes triplement conjugués,* et qui se présentent comme une généralisation immédiate des systèmes orthogonaux, sont les systèmes composés de surfaces se coupant suivant des courbes qui forment des réseaux conjugués.

On rencontre, dans la théorie de certains systèmes triplement conjugués, des triangles attachés à chaque point de l'espace. Les côtés de ces triangles forment, dans certaines conditions, *des congruences cycliques,* et les sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes passent par les sommets de ces triangles constituent des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales.

C'est pourquoi l'auteur, dans la première Partie de son Mémoire, fait l'étude des congruences cycliques d'après les travaux de ses devanciers, en y ajoutant des résultats relatifs aux congruences à la fois cycliques et de Ribaucour et à certaines congruences liées aux surfaces à courbure totale constante négative.

La deuxième Partie contient un exposé de la théorie générale des systèmes triplement conjugués, de certains systèmes de triangles et de certains systèmes de droites.

La troisième Partie est consacrée à l'étude d'une classe particulière de systèmes triplement conjugués qui se rapprochent plus que les autres des systèmes orthogonaux (ce sont les systèmes que M. Tzitzéica appelle *systèmes* $\Omega_1$) et des systèmes de triangles dont les côtés forment, sous certaines conditions, des congruences cycliques.

Voici comment sont définis les systèmes $\Omega_1$. Quand on a un système de coordonnées curvilignes orthogonales ($\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$), les coordonnées cartésiennes $x$, $y$, $z$ d'un point de l'espace, considérées comme fonctions de $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$, satisfont en même temps que $x^2+y^2+z^2$ à un certain système d'équations de Laplace. Pour un système triplement conjugué quelconque, $x$, $y$, $z$ sont des solutions d'un système de Laplace, sans autre condition spéciale. Enfin, *pour un système* $\Omega_1$, à côté des solutions $x$, $y$, $z$ du système de Laplace correspondant, il y a une autre solution R telle que $x^2+y^2+z^2-R^2$ soit aussi une solution de ce même système.

En conséquence, M. Tzitzéica a fait en réalité l'étude géométrique des systèmes de Laplace qui admettent des solutions liées par une relation quadratique et s'est proposé, étant donné un système de Laplace admettant un certain nombre de solutions liées par une relation quadratique, d'en déduire d'autres systèmes ayant le même nombre ou un plus grand nombre de solutions liées par une relation quadratique.

## *Méray* (*Ch.*). — Sur la théorie des intervalles binaires et des intégrales doubles. (193-238).

Les considérations développées dans ce Mémoire ont surtout une valeur dogmatique; elles se rattachent étroitement, d'ailleurs, au corps de doctrine que l'auteur a constitué dans ses *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques.* Elles sont destinées à éclairer certaines parties encore assez obscures de la théorie des fonctions de deux variables, en particulier à préciser dans un sens exclusivement analytique les notions relatives aux aires (signe de l'aire, intérieur, extérieur, sens de parcours de son périmètre). Elles rapprochent tout à fait la conception des intégrales doubles de

celle des intégrales définies simples; elles permettent d'établir l'existence d'une intégrale double en calculant sa valeur, ce qui est le seul moyen logique d'établir l'existence d'un nombre, et rendent intuitive la règle du changement de variables dans une intégrale double.

Ne pouvant suivre dans son détail l'exposition de M. Méray, nous en indiquerons deux idées directrices : l'une consiste à attribuer au *triangle analytique* un rôle primordial parmi les *intervalles binaires* (champs à deux variables réelles), rôle analogue à celui du segment rectiligne dans le cas d'une seule variable; l'autre, à employer comme procédé général une sorte d'intégration indéfinie, par un couple de fonctions de deux variables, d'une fonction de deux variables, donnée comme devant être leur déterminant différentiel (jacobien). On trouvera à la fin du même Volume un Mémoire du même auteur contenant un exemple de cette sorte d'intégration.

## *Cartan* (*E.*). — Sur certaines expressions différentielles et sur le problème de Pfaff. (239-332).

Nous ne saurions mieux faire ressortir les résultats contenus dans ce Mémoire et le progrès qu'il réalise dans une théorie importante qu'en transcrivant une partie de l'Introduction dont il est précédé.

Le présent travail constitue une exposition du problème de Pfaff, fondée sur la considération de certaines expressions différentielles symboliques, entières et homogènes par rapport aux différentielles de $n$ variables, les coefficients étant des fonctions quelconques de ces variables. Ces expressions peuvent être soumises aux règles ordinaires du calcul, à la condition de ne pas échanger l'ordre des différentielles dans un produit. Le calcul de ces quantités est, en somme, celui des expressions différentielles qui sont placées sous un signe d'intégrale multiple. Ce calcul présente aussi de nombreuses analogies avec le calcul de Grassmann; il est d'ailleurs identique au calcul géométrique dont se sert M. Burali-Forti dans un livre récent.

Il est clair que si l'on fait un changement de variables, toute expression différentielle de degré $p$ se change en une expression différentielle de degré $p$ par rapport aux nouvelles différentielles. Dans le cas d'une expression de Pfaff, qui est du premier degré, on peut lui associer une autre expression différentielle, du second degré, qui est un covariant par rapport aux changements de variables et qui n'est autre que le covariant bilinéaire de Frobenius et de M. Darboux; je l'appelle la *dérivée* de l'expression de Pfaff. Mais, grâce à la notion des expressions différentielles symboliques, *ce covariant est le premier terme d'une suite de covariants symboliques du troisième, quatrième, etc. degré, qui se déduisent intuitivement de l'expression de Pfaff et de sa dérivée par des multiplications;* ils constituent les dérivées deuxième, troisième, etc. de l'expression de Pfaff, la dérivée $p^{\text{ième}}$ étant de degré $p+1$.

On conçoit le parti que l'on peut tirer de la considération de ces dérivées, grâce à leur caractère invariant. *Ce sont les seules quantités qui interviennent dans les énoncés de tous les résultats de la théorie,* dont la forme est extrêmement simple.

La considération de ces dérivées permet de trouver, d'une manière pour ainsi dire intuitive, tous les résultats déjà connus; mais elle m'a permis d'en découvrir d'autres. Je signalerai entre autres *l'extension de la seconde méthode de Clebsch à la réduction des expressions de Pfaff quelconques,* de classe paire

ou impaires, à un nombre quelconque de variables. Elle m'a permis aussi d'exposer complètement la théorie des *intégrales singulières* d'une équation de Pfaff.

Ce Mémoire est divisé en cinq parties. Dans la *première*, j'expose les principes du calcul des expressions différentielles qui interviennent dans la suite. Dans la *seconde*, j'introduis les dérivées d'une expression de Pfaff et la notion de classe, et je démontre la condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression de Pfaff soit de classe $p$; le résultat est extrêmement simple, *c'est que la dérivée $p^{\text{ième}}$ ait tous ses coefficients nuls.* J'introduis ensuite ce que j'appelle *le système complet adjoint* et expose la réduction d'une expression à sa forme canonique, soit par des changements de variables successifs (méthode de Natani et Clebsch), soit sans changements de variables (méthode de Frobenius).

La *troisième partie* est consacrée à la résolution d'une équation de Pfaff, problème qui admet des solutions générales dépendant de la réduction du premier membre à sa forme canonique, et des solutions singulières obtenues en annulant tous les coefficients d'une certaine dérivée.

La *quatrième partie* est consacrée aux deux problèmes suivants :

*Résoudre une équation de Pfaff au moyen d'un nombre donné r de relations inconnues.*

*Résoudre une équation de Pfaff au moyen d'un nombre donné r de relations, parmi lesquelles h sont données à l'avance.*

Ces deux problèmes admettent des solutions générales et des solutions singulières. Les premières sont données par la recherche d'une intégrale de plusieurs systèmes complets successifs, les équations de ces systèmes contenant linéairement les dérivées de toutes les intégrales déjà trouvées. Quant aux solutions singulières, ce sont les solutions d'un problème analogue, mais où les relations données entre les variables sont en plus grand nombre et peuvent être formées par différentiation.

Dans le cas, assez général, où les solutions cherchées ne sont pas des solutions *singulières* de l'équation de Pfaff ou, d'une façon plus précise, n'annulent pas tous les coefficients de la dérivée $(2r-2)^{\text{ième}}$ de l'expression, la forme des systèmes complets peut être simplifiée pour le calcul, de manière que chaque équation ne dépende plus que des dérivées d'une seule des intégrales précédemment trouvées. Cette méthode donne en particulier la généralisation de la seconde méthode de Clebsch.

Enfin, la *cinquième partie* est consacrée aux applications de la théorie à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, ordinaires ou homogènes. J'y indique aussi comment la considération des dérivées se prête à l'établissement des formules fondamentales de la théorie des transformations de contact.

## *Bourlet* (*C.*). — Sur certaines équations analogues aux équations différentielles. (333-375).

Ce Mémoire fait suite à un travail antérieur *Sur les opérations en général et les équations linéaires d'ordre infini,* publié en 1897 dans les *Annales de l'École Normale.*

I. L'auteur commence par rappeler et compléter certains résultats qu'il avait

obtenus dans ces recherches sur les équations de la forme

$$(1) \qquad p_0 \mathfrak{T}^m u + p_1 \mathfrak{T}^{m-1} u + \ldots + p_{m-1} \mathfrak{T} u + p_m u = 0$$

où $\mathfrak{T}$ est le symbole opératif d'une *transmutation additive,* uniforme, continue, régulière, complète dans quelque domaine; $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}^3$, ... sont les puissances symboliques de cette opération; $p_0$, $p_1$, ..., $p_m$ des fonctions données de la variable $x$ et $u$ une fonction inconnue de cette variable. Ces équations se réduisent à des équations différentielles linéaires dans le cas particulier où l'opération $\mathfrak{T}$ est la dérivée.

II. Ensuite vient l'étude plus spéciale des équations de la forme (1), dans lesquelles les coefficients $p_0, p_1, \ldots, p_m$ sont *constants.* On peut leur appliquer une méthode analogue à celle qui fournit l'intégrale générale des équations linéaires à coefficients constants. Supposons, en effet, qu'on sache trouver la solution *la plus générale* $\psi(x, r)$ de l'équation

$$\mathfrak{T} u = ru,$$

où $r$ désigne une constante arbitraire, solution qui peut dépendre d'un nombre *infini* de constantes arbitraires. M. Bourlet démontre l'une après l'autre les diverses parties de l'énoncé suivant :

Soit $r$ une racine de l'équation caractéristique

$$f(r) = p_0 r^m + p_1 r^{m-1} + \ldots + p_{m-1} r + p_m = 0,$$

d'ordre de multiplicité $h$. Les $h$ fonctions

$$\psi(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial r} \psi(x, r), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{h-1}}{\partial r^{h-1}} \psi(x, r)$$

sont $h$ solutions de l'équation (1).

En prenant successivement pour $r$ toutes les racines de l'équation caractéristique, et en donnant aux constantes que contiennent ces fonctions des valeurs fixes, mais quelconques, on aura $m$ solutions linéairement indépendantes.

Enfin, en laissant les constantes que contiennent ces $m$ solutions absolument arbitraires, on obtient la solution la plus générale de l'équation (1) en faisant la somme de ces $m$ solutions.

Cette proposition avait été démontrée par M. Pincherle, mais seulement dans l'hypothèse où la fonction $\psi(x, r)$ dépend d'un nombre *fini* de constantes arbitraires.

III. Les principes généraux qui viennent d'être établis s'appliquent en particulier au cas où $\mathfrak{T}$ est une substitution, c'est-à-dire où l'on a

$$\mathfrak{T} u(x) = u[\varphi(x)],$$

$\varphi(x)$ étant une fonction de substitution donnée. Alors les équations (1) sont celles qu'a étudiées M. Grévy dans sa Thèse de doctorat et l'équation

$$\mathfrak{T} u = ru$$

n'est autre que l'équation de Schröder. L'intégration effective des équations de M. Grévy, quand les coefficients $p$ sont constants, revient donc à résoudre de

la façon la plus générale l'équation de Schröder. C'est pourquoi M. Bourlet s'attache à montrer comment on peut obtenir, pour cette équation, une solution d'une grande généralité, puisqu'elle dépend d'une fonction arbitraire, et qui est vraisemblablement la solution la plus générale dans le domaine où elle est définie.

IV. Comme application des résultats généraux du § I, M. Bourlet montre que l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a\frac{du}{dx} + bu = 0,$$

où $a$, $b$ sont des fonctions de $x$, peut être mise sous la forme

$$\mathfrak{T}^2 u + p_1 \mathfrak{T} u + p_2 u = 0,$$

$p_1$ et $p_2$ étant deux constantes et $\mathfrak{T} u$ étant l'opération

$$\mathfrak{T} u = q_0 u + q_1 \frac{du}{dx}.$$

Les deux fonctions inconnues $q_0$ et $q_1$ satisfont à deux équations simultanées du premier ordre. La présence de deux constantes arbitraires $p_1$ et $p_2$ pourra parfois permettre de simplifier l'intégration.

V. L'auteur considère enfin des équations générales de la forme

$$(2) \qquad f(\mathfrak{T}^m u, \mathfrak{T}^{m-1} u, \ldots, \mathfrak{T} u, u, n) = 0,$$

où $\mathfrak{T}$ est une transmutation additive donnée et cherche à déterminer celles de ces équations pour lesquelles on peut constituer, au moyen de développements en série, une théorie analogue à celle des équations différentielles. Il montre que la transmutation $\mathfrak{T}$ doit satisfaire à l'équation

$$\mathfrak{T} uv = \mathrm{A} uv + \mathrm{B}(u\mathfrak{T} v + v\mathfrak{T} u) + \mathrm{C}\mathfrak{T} u\, \mathfrak{T} v$$

résolue par M. Pincherle. L'une de ses solutions (il n'y en a que deux) fait de l'équation (2) une équation différentielle ordinaire; l'autre conduit aux équations fonctionnelles itératives étudiées par MM. Grévy et Leau. En conséquence, *les seules équations opératives de la forme* (2), *dont la théorie puisse être calquée sur celle des équations différentielles ordinaires, sont les équations fonctionnelles itératives.*

*Le Vavasseur* (*R.*). — Étude du groupe des isomorphismes de $(G_p)^3$, $p$ étant un nombre premier plus grand que 3. (377-394).

*Padé* (*H.*). — Mémoire sur les développements en fraction continue de la fonction exponentielle, pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques. (395-426).

Ce Mémoire a un double objet : démontrer un théorème important sur la convergence des réduites de la fonction exponentielle, et présenter avec d'assez

profondes modifications l'ensemble des résultats que l'auteur a obtenus dans ses travaux antérieurs relativement à la théorie des fractions continues algébriques. Nous empruntons à l'introduction l'exposé des vues de M. Padé sur ce domaine, inexploré jusqu'à lui.

« La première notion à acquérir est celle des *fractions rationnelles approchées* ou *réduites* attachées à une série entière donnée. Ce sont des fractions rationnelles irréductibles spéciales $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$, formant une suite à double entrée, et dont chacune est parfaitement déterminée, par une certaine condition d'approximation, quand on fixe le couple de nombres entiers positifs ou nuls $(\mu, \nu)$ ou le point du plan de coordonnées entières positives ou nulles, auquel elle doit correspondre. Cette loi de correspondance est univoque et réciproque dans le cas général; quand on sort de ce cas, elle demeure toujours réciproque, mais elle n'est plus nécessairement univoque; à une même fraction $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ peuvent correspondre plusieurs points du plan; ces points emplissent un carré dont les côtés sont parallèles aux axes.

» On peut extraire de la suite à double entrée des réduites des suites à simple entrée ou *successions* donnant lieu à des lois de récurrence remarquables. Pour une telle succession

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots, \quad H, \quad K, \quad L, \quad \ldots,$$

les numérateurs et les dénominateurs de trois réduites H, K, L consécutives quelconques sont liés par des formules de la forme

$$\alpha U_{\mu\nu} + a U_{\mu'\nu'} = U_{\mu''\nu''},$$
$$\alpha V_{\mu\nu} + a V_{\mu'\nu'} = V_{\mu''\nu''},$$

où $\alpha$ est un monome à coefficients et exposant différents de zéro, et $a$ un polynome à terme constant différent de zéro. Dans le cas général, une telle succession s'obtient en prenant dans le plan des points successifs A, B, C, ..., simplement *contigus* et *progressants*, le premier A demeurant arbitraire. En dehors de ce cas, le choix est plus compliqué et se déduit de la loi de correspondance entre les réduites et les points du plan.

» Il y a, dans le cas général, trois *dispositions* de successions de points A, B, C, ... qui donnent naissance à des lois de récurrence *régulières*, c'est-à-dire telles que $\alpha$ conserve toujours le même degré, ainsi que $a$, quelles que soient es trois réduites consécutives de la succession que l'on considère.

» A chaque succession de fractions A, B, C, ... correspond une fraction continue qui a ces fractions pour réduites et qui met en évidence les éléments $\alpha$ et $a$ des formules de récurrence qui lient ces fractions.

» Aux dispositions qui donnent, dans le cas général, les lois de récurrence régulières, correspondent des fractions continues régulières. A chacune des trois dispositions correspond une infinité de fractions continues régulières différentes, puisque la première fraction A de la succession demeure entièrement arbitraire.

» C'est parmi ces fractions continues régulières que se trouvent toutes les fractions continues qui ont été données, antérieurement à mes recherches, pour diverses fonctions. Pour la fonction exponentielle, par exemple, de la triple infinité de celles qui existent, on en avait obtenu cinq; c'est la fonction pour

laquelle on en avait obtenu le plus. Les deux fractions continues de Jacobi et Halphen sont deux des fractions continues régulières correspondant au radical développé $\sqrt{X}$, où X est un polynome du quatrième degré.

» Ainsi les fractions continues antérieurement connues pour une fonction quelconque ne sont que des fractions, en très petit nombre et très spéciales, prises parmi les fractions continues régulières, en nombre infini, attachées à la fonction; celles-ci elles-mêmes ne sont que des cas particuliers de fractions continues plus générales obtenues en détachant des successions convenables de réduites de l'ensemble doublement infini des réduites de la fonction.

» On aperçoit ainsi, je crois, sous un tout autre point de vue, ce que peut et doit être la théorie des fractions continues algébriques; on voit qu'elle est dominée par la notion de l'ensemble des fractions rationnelles approchées de la fonction; de plus près, par celle des fractions continues générales formées par des successions convenables de réduites; de plus près encore, par celle des successions qui donnent des fractions continues régulières; on voit que l'étude de la convergence d'une fraction continue spéciale n'est que l'étude de la convergence d'une succession spéciale de réduites, et que, dès lors, cette question de la convergence se pose immédiatement pour la suite à double entrée des réduites considérée dans son ensemble. »

Voici maintenant l'énoncé du théorème que nous avons mentionné au début :

Pour une succession de points représentatifs déterminant une direction asymptotique $(p, q)$ les suites des dénominateurs et des numérateurs des réduites convergent vers des limites

$$e^{-\frac{px}{p+q}}, \quad e^{\frac{qx}{p+q}},$$

dont le quotient est $e^x$; dans tout intervalle d'étendue finie, la convergence est uniforme.

Dans cet énoncé, $p$ et $q$ sont les paramètres directeurs de la direction vers laquelle tend la droite qui va de l'origine au point représentatif de la réduite $(\mu, \nu)$, quand l'un au moins des nombres $\mu$, $\nu$ augmente indéfiniment.

## *Zaremba* (*S.*). — Sur l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u + \xi u + f = 0$$

## et sur les fonctions harmoniques. (427-464).

On sait que diverses questions de Physique mathématique conduisent au problème suivant :

Déterminer une fonction $u$ des coordonnées rectangulaires $x$, $y$, $z$ d'un point variable, vérifiant, dans toute l'étendue d'un domaine (D) limité par une surface fermée (S), l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u + \xi u + f = 0, \tag{1}$$

où $f$ est une fonction donnée des variables $x$, $y$, $z$, où $\xi$ est un paramètre indépendant de ces variables, et où l'on a posé, conformément à l'usage,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

sachant, en outre, que la fonction $u$ doit satisfaire à la condition aux limites

$$\frac{du}{dN} = hu,$$

où $\frac{du}{dN}$ représente la dérivée de la fonction $u$, prise suivant la normale intérieure à la surface (S), $h$ étant une constante donnée, réelle et non négative.

L'objet de M. Zaremba est de résoudre ce problème et d'étudier la fonction $u$ considérée comme fonction du paramètre $\xi$. Il commence par faire connaître une nouvelle méthode d'intégration de l'équation

$$\Delta v + \xi v = 0,$$

la fonction $v$ devant satisfaire à la condition aux limites

$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = \varpi,$$

où $\varpi$ est une fonction continue donnée de la position d'un point variable sur la surface (S). Désignant par $\mu$ celle des déterminations de la racine carrée de $-\xi$ dont la partie réelle est positive, l'auteur forme successivement les intégrales

$$v_1 = 1 - \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r}\,\varpi\, ds,$$

$$v_{k+1} = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r}\left(\frac{dv_k}{dN}\right)_e ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

où $r$ désigne la distance de l'élément superficiel $ds$ à un point quelconque $(x, y, z)$ de l'espace, et démontre que, sous une certaine condition d'inégalité, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

sera convergente et aura pour somme la fonction demandée $v$.

Une fois en possession de ce résultat, il peut faire à l'équation (1) l'application des idées exposées par M. Poincaré dans son Mémoire *Sur les équations de la Physique mathématique* (publié dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894). Il démontre que la fonction $u$ est une fonction méromorphe de $\xi$, qui n'a que des pôles simples et admet pour résidus relatifs à ces pôles les fonctions de $x$, $y$, $z$, appelées *fonctions harmoniques* par M. Poincaré.

Enfin, l'auteur étudie le problème qui consiste à développer une fonction, arbitrairement donnée, en série procédant suivant les fonctions harmoniques, problème qui joue un grand rôle en Physique mathématique.

*Darboux* (*G.*). — Sur la déformation des surfaces du second degré et sur les transformations des surfaces à courbure totale constante. (465-490).

I. L'objet de cette étude est de retrouver et de compléter les relations que

M. Guichard a établies entre la déformation de certaines surfaces du second degré et celle de la sphère. L'auteur énonce et établit la proposition suivante :

Quand une quadrique (Q), tangente en un seul point au cercle de l'infini, roule sur une surface applicable (Θ), les deux génératrices isotropes qui passent par le point de contact de la quadrique et du cercle de l'infini coupent le plan de contact suivant deux points dont le milieu décrit une surface à courbure totale constante.

II. Inversement, étant donnée une surface à courbure totale constante, on peut se proposer de déterminer la quadrique (Q) qui lui correspond de cette manière. Après en avoir donné le moyen, M. Darboux fait connaître une propriété caractéristique des surfaces applicables sur les quadriques de révolution :

De chaque point d'une quadrique de révolution (Q) comme centre, décrivons les sphères (S) qui sont tangentes à une sphère fixe ayant pour centre l'un des foyers. Si la quadrique roule sur une autre surface applicable (Θ) en entraînant les sphères (S), l'enveloppe de celle de ces sphères qui a son centre au point de contact de (Θ) et de (Q) est une surface sur les deux nappes de laquelle les lignes de courbure se correspondent toujours et correspondent aux courbes du système conjugué commun à (Θ) et à (Q).

Ce résultat conduit à une nouvelle démonstration de l'un des théorèmes de M. Guichard.

III. M. Darboux donne ensuite des deux propositions de M. Guichard de nouvelles démonstrations géométriques, qui lui permettent d'établir que les méthodes de transformation des surfaces à courbure totale constante auxquelles conduisent ces propositions ne sont pas distinctes de celles que MM. Bianchi et Bäcklund ont fait connaître antérieurement.

IV. Ce dernier article contient la vérification analytique des résultats précédents et leur traduction en formules. Il y est montré que le théorème de M. Guichard permet d'utiliser, pour la géométrie des éléments réels, les transformations de MM. Bianchi et Bäcklund lorsque, appliquées aux surfaces à courbure positive, elles se présentent sous une forme nécessairement imaginaire. On peut d'ailleurs utiliser plus complètement ces transformations, lorsqu'elles sont imaginaires, en effectuant successivement deux transformations de Bäcklund, assujetties à la seule condition d'être imaginaires conjuguées l'une sur l'autre.

## *Darboux* (*G.*). — Sur les surfaces isothermiques. (491-598).

I. Une quadrique générale (Q) roulant sur une surface applicable (Θ), on considère les surfaces décrites par les points où le plan de contact est rencontré par les huit génératrices isotropes de la surface. On a le théorème suivant :

Ces huit surfaces sont isothermiques et se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits; leurs lignes de longueur nulle correspondent aux asymptotiques de la surface (Θ).

M. Darboux déduit ce résultat de la proposition générale que voici :

Si une surface réglée (Q) roule sur une surface applicable (Θ), les points où les différentes lignes de longueur nulle de (Q) rencontrent le plan de contact de (Θ) et de (Q), points qui sont tous situés sur la génératrice de (Q) contenue dans le plan de contact, décrivent des surfaces qui se correspondent

2ud Partie.



avec similitude des éléments infiniment petits; les lignes de longueur nulle de ces surfaces correspondent aux lignes asymptotiques de $(\Theta)$.

II. Dans quel cas une sphère qui dépend de deux paramètres enveloppe-t-elle une surface dont les deux nappes se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits? Tel est le problème que se pose M. Darboux. Après avoir montré que les deux nappes de l'enveloppe doivent être isothermiques, il établit ce théorème :

Étant donnée une surface isothermique quelconque (M), on peut lui faire correspondre, avec similitude des éléments infiniment petits et conservation des lignes de courbure, une infinité d'autres surfaces isothermiques (M'), qui, prises chacune avec (M), constituent les deux nappes d'une enveloppe de sphères.

Voici en outre une propriété caractéristique des surfaces isothermiques :

Étant donnée une surface quelconque (M), on construit en chacun de ses points M la sphère tangente qui a pour centre le conjugué harmonique de M par rapport au segment fourni par les centres de courbure principaux. La condition nécessaire et suffisante pour que (M) soit isothermique est que cette sphère enveloppe, en même temps que (M), une surface (M') dont les lignes de courbure correspondent à celles de (M).

III. L'auteur caractérise, parmi toutes les surfaces isothermiques, celles qui sont décrites, quand une quadrique (Q) roule sur une surface applicable $(\Theta)$ par les huit points où les génératrices isotropes de (Q) percent le plan de contact de (Q) et de $(\Theta)$. Chacune de ces surfaces satisfait à une équation de la forme

$$H^2\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + H^2\left(\frac{\partial u}{\partial \rho_1}\right)^2 + \frac{u^2 u'^2}{4} + A\,uu' + 2\,B\,u + 2\,C\,u' + D = 0,$$

son élément linéaire rapporté aux lignes de courbure étant

$$ds^2 = H^2(d\rho^2 + d\rho_1^2),$$

$u$ et $u'$ désignant les quantités suivantes

$$u = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \qquad u' = H^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)$$

($R$, $R_1$ rayons de courbure principaux) et A, B, C, D des constantes. M. Darboux montre enfin que cette condition nécessaire est en même temps suffisante.

## *Méray* (*Ch.*). — Intégration d'une différentielle totale binaire à quatre variables indépendantes (509-520).

Voici l'énoncé du problème que l'auteur enseigne à résoudre :

Étant données six fonctions A, B, C, U, V, W de quatre variables indépendantes $(x, y, z, t)$ trouver deux fonctions $u$, $v$ de ces mêmes variables, dont les déterminants fonctionnels relatifs à $y$ et $z$, à $z$ et $x$, ..., à $z$ et $t$, reproduisent respectivement ces six fonctions données.

Si l'on pose

$$A = H_{yz} = -H_{zy}, \qquad \ldots, \qquad W = H_{zt} = -H_{tz},$$

on reconnaît que chacune des fonctions $u$ et $v$ doit vérifier quatre équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre, dont le déterminant $\Delta$ doit être nul. D'où une première condition de possibilité

$$\Delta = (H_{yz}H_{xt} + H_{zx}H_{yt} + H_{xy}H_{zt})^2 = 0.$$

L'évanouissement de $\Delta$ entraîne celui de ceux de ses mineurs qui ne sont pas identiquement nuls. Par suite, les quatre équations se réduisent à deux. En leur appliquant une méthode qu'il a fait connaître dans les *Annales de l'École Normale* en 1890 (*Extension d'une méthode de Jacobi...*), M. Méray obtient les quatre autres conditions complémentaires de possibilité que voici

$$\frac{\partial H_{zt}}{\partial y} + \frac{\partial H_{ty}}{\partial z} + \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial H_{tz}}{\partial x} + \frac{\partial H_{xt}}{\partial z} + \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial H_{yt}}{\partial x} + \frac{\partial H_{tx}}{\partial y} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial H_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial H_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial H_{yx}}{\partial z} = 0.$$

Ces conditions étant vérifiées, ainsi que $\Delta = 0$, le problème s'achève par l'intégration d'une différentielle binaire à deux variables, question résolue dans le Mémoire de l'auteur *Sur la théorie des intervalles binaires*, etc., inséré dans le présent Volume et analysé plus haut.

---

## JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome CII (année 1888).

### *Rudio* (*F.*). — Sur les groupes primitifs. (1-8).

L'auteur donne une nouvelle démonstration d'un théorème démontré par M. Camille Jordan dans le 16e vol. du *Journal de Liouville* et qui s'énonce ainsi :

*Si un groupe primitif de degré n contient un groupe primitif de degré* $\nu$, *il est au moins* $n - \nu + 1$ *fois transitif.*

L'auteur s'appuie sur le théorème suivant, qui peut servir de définition à la primitivité et à l'imprimitivité :

*Pour qu'un groupe transitif soit imprimitif, il faut et il suffit qu'on puisse partager ses éléments en deux systèmes* $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ *et* $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ ($\lambda > 1$, $\mu > 0$), *de telle sorte qu'il n'existe aucune substitution remplaçant un a par un autre a et en même temps un a par un b.*

### *Stern* (*M.*). — Sur la fonction E($x$). (9-19).

L'auteur établit plusieurs théorèmes sur la fonction arithmétique E($x$). Il

retrouve en passant la formule due à Hermite

$$\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{r}{n}+h\right) = E(nh) - E(h),$$

où $h$ est un nombre positif quelconque, et la formule

$$\sum_{r=0}^{n-1} E\left(mx+\frac{rm}{n}\right) = \sum_{s=0}^{m-1} E\left(nx+\frac{sn}{m}\right),$$

énoncée sans démonstration par M. Cesáro et qu'il étend aux valeurs négatives de $x$.

## *Kneser* (*Adolf*). — Fondement arithmétique de quelques théorèmes fondamentaux d'Algèbre. (20-55).

L'auteur se propose d'exposer, en partant des principes de Kronecker, une théorie des équations et systèmes d'équations algébriques qui ait un caractère purement arithmétique et ne s'appuie pas sur la notion de nombre irrationnel; le but général de la théorie est de substituer à toute équation entre un nombre quelconque de quantités algébriques, même si ces quantités sont définies par un système d'équations à plusieurs inconnues, une congruence équivalente par rapport à un module déterminé, tout calcul avec des irrationnelles algébriques étant ainsi remplacé par un calcul avec des fonctions entières d'indéterminées.

M. Kneser expose d'abord la théorie arithmétique de la résolvante de Galois avec un domaine d'irrationalité donné R; il arrive ainsi à la notion du groupe de Galois d'une équation donnée en considérant, au lieu d'une fonction rationnelle des racines de cette équation, une fonction entière d'une indéterminée $w$ prise par rapport à un module $g(w)$ facteur irréductible du premier membre de la résolvante de l'équation donnée. L'adjonction au domaine R d'une irrationnelle algébrique est remplacée, au point de vue arithmétique de l'auteur, par l'adjonction de fonctions entières d'une indéterminée $x$ considérées par rapport à un module irréductible $F(x)$; il étend à ce nouveau domaine la notion d'irréductibilité, ce qui lui permet de décomposer, par un nombre limité d'opérations, tout polynome entier $G(y, x)$ en un produit de polynomes irréductibles [mod. $F(x)$]. L'auteur part des résultats ainsi obtenus pour démontrer le théorème fondamental d'après lequel l'adjonction de deux irrationnelles algébriques revient à l'adjonction d'une irrationnelle unique.

## *Schwering* (*K.*). — Contribution à la théorie de certains nombres complexes. (56-75).

Il s'agit des quantités $(\alpha, x)^\lambda$ et $\psi(\alpha)$ introduites par Jacobi dans la théorie de la division du cercle. L'auteur s'occupe plus particulièrement de la décomposition des quantités $\psi$ en facteurs premiers, réels ou idéaux, et de la représentation de quotients de facteurs premiers, questions qui se rattachent au problème, posé par Jacobi, qui consiste à représenter $(\alpha, x)^\lambda$ par un produit de puissances entières ou fractionnaires de l'une des quantités $\psi(\alpha)$ et des quantités conjuguées.

*Pochhammer* (*L.*). — Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique généralisée à deux points singuliers finis. (76-159).

Il s'agit de l'équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre de la forme

$$x^{n-1}(x-1)\frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-2}(a_1 x - b_1)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + (a_{n-1}x - b_{n-1})\frac{dy}{dx} + a_n y = 0,$$

à laquelle satisfait la série hypergéométrique généralisée et qui avait déjà fait l'objet des recherches de Clausen, de MM. Thomae et Goursat. Le but de l'auteur est de l'intégrer par des intégrales définies multiples. Il y arrive en posant

$$y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha}\mathfrak{T}\,dt,$$

où $\mathfrak{T}$ désigne une fonction de $t$ seulement, $g$ et $\alpha$ des constantes, $h$ étant constant ou égal à $x$. Il montre alors que $\mathfrak{T}$ doit satisfaire à une équation différentielle du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, qui, par division de la fonction inconnue $\mathfrak{T}$ par une puissance convenable de $t$, se ramène à une équation de la forme donnée. En procédant pour cette nouvelle équation comme pour la première et ainsi de suite, on arrive finalement à une équation du second ordre qui, d'après la théorie de Gauss, s'intègre par une intégrale définie simple. On obtient donc ainsi des intégrales multiples d'ordre $n-1$ comme solutions particulières de l'équation donnée. L'auteur indique comment on doit choisir les limites d'intégration, spécialement pour avoir les intégrales régulières au voisinage des points singuliers $0$, $1$, $\infty$. Enfin il indique les substitutions à effectuer sur les variables d'intégration pour obtenir des développements en séries de puissances.

*Cardinaal* (*J.*). — Sur la théorie géométrique des courbes planes du quatrième ordre. (160-174).

En regardant une courbe plane du quatrième ordre comme engendrée par deux faisceaux homographiques de coniques, l'auteur étudie quelques constructions qu'il ramène à la recherche des points communs ou des tangentes communes à deux coniques; il s'occupe également de la détermination d'une quartique donnée par trois points doubles et cinq autres points, ou bien par deux points doubles et sept autres points. Enfin il établit quelques propriétés des quartiques à deux ou trois points doubles en les regardant comme les perspectives de biquadratiques gauches.

*Hofmann* (*Fritz*). — Deux démonstrations géométriques d'un théorème de Hesse. (175-184).

Il s'agit du théorème qui s'énonce ainsi :

*Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont conjugués par rapport à une conique, il en est de même des diagonales.*

La deuxième démonstration donnée repose sur les propriétés d'une certaine figure de l'espace dont la figure plane est la projection.

*Perott* (*Joseph*). — Sur l'équation $t^2 - Du^2 = -1$. (185-223).

Après avoir rappelé les résultats obtenus par Lejeune-Dirichlet sur l'équation

$$t^2 - 2qu^2 = -1,$$

où $q$ est un nombre premier de la forme $8n+1$, l'auteur étudie l'équation

$$t^2 - 2q^2u^2 = -1,$$

où $q$ a la même signification. En s'appuyant sur la théorie des résidus bibiquadratiques de Gauss, il arrive à trouver la condition nécessaire que dans la décomposition $q = c^2 + 2d^2$, le nombre $d$ doit être divisible par 8; la condition est suffisante quand $q$ est de la forme $16n+9$; elle ne l'est pas quand $q$ est de la forme $16n+1$. L'équation est d'ailleurs toujours possible si $q$ est de la forme $8n+5$.

*Königsberger* (*Leo*). — Recherches sur l'existence d'un théorème fonctionnel. (224-236).

Cette Note a pour but de généraliser les résultats obtenus par l'auteur dans un mémoire *sur l'impossibilité de l'existence d'un théorème fonctionnel autre que celui d'Abel,* paru dans ce journal (t. C et CI). Il s'agit ici de savoir s'il peut exister une fonction $f$ telle que $f(w)$, où $w$ est une fonction algébrique des deux arguments $u$ et $v$, s'exprime algébriquement au moyen de $u$, $v$, $f(u)$, $f(v)$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$. Après avoir montré que la fonction satisfait à une équation différentielle algébrique d'ordre $m$ dont l'intégrale générale est une fonction algébrique d'une intégrale particulière, de ses dérivées, de la variable indépendante et de $m$ constantes arbitraires, M. Königsberger, en s'appuyant sur les résultats de son précédent mémoire, ramène cette équation différentielle à une forme linéaire et homogène et démontre l'impossibilité de la propriété énoncée, à moins que l'équation différentielle ne soit du premier ordre.

*Bigler*. — Sur les fonctions gamma avec un paramètre arbitraire. (237-254).

En partant d'une certaine intégrale curviligne due à Hermann Hankel et qui représente la fonction $\frac{1}{\Gamma(u)}$ *pour toutes les valeurs finies de l'argument,* l'auteur retrouve les principales propriétés de cette fonction. De même on peut, au moyen d'une combinaison linéaire de deux intégrales curvilignes, obtenir une fonction de deux arguments $\alpha$ et $\beta$, qui a un sens pour toutes les valeurs de ces arguments et qui coïncide avec l'intégrale d'Euler de première espèce

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx,$$

lorsque les parties réelles de $\alpha$ et de $\beta$ sont positives; cette représentation nouvelle permet de déduire les propriétés classiques de cette fonction. Enfin

M. Bigler donne les expressions de $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ au moyen des demi-périodes K des fonctions elliptiques ayant respectivement pour modules $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

*Scheibner* (*W.*). — Sur les produits de trois et quatre fonctions thêta. (255-259).

Il s'agit de formules qui montrent la relation entre les fonctions $\chi$ de Kiepert et la trisection de l'argument des fonctions elliptiques thêta. L'auteur montre en outre l'équivalence entre la formule fondamentale à trois termes de Weierstrass relative à la fonction $\sigma$ et une formule analogue de Jacobi où entrent plusieurs fonctions thêta.

*Léopold Kronecker*. — Remarque sur les formules thêta de Jacobi. (260-272).

Si l'on considère les fonctions

$$T_h(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \vartheta_h(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_h(\zeta_0-\zeta_1)\vartheta_h(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_h(\zeta_2-\zeta_3)$$

$$(h = 0, 1, 2, 3),$$

où les $\vartheta_h$ sont les quatre fonctions entières de Jacobi, elles prennent, par toutes les permutations possibles des quatre arguments $\zeta_0$, $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\zeta_3$, douze valeurs, chacune d'elles $T_h$ prenant trois valeurs conjuguées $T_h$, $T'_h$, $T''_h$ où

$$T'_h(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = T_h(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_1), \qquad T''_h(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = T_h(\zeta_0, \zeta_3, \zeta_1, \zeta_2).$$

En partant des expressions des $\vartheta$ en séries infinies on peut exprimer ces douze fonctions au moyen de quatre fonctions seulement

$$R, \quad R', \quad R'', \quad S,$$

les trois premières étant conjuguées et la quatrième symétrique. Ces expressions donnent toutes les relations identiques qui existent entre les douze fonctions T, en particulier la relation fondamentale de Jacobi

$$T_2 + T_3 = T'_2 + T'_3$$

et la relation fondamentale (à trois termes) de Weierstrass

$$T_1 + T'_1 + T''_1 = 0$$

dont il est question dans la Note précédente.

M. Kronecker introduit encore seize expressions, sous forme de séries quadruplement infinies, et qui sont des quadruples produits de fonctions $\vartheta$, au moyen desquelles peuvent en particulier s'exprimer les fonctions R, R', R'', S. Enfin il montre comment les formules fondamentales de Jacobi et de Weierstrass peuvent se déduire des représentations des fonctions $\vartheta$ en produits infinis.

*Hensel* (*K.*). — Théorie des pinceaux infiniment minces de rayons. (273-303).

Ce Mémoire a pour but de démontrer à nouveau et de généraliser les résultats obtenus par M. E. Kummer dans sa *Théorie générale des congruences de droites* (même Journal, t. LVII). Etant donné un rayon particulier L (rayon central) d'une congruence de droites, l'auteur envisage les rayons infiniment voisins; ces rayons forment un pinceau dont les propriétés sont étudiées en prenant pour point de départ la considération de deux formes différentielles quadratiques. Si $u$ et $v$ sont les paramètres de la congruence et si chaque rayon est défini par les coordonnées $(x, y, z)$ d'un de ses points et les cosinus directeurs $(\xi, \eta, \zeta)$, ces deux formes sont

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 \qquad \text{et} \qquad dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta;$$

en effectuant sur $du$ et $dv$ une substitution linéaire, on peut les réduire à des sommes de carrés; ce sont les deux combinaisons linéaires $p$ et $q$ de $du$ et $dv$ ainsi obtenues qui peuvent servir de coordonnées à un rayon $l$ infiniment voisin de L. M. Hensel arrive ainsi à la notion de rayons conjugués, diamétraux, opposés, développe la théorie du point central (*Mittelpunkt*) de L, de ses deux points limites et de ses deux points focaux. Les sections normales du pinceau lui permettent d'étudier la *densité* en chaque point de L; pour des pinceaux d'inclinaison uniforme, c'est-à-dire limités par des rayons également inclinés sur le rayon central, ces sections sont des ellipses ayant leurs axes parallèles. Enfin M. Hensel déduit de la théorie générale les propriétés des pinceaux de normales à une surface, pinceaux caractérisés par la condition que les points limites coïncident avec les points focaux.

*Schottky* (*F.*). — Sur la théorie des fonctions abéliennes de quatre variables. (304-352).

Ce Mémoire se divise en deux parties. Dans la première partie l'auteur introduit des notations fondées sur la théorie des caractéristiques. En partant de la définition de Weierstrass des fonctions $\Theta$ de $\rho$ arguments, on a une série de $4\rho$ fonctions dont chacune est caractérisée par $2\rho$ entiers $\delta_\alpha$, $\varepsilon_\alpha$, les $\rho$ premiers pouvant prendre les valeurs 0 et $-1$, les $\rho$ derniers les valeurs 0 et 1. Si à chacune de ces fonctions on donne un indice, on peut combiner ces indices, de manière que la combinaison d'un nombre impair de ces indices définisse sans ambiguïté l'indice d'une fonction $\Theta$ déterminée; mais on peut aussi considérer des combinaisons d'un nombre pair d'indices; elles définissent alors des demi-périodes; par exemple $lm$ désigne la demi-période qui transforme $\Theta l$ en $\Theta m$ (à un facteur exponentiel près); $lmn$ désigne la fonction $\Theta$ telle que

$$\frac{\Theta_l \Theta_m}{\Theta_n \Theta_{lmn}}$$

soit une fonction abélienne et ainsi de suite.

L'auteur considère ensuite les groupes de demi-périodes de 1, 2, ..., $\nu$ dimensions, un groupe de $\nu$ dimensions étant formé de $2^\nu$ demi-périodes, dont la période 0, et qui peuvent être représentées au moyen de $\nu$ d'entre elles. A ces groupes correspondent des fonctions de $\nu$ dimensions dont chacune est le pro-

duit d'une fonction $\Theta$ par les $2^{\nu-1}$ autres fonctions qui s'en déduisent au moyen des demi-périodes du groupe. Parmi ces fonctions, celles dont les facteurs sont tous des fonctions impaires ou tous des fonctions paires jouent un rôle particulier; l'auteur les appelle respectivement *fonctions de première* et *de deuxième espèce.*

Passant dans la deuxième partie, aux fonctions abéliennes de quatre variables, l'auteur remarque qu'elles ont, dans le cas général, dix modules de périodicité indépendants, alors que les courbes algébriques de genre quatre ne dépendent que de neuf modules; il faut donc que les dix modules de périodicité des fonctions abéliennes auxquelles elles donnent naissance soient liés par une relation. L'auteur cherche une propriété caractéristique de ces fonctions particulières, et il la trouve dans l'existence d'une relation non identique entre les valeurs initiales (c'est-à-dire correspondant aux valeurs zéro des variables) des fonctions $\Theta$ paires. Il y est conduit par cette remarque que, dans la théorie spéciale dont il s'agit, il est possible pour les valeurs des variables assujetties à certaines restrictions, de représenter tous les quotients de fonctions $\Theta$ impaires comme des fonctions symétriques et décomposables de deux variables indépendantes. Cette remarque, jointe à l'existence générale d'un système d'équations quadratiques homogènes entre les fonctions $\Theta$ impaires, le conduit au résultat énoncé plus haut.

## Tome CIII (année 1888).

*August* (*F.*). — Sur la surface de révolution de moindre résistance et sur la meilleure forme à donner aux pointes des projectiles d'après la théorie de Newton. (1-24).

D'après l'hypothèse de Newton, un élément de surface $df$ d'un projectile mobile dans l'air éprouve de la part de celui-ci une résistance normale de la forme $W_0 df \cos^2\tau$, où $W_0$ est une constante ne dépendant que de la vitesse et $\tau$ l'angle de la normale à l'élément de surface avec la direction du mouvement. Si l'on considère en particulier une surface de révolution se déplaçant dans le sens de son axe et si l'on se donne deux parallèles de cette surface, on peut chercher la forme qu'il convient de donner à la méridienne pour que la zone située entre ces deux parallèles éprouve la moindre résistance possible. C'est une courbe déjà trouvée par Newton; malheureusement il n'en passe pas toujours une par deux points quelconques d'un plan méridien, en particulier si l'un de ces points est sur l'axe, cas qui importe seul dans la pratique. Mais l'auteur montre que, pour que la théorie de Newton s'applique, il faut supposer que la méridienne a sa convexité constamment tournée du côté du mouvement; alors il y a toujours un minimum; la méridienne se compose d'une partie rectiligne perpendiculaire à l'axe et d'un arc de la courbe minima de Newton. M. August compare, au point de vue de la résistance, cette forme de la pointe des projectiles à d'autres formes quelquefois adoptées.

*Knoblauch* (*J.*). — Sur les quantités fondamentales de la théorie des surfaces. (25-39).

*Knoblauch* (*J.*). — Sur la condition d'isothermie des lignes de courbure. (40-43).

Après avoir rappelé les expressions différentielles du premier et du second ordre introduites par Gauss dans la théorie des surfaces, M. Knoblauch introduit, dans son premier Mémoire, quatre expressions du troisième ordre P, Q, R, S coefficients de la forme cubique.

$$ds^2 d\frac{1}{\rho} = P\,du^3 + 3Q\,du^2\,dv + 3R\,du\,dv^2 + S\,dv^3,$$

où $\frac{1}{\rho}$ désigne la courbure de la section normale dont la tangente est définie par $\frac{dv}{du}$. Cette forme égalée à zéro donne les sections normales ayant au point $(u, v)$ un contact du troisième ordre avec leur cercle osculateur, sections normales déjà considérées par de la Gournerie. Ces quatre coefficients peuvent être obtenus par un système très remarquable d'équations linéaires pour lesquelles les coefficients des inconnues sont les expressions de Gauss et les seconds membres les dérivées partielles de la courbure moyenne et de la courbure totale. L'auteur donne en outre une interprétation géométrique du covariant quadratique de la forme cubique au moyen de la courbure $\frac{1}{\rho}$ et des courbures principales $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\rho_2}$.

Dans le second Mémoire, M. Knoblauch donne également une interprétation géométrique de la forme différentielle linéaire dont l'intégrabilité exprime que la surface est isotherme; cette forme est

$$\frac{1+n}{1-n}\,\frac{dH}{\sqrt{H^2-4K}},$$

où H désigne la courbure moyenne, K la courbure totale, $n$ le rapport anharmonique des deux tangentes asymptotiques, de la tangente à la courbe H = const. et de la tangente $\frac{dv}{du}$.

*Kötter* (*Fritz*). — Application des fonctions abéliennes à un problème de la statique des surfaces flexibles inextensibles. (44-74).

Le problème dont il s'agit est le suivant : On considère une portion de surface matérielle homogène flexible et inextensible ayant la forme d'un secteur plan limité par un arc d'ellipse et les deux rayons issus du centre qui aboutissent aux extrémités de cet arc; on fixe alors ces deux rayons d'une manière arbitraire dans l'espace; on demande la figure d'équilibre que prendra la membrane sous l'influence de la pesanteur. Cette figure sera une portion de cône dont il suffit de connaître la courbe périphérique. Après avoir établi l'équation différentielle de cette courbe, l'auteur, au moyen d'assez nombreuses transformations, est ramené à des intégrales de fonctions algébriques attachées à une certaine courbe du quatrième degré et de genre 3. En prenant pour variable indépendante la projection sur le plan horizontal de l'aire du cône comprise entre une génératrice variable et une des génératrices limites, les coordonnées d'un

point de l'ellipse limite et du point correspondant de la périphérie du cône dans l'espace s'expriment au moyen de fonctions $\Theta$ de trois arguments, mais qui, ici, se réduisent à des fonctions $\Theta$ de deux arguments dont l'un a une valeur constante.

## Sujet de concours du prix de la Société Jablonowski de Leipzig pour l'année 1889. (75-76).

## *Scheibner* (*W.*). — Sur une formule de transformation des intégrales doubles. (77-83).

En partant de deux relations quadrilinéaires en $x, y, w, z$, l'auteur montre qu'on peut transformer l'une dans l'autre deux intégrales doubles de la forme

$$\int \frac{dx\,dy}{R(x, y)}, \qquad \int \frac{dw\,dz}{S(w, z)},$$

R et S étant des polynomes du quatrième degré par rapport à chacun de leurs arguments. L'auteur étend ensuite aux intégrales doubles la notion d'intégrale indéfinie et d'intégrale curviligne, cette dernière lorsque la fonction sous le signe $\int$ est une fonction analytique de deux variables complexes.

## *Pincherle* (*S.*). — Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires. (84-86).

Il s'agit de certaines équations linéaires dont les coefficients sont des polynomes à coefficients entiers; les coefficients des séries intégrales sont des nombres algébriques satisfaisant à certaines propriétés arithmétiques.

## *Heymann* (*Woldemar*). — Remarques sur certaines intégrales elliptiques. (87-88).

Il s'agit de la décomposition en ses parties réelle et imaginaire de l'intégrale elliptique de première espèce à module imaginaire.

## *Schafheitlin* (*Paul*). — Sur la représentation, par des intégrales définies, de la série hypergéométrique généralisée. (89-97).

L'auteur considère l'intégrale définie

$$y(x) = \int_g^h \psi(v)\,\varphi(vx)\,dv,$$

où $g$ et $h$ sont indépendants de $x$, et où les fonctions $\varphi$ et $\psi$ sont définies par les équations différentielles

$$(1) \qquad \sum_{p=0}^{n-1} v^{p-1}(a_p v - b_p)\,\frac{d^p\varphi(v)}{dv^p} = 0 \qquad (b_0 = 0),$$

$$(2) \qquad v(v-1)\,\frac{d\psi(v)}{dv} - (\tau v - \sigma)\,\psi(v) = 0;$$

la fonction $y$ satisfait alors à une équation différentielle d'ordre $n$ analogue à (1). L'auteur montre comment cette manière d'introduire la série hypergéométrique généralisée se rattache aux méthodes de M. Goursat et de M. Pochhammer.

## *Meyer* (*A.*). — Sur un théorème de Dirichlet. (98-117).

D'après Dirichlet, « non seulement toute forme quadratique renferme une infinité de nombres premiers, mais encore elle en contient qui sont d'une forme linéaire quelconque compatible avec la forme quadratique donnée ». La première partie de cette proposition a été démontrée par Dirichlet lui-même dans un cas particulier, et par M. H. Weber dans le cas général; M. Meyer en démontre la deuxième partie; d'une manière plus précise, il prouve le théorème suivant :

*Toute forme quadratique propre binaire primitive* $ax^2 + 2bxy + cy^2$, *dont le déterminant* $D = b^2 - ac$ *n'est pas un carré, représente une infinité de nombres premiers contenus en même temps dans une forme linéaire positive* $Mx + N$ *donnée compatible avec les caractères du genre de cette forme quadratique.*

La démonstration repose sur les propriétés de séries arithmétiques analogues à la série $\zeta(s)$, spécialement au voisinage de $s = 1$.

## *Busche* (*E.*). — Sur les parties entières. (118-125).

En désignant respectivement par $[a]$ et $[a]'$ le plus petit entier supérieur à $a - 1$ et le plus grand entier inférieur à $a$, l'auteur démontre la formule

$$\sum_{x=[a]'+1}^{x=[b]'} F\{[f_{21}(x)], x\} = \sum_{y=[f_{21}(a)]}^{y=[f_{21}(b)]} \sum_{\xi_y=[f_{12}(y)]'+1}^{\xi_y=[f_{12}(y+1)]'} F(y, \xi_y),$$

où F désigne une fonction quelconque, $f_{21}(x)$ une fonction réelle finie, continue et croissante de $x = a$ jusqu'à $x = b$, $f_{21}(y)$ la fonction inverse. L'auteur déduit de là plusieurs autres formules intéressantes et, en particulier, une démonstration simple de la loi de réciprocité des résidus quadratiques.

## *Lerch* (*Mathias*). — Sur certaines fonctions dépourvues de dérivées. (126-138).

Parmi les séries de la forme

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cos a_\nu \pi x,$$

où les $a_\nu$ sont des entiers positifs tels qu'il existe une suite infinie d'entiers distincts $b_1, b_2, \ldots$, pour lesquels les quotients $\frac{a_{\nu+r}}{b_\nu}$ $(x = 1, 2, \ldots)$ sont entiers, et où les $c_\nu$ sont les termes d'une série absolument convergente, il y en a une infinité qui n'admettent de dérivée pour aucune valeur de $x$ de la forme $\frac{a}{b_n}$ ($a$ étant un nombre entier). De même, si $p_0, p_1, p_2, \ldots$ sont des entiers impairs

non situés au-dessous d'une limite fixe, et si $r$ est une quantité positive $> 1$, la série

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{\nu}}{a_{\nu}} \cos a_{\nu} \pi x \qquad (a_{\nu} = p_0, p_1, \ldots, p_{\nu})$$

représente une fonction qui n'admet de dérivée pour aucune valeur de $x$. L'auteur termine par des exemples de séries qui admettent des dérivées de tous les ordres, mais n'admettent pas de développement de Taylor.

*Frobenius* (*G.*). — Sur les covariants jacobiens des systèmes de coniques quadruplement tangentes à une courbe du quatrième ordre. (139-183).

Aux 63 systèmes de coniques quadruplement tangentes à une courbe du quatrième ordre, Steiner (*Journal de Crelle*, t. 49) a fait correspondre 63 covariants du troisième ordre qui sont des covariants irrationnels de la courbe. L'auteur se propose d'étudier les relations mutuelles de ces systèmes de coniques et de ces covariants. Il reprend d'abord rapidement les résultats exposés dans ce même journal (t. 99) sur les relations entre les 28 tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre; il part de l'existence, dont la possibilité a été préalablement démontrée, de 28 fonctions linéaires

$$x_{\alpha\beta} = x_{\beta\alpha} \qquad (\alpha \neq \beta;\ \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 7)$$

satisfaisant aux identités

$$\sum_{\lambda} x_{\alpha\lambda} y_{\beta\lambda} = 0,$$

où les $y_{\alpha\beta}$ se déduisent des $x_{\alpha\beta}$, en remplaçant les coordonnées d'un point du plan par les coordonnées d'un autre point indépendant. Il complète ensuite (§§ 6 et 7) la théorie de Hesse des 36 manières dont on peut faire correspondre les 28 tangentes doubles aux lignes de jonction de huit points de l'espace et du passage de l'une de ces représentations aux 35 autres. Après ces préliminaires, il passe (§ 8) à la recherche des relations qui existent entre les 63 covariants $G^3$ déjà définis. Comme applications, il étudie (§ 9) les 5040 systèmes de six tangentes doubles dont les points de contact sont sur une cubique et qui forment un hexagone de Pascal et (§ 10) les 1008 systèmes de six tangentes doubles dont les points de contact sont sur une cubique et qui forment un hexagone de Brianchon. Il en déduit (§ 12) des relations remarquables entre les covariants $G^3$ et les fonctions racines et leurs différentielles. Enfin (§§ 13 et 14), il considère quelques covariants du troisième et du quatrième degré qui sont dans un rapport étroit avec les covariants $G^3$.

*Weingarten* (*J.*). — Sur une propriété des surfaces pour lesquelles un rayon de courbure principal est fonction de l'autre. (184).

L'auteur donne une démonstration élégante du théorème dû à Lie que les lignes de courbure de ces surfaces se déterminent par des quadratures.

*Schottky* (*F.*). — Sur des fonctions abéliennes spéciales de genre quatre. (185-203).

Si l'on considère quatre intégrales indépendantes de première espèce, attachées à une équation non hyperelliptique de genre 4, il existe entre leurs dérivées deux relations homogènes, l'une du second, l'autre du troisième degré. L'auteur se propose d'étudier le cas particulier où le discriminant de la première de ces relations est nul; M. Weber a montré que, dans ce cas, parmi les fonctions $\Theta$ correspondantes, il en existe une, *paire*, s'annulant en même temps que les arguments. M. Schottky arrive à cette conclusion que la courbe algébrique de genre 4 peut être supposée du neuvième degré avec huit points triples. Les deux relations homogènes qui existent entre les quatre polynomes adjoints du sixième degré X, Y, Z, U peuvent être regardées comme définissant une courbe gauche du sixième ordre. Les premiers membres des équations des 120 plans tangents triples à cette courbe gauche s'introduisent naturellement dans la théorie des fonctions $\Theta$ correspondantes.

*Bois-Reymond* (*P. du*). — Remarques sur $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. (204-209).

L'auteur s'occupe de la détermination d'une fonction $z$ continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur d'une aire limitée par un contour simple avec des conditions aux limites données sur ce contour. Il traite spécialement le cas où le contour est un cercle. Après avoir donné, pour ce contour, la forme de la fonction de Green qui se réduit sur le cercle à $\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, où $x, y$ sont les coordonnées d'un point du cercle, $\xi$, $\eta$ celles d'un point intérieur, du Bois-Reymond passe à la détermination de la fonction $z$ par les valeurs données sur le contour au moyen de l'intégrale curviligne

$$2\pi z = \int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) \frac{1-\varepsilon^2}{1-2\varepsilon\cos(\Theta-\alpha)+\varepsilon^2},$$

il montre que la fonction $f(\alpha)$ qui représente les valeurs de $z$ sur le cercle n'a besoin que d'être intégrable; il étudie dans quels cas la dérivée suivant la normale de la fonction $z$ ainsi déterminée peut devenir infinie. Enfin il s'occupe du cas où l'on se donnerait $\frac{\partial z}{\partial N}$ le long du cercle.

*Hensel* (*K.*). — Sur la représentation des nombres d'un domaine de rationalité pour un diviseur premier quelconque. (230-237).

Étant donné un diviseur premier quelconque P du nombre premier réel $p$, on considère l'ensemble des nombres qui s'expriment rationnellement (mod P) au moyen d'un certain nombre algébrique entier. Chacun d'eux, $w$, est la racine d'une congruence d'un degré déterminé $\varkappa$ (mod $p$). L'auteur démontre qu'il existe toujours un de ces nombres, appelé *nombre fondamental*, tel que

$$w, \quad w^p, \quad \ldots, \quad w^{p^{\varkappa-1}}$$

déterminent un système fondamental pour le domaine considéré. Il en déduit un nouveau procédé pour déterminer le nombre de ces nombres.

*Hamburger.* — Sur une classe spéciale d'équations différentielles linéaires. (238-273).

Il s'agit des équations différentielles linéaires et homogènes n'admettant que deux points singuliers $x = 0$ et $x = \infty$. Soit

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1}\left(a_1 + \frac{b_1}{x} + \ldots\right)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \left(a_n + \frac{b_n}{x} + \ldots\right) y = 0,$$

dont toutes les intégrales soient régulières au voisinage de $x = \infty$ et qui admettent une intégrale du type de celles étudiées par Cayley (t. C du même Journal) telle que

$$y = x^{A} e^{\frac{A_m}{x^m} + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x}} (B_0 + B_1 x + \ldots),$$

la série entre parenthèses étant convergente. L'auteur se borne au cas général où l'équation déterminante pour $x = \infty$ n'admet que des racines distinctes telles que d'eux d'entre elles ne diffèrent pas d'un nombre entier. Il montre alors que la série $B_0 + B_1 x + \ldots$ est limitée, que A est de la forme $\rho - k$, $\rho$ étant une des racines de l'équation déterminante et $k$ le degré du polynome précédent. Il montre comment on peut trouver les coefficients $A_1, \ldots, A_m$, A, $B_0$, $B_1$, ..., dans le cas où le problème est possible; outre les conditions déjà énoncées, il faut et il suffit que $m(n-1) - 1$ relations supplémentaires soient réalisées.

*Königsberger* (*Léo*). — Sur les relations algébriques qui peuvent exister, pour une équation différentielle linéaire et homogène, entre les intégrales fondamentales et leurs dérivées. (274-320).

Si pour une équation différentielle de la forme indiquée il existe une relation algébrique entre trois intégrales fondamentales et leurs dérivées et si l'on considère l'équation du second ordre mise sous sa forme réduite qu'on en déduit à l'aide d'une intégrale particulière de l'équation donnée, il doit exister entre deux de ses intégrales fondamentales et leurs dérivées une relation algébrique lorsqu'on adjoint l'intégrale auxiliaire de l'équation donnée, ses dérivées et la fonction exponentielle dont l'exposant est représenté par la quadrature effectuée sur le premier coefficient de l'équation donnée. Pour cela cette équation du second ordre doit être réductible, et alors, ou bien elle a une intégrale algébrique, ou bien deux de ses intégrales fondamentales, et deux seulement, satisfont à des équations du premier ordre, ou bien enfin toutes ses intégrales satisfont à des équations de cette nature.

*Netto* (*Eugen*). — Recherches sur la théorie des groupes de substitutions. (321-336).

L'auteur donne des relations remarquables entre l'ordre d'un groupe et le nombre des substitutions de ce groupe qui contiennent un nombre donné de cycles d'ordre donné. Il s'occupe également des groupes dont l'ordre est une

puissance d'un nombre premier, spécialement au point de vue de leur imprimitivité et de leurs sous-groupes.

*Hilbert* (*David*). — Sur le discriminant de la série hypergéométrique limitée. (337-345).

L'auteur donne l'expression de ce discriminant et applique ce résultat à la recherche du nombre des racines réelles du polynome formé par la série limitée.

*Thomé* (*L.-W.*). — Remarque sur la théorie des équations différentielles linéaires. (346-347).

Il s'agit d'un Mémoire de M. Poincaré sur les intégrales irrégulières des équations linéaires et d'une discussion à laquelle il a donné lieu entre M. Poincaré et M. Thomé.

Tome CIV (année 1889).

*Thomé* (*L.-W.*). — Sur une application de la théorie des équations différentielles linéaires aux fonctions algébriques. (1-31).

Étant donnée une équation algébrique entière en $s$ et $x$, de degré $n$ par rapport à $s$, l'auteur montre qu'il existe toujours une équation différentielle linéaire et homogène à coefficients rationnels d'ordre $\rho$ admettant pour intégrales les $\rho$ branches linéairement indépendantes de la fonction $s$ de $x$. L'auteur montre comment se comporte cette équation différentielle en chaque point critique de cette fonction $s$ et comment on peut se servir de cette équation différentielle pour séparer en chacun de ces points les différents développements de la fonction $s$.

*Busche* (*E.*). — Sur l'application de la Géométrie à la théorie des nombres. (32-37).

L'auteur considère différentes représentations géométriques des nombres entiers réels ou imaginaires qui le conduisent à des théorèmes intéressants sur le nombre des diviseurs de ces entiers satisfaisant à certaines conditions.

*Stahl* (*Wilhelm*). — Sur les involutions fondamentales sur les courbes unicursales. (38-61).

Il s'agit des involutions d'ordre $n$ et de dimensions $n-p-1$ découvertes par Brill sur les courbes unicursales d'ordre $n$ dans un espace à $p$ dimensions; si $2p$ est supérieur ou égal à $n-1$, il existe une multiplicité à $n-p-1$ dimensions, covariante à la courbe et d'ordre $2p-n+2$; si $n-p$ est égal à 2, il existe un faisceau de faisceaux de multiplicités du second ordre à $p-1$ dimensions, également covariant à la courbe.

L'auteur étudie les cas particuliers des courbes planes unicursales du troisième au cinquième ordre et des courbes gauches unicursales du quatrième au

septième ordre. Il part de la théorie des osculantes des courbes unicursales. Il arrive à des résultats spécialement intéressants pour la courbe gauche du cinquième ordre à laquelle sont covariants une cubique gauche et un faisceau de faisceaux de quadriques par rapport auxquelles la cubique est la polaire réciproque des deuxièmes osculantes mixtes de la courbe donnée.

*Schroeter* (*H.*). — Réduction des définitions données par Grassmann des courbes du troisième ordre aux générations de ces courbes indiquées par Chasles, Cayley et Hesse. (62-84).

La génération de Chasles consiste à regarder une cubique comme le lieu des points d'intersection des coniques homologues de deux faisceaux homographiques de coniques; dans celle de Cayley-Hesse, on regarde la cubique comme le lieu d'un point tel que les droites menées de ce point à six points donnés forment un faisceau en involution. A ces générations l'auteur ramène les trois principales indiquées par Grassmann (même Journal, t. XXXVI) : dans la première, le point $x$ de la cubique est le sommet commun de deux triangles qui ont un côté latéral commun, les deux autres côtés latéraux et les deux bases passant par des points fixes, les sommets autres que $x$ décrivant des droites fixes; dans la deuxième, le point $x$ de la cubique est sommet d'un quadrilatère dont les quatre côtés et la diagonale issue de $x$ passent par des points fixes, les sommets adjacents à $x$ décrivant des droites fixes; dans la troisième, la cubique est le lieu d'un point dont les droites de jonction à trois points donnés coupent trois droites données en trois points en ligne droite.

*Rudio* (*F.*). — Sur une surface particulière du quatrième ordre avec une conique double. (85-88).

Il s'agit de la surface de translation lieu des milieux des segments joignant deux points de l'ellipse et de l'hyperbole focales d'une quadrique donnée.

*Züge*. — Le potentiel des corps homogènes en forme d'anneaux, en particulier du tore. (89-101).

L'auteur considère les solides obtenus par la révolution d'une aire plane fermée autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas. Après avoir réduit le potentiel à deux intégrales dont l'une contient le potentiel de l'aire plane, il s'occupe du cas du tore : dans ses formules s'introduisent des intégrales elliptiques.

*Hatzidakis* (*J.-N.*). — Sur certains invariants différentiels. (102-115).

Étant données trois fonctions $x$, $y$, $z$ d'une variable et une quantité $\omega$ fonction également arbitraire de cette variable, l'auteur cherche toutes les fonctions de $x$, $y$, $z$ et de leur dérivés jusqu'à l'ordre $n$ qui se reproduisent à une puissance près de $\omega$, par la substitution

$$dX = \omega\, dx, \qquad dY = \omega\, dy, \qquad dZ = \omega\, dz.$$

Pour chaque ordre $n$, il existe deux invariants élémentaires homogènes et de

degré $n$ et qui contiennent les dérivées du $n^{\text{ième}}$ ordre de $x$, $y$, $z$ au premier degré seulement.

*Pochhammer* (*L.*). — Sur trois équations différentielles linéaires du quatrième ordre. (116-151).

En partant d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre dans laquelle les coefficients de $y$, $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^4y}{dx^4}$ sont des polynomes respectivement de degré 0, 1, ..., 4, l'auteur cherche à y satisfaire par une intégrale définie

$$y = \int_g^h (w - x)^{-\delta} \mathfrak{W}\, dw;$$

il est conduit pour $\mathfrak{W}$ à une équation différentielle linéaire du troisième ordre; c'est en spécialisant cette équation qu'il arrive aux équations du quatrième ordre dont il s'agit. Il cherche d'abord à ramener l'équation en $\mathfrak{W}$ à l'équation de la série hypergéométrique du troisième ordre avec deux points singuliers à distance finie, au moyen de la substitution

$$\mathfrak{W} = (w - 1)^p \mathrm{W};$$

il cherche ensuite à la ramener à l'équation différentielle de la série hypergéométrique du troisième ordre avec trois points singuliers à distance finie, au moyen de la substitution

$$\mathfrak{W} = w^p \mathrm{W};$$

enfin il étudie le cas où l'équation en $\mathfrak{W}$ n'est que du second ordre et où elle se ramène à l'équation de la série hypergéométrique de Gauss au moyen de la substitution

$$\mathfrak{W} = w^p (w - 1)^q \mathrm{W}.$$

Dans chacun de ces trois cas, l'équation primitive du quatrième ordre est intégrée par des intégrales définies, et au voisinage de chaque point singulier l'auteur indique par quelles intégrales définies sont représentées les intégrales régulières.

*Pochhammer* (*L.*). — Sur une classe de fonctions d'une variable complexe qui ont la forme d'intégrales définies. (152-173).

Dans ce Mémoire, qui se rattache au précédent et le complète, l'auteur étudie d'abord l'intégrale définie

$$\mathrm{S}(x) = \int_g^h (w - x)^\lambda f(w)\, dw,$$

où $g$, $h$, $\lambda$ sont des constantes, $f(w)$ une fonction analytique non nécessairement uniforme de la variable complexe $w$, avec un chemin d'intégration donné. Cette intégrale définie est une fonction de la variable complexe $x$ dont l'auteur étudie les propriétés; elle est uniforme à l'extérieur d'une aire quelconque entourant le chemin d'intégration, à condition de ne pas faire franchir à la variable une coupure partant d'un point du contour de cette aire et s'étendant à l'infini. L'auteur étudie les modifications que subit $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x$ décrit

un contour fermé entourant l'un des points $g$ ou $h$ ou coupant le chemin d'intégration. Il considère ensuite l'intégrale définie analogue

$$T(x) = \int_g^x (w - x)^\lambda f(w)\, dw$$

et étend l'étude au cas où la fonction $f(w)$ est elle-même donnée comme une intégrale définie de la même nature; de sorte que, dans le cas général, on a des fonctions de la variable complexe $x$ définies par des intégrales multiples.

*Königsberger* (*Leo*). — Le théorème de Cauchy sur l'existence des intégrales d'une équation différentielle. (174-176).

L'auteur se sert de l'équation auxiliaire

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{M(1 + 2\xi + 3\xi^2 + \ldots)}{(1 - \eta)^m}$$

qui lui fournit une fonction majorante.

*Jaerisch* (*Paul*). — Intégration générale des équations de l'élasticité pour les vibrations et l'équilibre des corps de révolution isotropes. (177-210).

L'auteur applique les équations données par Lamé pour un système quelconque de coordonnées orthogonales en prenant un système triple orthogonal formé des plans méridiens et de deux familles orthogonales de surfaces de révolution autour du même axe. Il arrive à réduire à des équations différentielles ordinaires le système d'équations aux dérivées partielles à intégrer en prenant pour les composantes de la vibration, ainsi que pour certaines quantités auxiliaires A, B, C, des expressions dépendant de certaines fonctions indéterminées, de manière à satisfaire en partie aux équations aux dérivées partielles. Il arrive ainsi à un théorème général valable pour tous les corps de révolution, mais qui n'avait été démontré jusqu'alors que pour l'équilibre, à savoir que l'intégration du système d'équations aux dérivées partielles des corps de révolution élastiques isotropes se ramène à la résolution de l'équation $\Delta^2 u + \alpha^2 u = 0$ qui, dans le cas de l'équilibre, n'est autre que l'équation potentielle ($\alpha = 0$).

*Reye* (*Th.*). — Sur les systèmes linéaires de faisceaux de plans projectifs et de gerbes de plans ou d'espaces collinéaires. I. (211-240).

De même que les points, les droites et les plans peuvent s'ordonner de manière à engendrer les six formes fondamentales de la Géométrie de position : ponctuelles, faisceaux de rayons et faisceaux de plans, systèmes plans, gerbes et espaces, de même les formes fondamentales projectives de même nature peuvent s'ordonner de manière à engendrer des systèmes linéaires infinis de différentes espèces; par exemple, le système linéaire des faisceaux projectifs de

rayons qui engendrent deux à deux une conique donnée, le système linéaire des ponctuelles projectives qui engendrent une surface réglée du second ordre. D'une manière générale, un système linéaire $n$ fois infini (de $n^{\text{ième}}$ espèce) $|M_n|$ est déterminé par $n+1$ formes fondamentales projectives, et il contient tous les systèmes linéaires engendrés par 2, 3, ..., $n$ de ces formes; en particulier, $i$ quelconques de ces systèmes $|M_{n-1}|$ ont en commun un système $|M_{n-i}|$.

Il est très remarquable que ces systèmes linéaires se groupent toujours par couples de manière en somme à engendrer la même forme, par exemple les deux systèmes de ponctuelles projectives qui engendrent un hyperboloïde à une nappe donné. D'une manière générale, on conviendra de dire que *deux systèmes linéaires de formes fondamentales projectives ont même support lorsque les formes fondamentales de l'un sont formées des éléments homologues des formes fondamentales de l'autre.*

Dans ce premier Mémoire, l'auteur étudie successivement, à ce point de vue, les systèmes linéaires de faisceaux de plans projectifs et de gerbes de plans ou d'espaces collinéaires; d'abord les deux systèmes $|u_1|$ de faisceaux de plans projectifs qui engendrent une même surface réglée du second ordre et qui ont naturellement même support; puis la congruence linéaire $|u_2|$, définie par trois faisceaux de plans projectifs à laquelle est associé un système $|S_1|$ de gerbes de plans collinéaires ayant même support; les $\infty^2$ faisceaux de la congruence engendrent trois par trois la même cubique gauche et admettent pour axes les cordes de cette cubique, la congruence de ces cordes est projetée des différents points de la courbe suivant les gerbes de plans du système $|S_1|$.

Quatre faisceaux projectifs de plans définissent un *complexe* linéaire $|u_3|$, et les plans homologues des faisceaux de ce complexe définissent un faisceau $|\Sigma_1|$ d'espaces collinéaires ayant même support. Les axes des différents faisceaux de $|u_3|$, ainsi que les droites d'intersection des plans homologues des deux espaces de $|\Sigma_1|$ engendrent un complexe quadratique de droites qui n'est autre qu'un complexe *tétraédral*.

Trois gerbes collinéaires définissent une congruence linéaire ou *réseau* (*Netz*) $|S_2|$; trois gerbes quelconques de ce réseau engendrent la même surface $F^3$ du troisième ordre; si l'on considère trois faisceaux de plans homologues de ces trois gerbes, ils engendrent une cubique située sur $F^3$, et il leur correspond un faisceau de gerbes collinéaires; tous ces faisceaux appartiennent à un second réseau $|P_2|$ de gerbes collinéaires ayant même support que $|S_2|$ et engendrant la même surface $F^3$; on a ainsi sur cette surface deux réseaux de cubiques.

Trois espaces collinéaires définissent une gerbe d'espaces $|\Sigma_2|$; les plans homologues des $\infty^2$ espaces de $|\Sigma_2|$ forment un complexe linéaire $|S_3|$ de $\infty^3$ gerbes de plans ayant même support. A ces deux systèmes linéaires est associée une certaine courbe gauche du sixième ordre $c^6$ (*Kerncurve*) contenue dans toutes les surfaces $F^3$ engendrées par les congruences linéaires de gerbes appartenant à $|S_3|$.

Enfin quatre espaces collinéaires définissent un système linéaire $|\Sigma_3|$ auquel est associé un autre système linéaire d'espaces $|T_3|$. Le lieu d'un point où se coupent des plans homologues de tous les espaces de $|\Sigma_3|$ est une surface du quatrième ordre $F^4$ (*Kernfläche*).

Dans chacun des cas qui viennent d'être énumérés, l'auteur étudie les principales singularités qui peuvent se présenter, et dans le détail desquelles il nous est impossible d'entrer.

*Bois-Reymond* (*P. du*). — Sur les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre. (241-301).

Ce Mémoire est en somme un résumé de ce que devait contenir le deuxième cahier des *Contributions à l'interprétation des équations aux dérivées partielles* du même auteur. Dans le premier Chapitre il considère l'équation

$$F(z) = Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = 0,$$

introduit les caractéristiques et étudie leurs propriétés relativement à la détermination de l'intégrale par les conditions de Cauchy. Dans le Chapitre II, il définit l'équation au multiplicateur $\Phi(\zeta) = 0$, qui est encore linéaire et du second ordre. Dans le Chapitre III, cette équation au multiplicateur lui permet d'introduire une expression différentielle $U\,dx + V\,dy$ par la relation

$$\int \zeta F(z)\,dx\,dy = \int z\Phi(\zeta)\,dx\,dy + \int (U\,dx + V\,dy);$$

cette expression est différentielle exacte si $z$ et $\zeta$ sont respectivement solutions des deux équations du second ordre correspondantes; U et V dépendent de $z$, $\zeta$ et de leurs dérivées du premier ordre ainsi que d'une fonction arbitraire $\Theta$. Le long d'une caractéristique de $F(z) = 0$, on peut faire disparaître de l'expression $U\,dx + V\,dy$ sous le signe $\int$ les dérivées de $z$.

Dans les Chapitres IV et V l'auteur s'occupe de la réduction de l'équation du second ordre suivant le signe de $S^2 - 4RT$. Dans le Chapitre VI et les suivants l'auteur ne s'occupe que des équations hyperboliques pour lesquelles on peut supposer les caractéristiques réduites à $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ Si l'on se donne, sur une portion de courbe qui n'est coupée qu'une fois au plus par toute caractéristique, les valeurs de $z$ et de ses dérivées du premier ordre, la fonction $z$ est déterminée dans l'intérieur du quadrilatère curviligne limité par les deux couples de caractéristiques issues des extrémités de la portion de courbe donnée. Ce théorème fondamental est déduit, au moyen d'un passage particulier à la limite, du lemme suivant : La fonction $z$ est définie à l'intérieur d'un quadrilatère limité par des segments de caractéristiques si ses valeurs sont données sur deux côtés adjacents de ce quadrilatère avec condition de continuité au sommet commun.

Dans le Chapitre VII l'auteur introduit ce qu'il appelle l'*intégrale fondamentale* (*Hauptintegral*), qui joue un rôle analogue à celui de la fonction de Green pour les équations elliptiques; c'est une fonction $f(X, Y; \alpha, \beta)$ de quatre arguments satisfaisant à l'équation donnée $F(z) = 0$ lorsqu'on la considère comme fonction de $\alpha$ et $\beta$. Elle est définie dans le rectangle dont les sommets opposés ont pour coordonnées X, Y et $\alpha$, $\beta$.

Dans le Chapitre VIII l'auteur applique l'intégrale fondamentale à la recherche de l'intégrale satisfaisant à certaines conditions aux limites, et il étudie quelques cas particuliers.

*Stahl* (*Wilhelm*). — Sur la courbe plane unicursale du quatrième ordre (*suite*) (même Journal, t. CI, p. 300). (302-320).

En partant de la conique K covariante à la courbe $R_4$, on peut faire un chan-

2ᵉ Partie



gement de coordonnées, de manière que l'équation de K devienne $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$ et que les coordonnées d'un point de $R_4$ soient les dérivées partielles du second ordre d'une forme binaire M, du sixième degré en $\lambda$, $\mu$. Le but de cette deuxième partie du Mémoire de M. Stahl est d'étudier l'interprétation géométrique des équations qu'on obtient en annulant M et ses divers covariants. En particulier $M = 0$ est l'équation des paramètres des six points de $R_4$ qui sont sur les tangentes correspondantes de K; le hessien de M égalé à zéro donne les huit points de $R_4$ qui se trouvent sur K ou encore les huit tangentes de $R_4$ qui passent par les points correspondants de K. Parmi beaucoup de résultats intéressants relevons celui-ci : la conique d'inflexion, la conique passant par les huit points de contact des tangentes doubles, la conique touchée par les six tangentes d'inflexion, la conique K et la conique N définies dans la première partie, appartiennent au même faisceau de coniques. Enfin l'auteur s'occupe du cas où la courbe $R_4$ a un point d'ondulation.

*Netto* (*E.*). — Application des systèmes de modules à une question élémentaire d'Algèbre. (321-340).

Si l'on considère le polynome dont les racines sont les racines communes à deux polynomes de degré $n$, les coefficients de ce polynome peuvent, après multiplication par le résultant des facteurs non communs des deux polynomes donnés, être mis sous forme de déterminants. Ces déterminants jouissent de certaines propriétés qui sont loin d'être évidentes si l'on ne se reporte pas à leur origine. L'auteur se propose d'appliquer la théorie des systèmes de modules de Kronecker à l'étude *a priori* de ces déterminants. Partant du déterminant $D_{2n}$ de degré $2n$, résultant des deux polynomes donnés, il arrive à des congruences auxquelles satisfont les mineurs de degré $2\varkappa$ de $D_{2n}$, les modules étant des mineurs de degré $2\varkappa + 2$.

*Lilienthal* (*R. von*). — Sur la théorie de la courbure des surfaces. (341-344).

L'auteur établit plusieurs théorèmes intéressants sur les sections normales d'une surface qui ont un contact du troisième ordre avec leurs cercles osculateurs.

*Genocchi* (*Angelo*). — Première partie du Chapitre XIII de la Note *Sur la théorie des résidus quadratiques*. (345-347).

C'est la reproduction d'un extrait de la Note *Sur la théorie des résidus quadratiques* publiée en 1853 par l'Académie Royale de Belgique (t. XXV des Mémoires couronnés).

*Kronecker* (*L.*). — Démonstration de la loi de réciprocité des résidus quadratiques. (348-351).

Cette démonstration se rattache à la Note précédente.

*Kronecker* (*L.*). — Notice nécrologique sur Paul du Bois-Reymond. (352-354).

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XXVIII; 1900.

*Goursat* (*Ed.*). — Sur une transformation de l'équation

$$s^2 = 4\lambda(x, y)pq.$$

(1-6).

L'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 4\lambda(x, y)\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

est ramenée, si l'on pose

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = z^2,$$

ainsi que M. Goursat l'a déjà fait voir (même Recueil, 1897), à l'équation linéaire

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \lambda z = 0.$$

Cette équation jouit d'une propriété remarquable. Si l'on forme, en partant de cette équation (E), la suite de Laplace

$$\ldots, (E_{-i}), \ldots, (E_{-1}), (E), (E_1), \ldots, (E_i), (E_{i+1}), \ldots,$$

on reconnaît que les équations $(E_{i+1})$ et $(E_{-i})$ ont les mêmes invariants, disposés dans l'ordre inverse.

On est ainsi conduit à la rapprocher des équations à invariants égaux; il existe en effet, pour l'équation (2), un théorème analogue à celui de Moutard sur les équations à invariants égaux.

Si $\theta_1$ est une intégrale particulière de l'équation (1), que l'on écrit

$$\mathcal{F}(\theta) = \lambda(x, y),$$

à cette solution correspond une valeur parfaitement déterminée de $\lambda$, savoir

$$\lambda = \mathcal{F}(\theta_1).$$

Cette valeur, portée dans l'équation (2), donne une équation que M. Goursat représente par $E(z, \theta_1)$. Cela posé, il démontre que :

De toute intégrale de l'équation $E(z, \theta_1)$ on peut déduire, par une quadrature, une intégrale de l'équation de même forme $E\left(z, \frac{1}{\theta_1}\right)$.

Ce qui revient à dire que :

De toute intégrale de l'équation $\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}(\theta_1)$ on peut déduire, par des

quadratures, une intégrale de l'équation

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\theta_1}\right).$$

Cette proposition permet de déduire de toute équation intégrable, appartenant à ce type, une suite indéfinie d'équations intégrables de la même espèce.

## *Maillet* (*Edm.*). — Sur les groupes échangeables et les groupes décomposables (7-16).

Dans une *Note sur les substitutions* (même Recueil, 1896) l'auteur a appelé un groupe D *décomposable* quand on peut y trouver deux sous-groupes A et B d'ordre $> 1$, tous deux $<$ D et tels que toute substitution $d$ de D soit le produit d'une substitution $a$ de A par une $b$ de B.

Sans rechercher un critérium de *décomposabilité,* M. Maillet étudie un certain nombre de propriétés de la décomposabilité de certains groupes; 1° groupes primitifs composés; 2° groupes composés quelconques; 3° groupes d'ordre $p^m q^n$ ($p$ et $q$ premiers différents); 4° groupes de degré $p^m$ ($p$ premier) et d'ordre $\neq p^n$; 5° groupes d'ordre $4h + 2$; 6° groupe alterné G de $n$ éléments; 7° groupe symétrique de $n$ éléments.

Il résulte de cette étude que :

L'ensemble des groupes décomposables est plus étendu que l'ensemble des groupes primitifs composés, puisque tout groupe primitif composé est décomposable et que les groupes alternés sont décomposables.

Les seuls groupes indécomposables que l'auteur ait rencontrés sont les groupes formés des puissances d'une substitution circulaire d'ordre $p^m$ ($p$ premier).

## *Picard* (*Ém.*). — Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres (17-25).

Les cas de représentation paramétrique d'une surface algébrique par des fonctions uniformes de deux variables ne sont pas nombreux : en dehors des surfaces unicursales et des surfaces hyperelliptiques (avec leurs dégénérescences), on ne peut guère citer que les surfaces hyperfuchsiennes et les surfaces hyperabéliennes.

M. Picard démontre un théorème qui pourrait conduire à de nouvelles surfaces jouissant de la même propriété.

Soit une surface algébrique

$$F(x, y, z) = 0$$

admettant une transformation rationnelle en elle-même

$$X = R_1(x, y, z), \qquad Y = R_2(x, y, z), \qquad Z = R_3(x, y, z);$$

on suppose que cette transformation admette comme point *double* le point $x = y = z = 0$, point *simple* par hypothèse de la surface. On cherche des

fonctions *uniformes* $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, telles qu'on ait identiquement

$$F[f(t), \varphi(t), \psi(t)] = 0,$$
$$f(at) = R_1[f(t), \varphi(t), \psi(t)],$$
$$\varphi(at) = R_2[f(t), \varphi(t), \psi(t)],$$
$$\psi(at) = R_3[f(t), \varphi(t), \psi(t)],$$

$a$ étant une constante de module supérieur à l'unité.

M. Picard démontre que ces fonctions seront méromorphes dans tout le plan, ayant seulement, en général, le point à l'infini comme point essentiel.

Mais elles dépendent de deux constantes arbitraires A et B, d'une manière telle que si l'on pose

$$At = u, \qquad Bt = v$$

elles deviennent des fonctions des deux seuls paramètres $u$ et $v$.

En conséquence les surfaces considérées, *s'il en existe* en dehors des surfaces unicursales et hyperelliptiques, jouissent de la propriété remarquable que voici :

Les coordonnées d'un point de la surface peuvent s'exprimer par

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

les trois fonctions $f$, $\varphi$, $\psi$ étant des fonctions méromorphes (à distance finie) des deux variables indépendantes $u$ et $v$ et jouissant de la propriété exprimée par les identités

$$f(au, av) = R_1[f(u, v), \varphi(u, v), \psi(u, v)],$$
$$\varphi(au, av) = R_2[f(u, v), \varphi(u, v), \psi(u, v)],$$
$$\psi(au, av) = R_3[f(u, v)\, \varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

## *Landau.* — Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers (25-38).

*Notations.* — Le signe $\sim$ exprime l'égalité asymptotique; par $\{G(x)\}$ on entend une fonction dont le rapport à $G(x)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$; par $O[G(x)]$ une fonction dont le rapport à $G(x)$ reste compris entre deux limites finies quand $x$ devient infini.

M. Hadamard et M. de la Vallée-Poussin ont démontré simultanément et indépendamment l'un de l'autre la relation célèbre

$$\sum_{p \leq x} \log p \sim x,$$

où la sommation s'étend aux nombres premiers qui ne sont pas supérieurs à $x$. L'auteur commence par en déduire cette autre

$$\sum_{p \leq x} \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p} \sim x\Gamma(\mu) \qquad (\mu > 1).$$

Considérant ensuite le nombre $\pi_k(x)$ de tous les nombres inférieurs à $x$ et

composés de $k$ facteurs premiers, tous différents, il détermine sa valeur asymptotique, en établissant la relation

$$\pi_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\,\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x} + O\left[\frac{x(\log\log x)^{k-2}}{\log x}\right].$$

Il prouve enfin que le second membre de cette dernière équation donne aussi la valeur asymptotique du nombre $\rho_k(x)$ des nombres $\leqq x$ qui sont divisibles par $k$ nombres premiers différents pouvant être affectés d'exposants supérieurs à 1, de même que celle du nombre $\sigma_k(x)$ des nombres $\leqq x$ qui sont composés de $k$ nombres premiers, les facteurs multiples étant comptés suivant leur degré de multiplicité.

## *Bricard* (*R.*). — Sur les propriétés métriques d'une certaine correspondance (1, 1) entre cubiques focales (39-51).

L'auteur étudie certaines propriétés de la correspondance (1,1) établie entre deux cubiques passant par leur foyer singulier (cubiques focales) et telles que l'angle des deux tangentes non isotropes que l'on peut mener à l'une d'elles par son foyer singulier (angle focal) soit égal à l'angle focal de l'autre.

Étant données deux cubiques focales ayant le même angle focal, si l'on établit entre ces deux courbes l'une des deux correspondances (1,1) telles que les foyers singuliers $a$ et $a'$ soient homologues, on a, en désignant par $m$ et $m'$ deux points homologues quelconques, la relation

$$\frac{am}{a'm'} = \text{const.}$$

Soient $m$ et $\mu$ deux points fixes constituant sur la cubique (C) un couple steinérien (couples de points tels que les tangentes en ces points concourent sur la cubique); soient $m'$ et $\mu'$ leurs homologues sur la cubique (C'); soient enfin $p$ et $p'$ deux points homologues quelconques sur les deux cubiques. On a la relation

$$\frac{pm}{p'm'} = \frac{p\mu}{p'\mu'}.$$

Après avoir démontré ces propriétés, l'auteur traite d'une liaison remarquable entre la théorie des cubiques focales et celle du quadrilatère articulé, qui lui permet de retrouver la propriété du quadrilatère articulé de Hart.

## *De Sparre*. — Sur une application des fonctions elliptiques. (52-55).

Les séries entières indiquées par MM. Appell et Lacour (*Principes de la théorie des fonctions elliptiques*) pour résoudre le problème du mouvement d'un projectile, lorsque la résistance du milieu est proportionnelle au cube de la vitesse, sont examinées par l'auteur au point de vue de leur convergence : ces séries ont, en général, une convergence trop faible pour pouvoir être utilisées, dès que le tir aura lieu sous un angle un peu considérable, surtout si la vitesse initiale n'est pas grande.

*Ripert.* — Sur des propriétés générales des formes quadratiques. (56-58).

*Andrade (J.).* — Sur l'équation fonctionnelle de Poisson. (58-63).

Pour résoudre l'équation de Poisson

$$F(x+y)+F(x-y)=2F(x)F(y), \qquad F(0)=1,$$

on suppose habituellement que la fonction F admet des dérivées première et seconde et l'on prouve qu'elle satisfait à une équation linéaire

$$\frac{d^2F}{dx^2}=\frac{1}{K}F(x) \qquad (K=\text{const.}),$$

ce qui permet de la déterminer.

M. Andrade prouve qu'il suffit de supposer la fonction F *continue;* il établit en effet qu'elle admet des dérivées de tous les ordres; on peut alors la développer en série convergente et résoudre le problème proposé sans invoquer la théorie des fonctions circulaires.

*Hadamard.* — Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales. (64-66).

M. Bendixson et M. Picard ont démontré, indépendamment l'un de l'autre, en restant dans le domaine réel et sans supposer analytiques les fonctions données, que les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires sont continues et peuvent être différentiées par rapport aux constantes d'intégration. M. Hadamard présente de ce théorème une nouvelle démonstration, fort simple.

*Appell (P.).* — Note sur les expériences du commandant Hartmann. (67-68).

*Hadamard.* — Sur l'intégrale résiduelle. (69-90).

Dans le problème de la propagation d'un ébranlement, l'équation du mouvement que les points du milieu, qui étaient primitivement en repos, prennent après avoir été dépassés par l'onde, est l'*intégrale résiduelle.* Le principe d'Huygens, entendu au sens que lui donne Kirchhoff, consiste en ce que l'intégrale résiduelle s'annule identiquement dans le cas des ondes sonores sphériques.

« Il serait intéressant, dit M. Hadamard, de déterminer toutes les équations auxquelles le principe d'Huygens s'applique. J'ai jugé utile de commencer par l'étude de l'intégrale résiduelle dans le cas le plus simple possible, celui de deux variables indépendantes. »

Prenant l'équation linéaire à caractéristiques réelles sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

l'auteur examine deux cas où la fonction $z$ est définie par des conditions différentes. Dans le premier cas, l'intégrale résiduelle ne peut pas être nulle; dans le second, au contraire, elle peut l'être, et l'est effectivement toutes les fois que l'invariant

$$\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$$

se réduit à zéro. Dans les deux problèmes, la suite de Laplace, qu'elle se termine dans les deux sens ou dans un seul, joue un rôle important.

## *Autonne* (*L.*). — Sur certaines équations des quatrième et cinquième degrés. (90-107).

Les équations que l'auteur a appelées *anharmoniques* sont les équations algébriques

$$h_n = x^n + \frac{n}{1}a_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

où les $a_i$ sont des fonctions d'une variable $t$, telles que les $n$ racines $x_i$, prises quatre à quatre, aient leur rapport anharmonique constant.

Dans le présent travail, M. Autonne se propose de retrouver par des moyens simples, pour $n = 4$ et $n = 5$, les deux théorèmes qui lui ont permis (*Journal de Mathématiques*, 1900) de construire les équations anharmoniques des divers degrés et d'obtenir celles qui sont des degrés 4 et 5.

Il considère comme des quantités *rationnelles* par définition :

1° Toutes les constantes;
2° Les coefficients $a_i$ de $h_n$.

Le groupe G (au sens de Galois) de $h_n$ est supposé transitif et $h_n$ irréductible. On désigne par S un groupe linéaire fractionnaire d'ordre fini (groupes de MM. Jordan, Klein et Gordan) provenant de substitutions

$$\left| z \quad \frac{az+b}{cz+d} \right| \qquad ad - bc \neq 0.$$

Les résultats obtenus sont les suivants :

*Quatrième degré.* — Trois types d'équations anharmoniques.

Premier type, où T est une fonction rationnelle de $t$,

$$x^4 + 6Tx^2 + 4Tx - 3T^2 = 0;$$

le rapport anharmonique K des quatre racines est équianharmonique; G est le groupe alterné entre quatre lettres, isomorphe au groupe S tétraédrique.

Second type

$$x^4 + 6Tx^2 + 4Tx + T(T+1) = 0,$$

K est harmonique, G est isomorphe au groupe S dérivé, pour $m = 4$, des deux

substitutions (groupe $S_m$)

$$\Theta_m = \left| z \quad \theta z \right|, \qquad \theta^m = 1, \qquad \varepsilon = \left| z \quad \frac{1}{z} \right|.$$

Troisième type

$$(x^2 + q)^2 - p(2x - 1)^2 = 0$$

avec

$$\frac{1}{p} = (1 - T)^2 - (1 + T)^2 \left(\frac{K - 1}{K + 1}\right)^2, \qquad q = pT;$$

G est isomorphe à $S_2$.

*Cinquième degré.* — L'équation $h_5 = 0$ s'obtient en éliminant $\zeta$ entre les deux équations

$$x = \frac{\zeta^2 - 2}{\zeta^2 - 3\zeta + 1}, \qquad \zeta(\zeta^2 - 5\zeta + 5)^2 = T;$$

G est isomorphe à $S_5$; l'équation $h_5 = 0$ est une équation de Galois.

## *Beudon* (*J.*). — Sur les changements de variables. (107-116).

« Ce travail, dit l'auteur, a pour objet l'étude des quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires. Cet algorithme s'est présenté depuis longtemps dans les résultats de l'intégration d'équations aux dérivées partielles; dans un très petit nombre de cas on a effectué la quadrature au moyen d'un changement de variables convenablement choisi; mais on ne possède aucune méthode générale pouvant servir de guide dans les essais. Je traite deux cas généraux, à savoir

$$\int \varphi(x, y, y')\, dx, \quad \int [\varphi(x, y, y') y'' + \psi(x, y, y')]\, dx,$$

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

où $\varphi$ et $\psi$ sont des fonctions données de leurs arguments et $y$ une fonction arbitraire de $x$. Je termine par un exemple simple auquel la méthode s'applique complètement. »

Cet exemple est la détermination des deux quadratures

$$\int \frac{du}{1 + uu_1}, \quad \int \frac{du_1}{1 + uu_1},$$

où $u$ et $u_1$ sont des fonctions arbitraires d'une même variable.

## *Dumont.* — Sur les surfaces cubiques ayant un axe de symétrie ternaire et sur les surfaces cubiques possédant des points à indicatrice du troisième ordre. (117-121).

Désignant par $I_3$ un point où la surface est coupée par son plan tangent suivant trois droites concourantes, l'auteur démontre les propositions suivantes :

I. Toute surface cubique possédant trois points $I_3$ sur une droite à distance

finie, pour chacun desquels les trois droites du plan tangent sont réelles, peut être transformée homographiquement en une surface à axe de symétrie ternaire.

II. Lorsqu'une surface cubique, sans point singulier, possède deux points $I_3$, elle en possède un troisième, en ligne droite avec les deux autres.

III. Une surface cubique possédant six points $I_3$, répartis sur deux droites et tels que, pour chacun d'eux, les trois droites de la surface soient réelles, ne peut posséder un septième point $I_3$ satisfaisant à la même condition.

*Touche.* — Les équations de l'Hydraulique données par Lagrange. (121-124).

*Touche.* — Observations sur les équations de l'Hydraulique d'après Lagrange. (125-127).

*Farber.* — Application du symbole des déterminants positifs. (128-130).

*Tresse* (*A.*). — Sur les propriétés projectives des coniques. (131-136).

L'objet de cette Note est de montrer que l'on peut arriver, *par une voie élémentaire*, à établir que *la perspective d'une conique est une conique* sans invoquer les théorèmes de Dandelin, dès que l'on connaît les propriétés fondamentales des tangentes et en particulier celle-ci :

La portion d'une tangente mobile à une conique, comprise entre deux tangente fixes, est vue d'un foyer sous un angle constant.

*Picard* (*Ém.*). — Sur un exemple d'approximations successives divergentes (137-143).

L'auteur considère d'abord l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, x),$$

où $f$ est une fonction positive et croissante de $y$, quand $x$ varie entre $a$ et $b$ ($a < b$) et démontre que, *pour une même parité de n*, la fonction $y_n$ fournie par la méthode des approximations successives tend *uniformément* dans l'intervalle $(a, b)$ vers sa limite.

La méthode conduit donc à *deux* fonctions $u$ et $v$ qui vérifient les deux équations

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(v, x), \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = f(u, v)$$

et s'annulent pour $x = a$ ainsi que pour $x = b$. L'intégrale *unique* de l'équation proposée qui s'annule pour les mêmes valeurs de $x$ *est comprise entre* $u$ et $v$.

M. Picard passe ensuite à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(\sqrt{x^2+y^2}),$$

qui admet *une intégrale continue, et une seule,* s'annulant sur le contour C d'une circonférence ayant son centre à l'origine.

La méthode des approximations successives conduit à *deux* fonctions différentes, les fonctions $u_{2n+1}$ d'indice *impair* formant une suite *croissante* tendant vers une limite, tandis que les fonctions $u_{2n}$ d'indice *pair* forment une suite *décroissante* tendant vers *une autre limite.* M. Picard démontre que ces deux suites de fonctions tendent *uniformément* dans le cercle C vers leurs limites respectives.

## *Caspary* (*F.*). — Sur le centre de gravité d'un quadrilatère. (143-146).

Généralisant un théorème de M. Mannheim (même Recueil, t. XXVII) sur le centre de gravité du trapèze, l'auteur établit une proposition qui permet de déduire de tout quadrilatère un triangle qui a même centre de gravité.

## *Störmer* (*Carl*). — Sur une propriété arithmétique des logarithmes des nombres algébriques. (146-157).

Le Mémoire débute par quelques généralités sur l'approximation des incommensurables par des fractions continues. L'auteur s'inspire de l'analyse par laquelle Liouville a prouvé l'existence de nombres transcendants, et retrouve l'inégalité sur laquelle est fondée la démonstration de Liouville.

Il établit ensuite la proposition que voici :

*Soient* A *et* B *deux nombres algébriques positifs, supérieurs à l'unité; on suppose que le rapport*

$$\alpha = \frac{\log A}{\log B}$$

*soit incommensurable; on le développe en fraction continue illimitée*

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}$$

*On a l'inégalité suivante :*

$$a_n < K \frac{M^{Q_n}}{Q_n},$$

*où* $Q_n$ *est le dénominateur de la* $n^{\text{ième}}$ *réduite de* $\alpha$; *les nombres* K *et* M *sont des nombres indépendants de* $n$.

Ce théorème donne lieu à diverses conséquences : en particulier, on en conclut l'existence de nombres transcendants qui ne sont les logarithmes vulgaires d'aucun nombre algébrique (Cantor).

*D'Ocagne* (*M.*). — Problème de partition. (157-168).

De combien de manières peut-on former une somme de S francs avec S pièces d'argent françaises?

*Le Roux*. — Sur un invariant d'un système de deux triangles et la théorie des intégrales doubles. (168-172).

L'auteur s'occupe de la différentielle double

$$\frac{du\,dv}{(ux+vy+1)^3}$$

et montre qu'elle est liée à un certain invariant projectif d'un système de deux triangles par une relation analogue à celle qui existe entre la différentielle simple

$$\frac{dz}{(z-x)^2}$$

et le rapport anharmonique.

*Baire* (*R.*). — Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues. (173-179).

L'auteur a démontré dans sa Thèse (*Annali di Matematica*, 1899) que, pour qu'une fonction *d'une* variable soit développable en fonctions continues, il faut et *il suffit* qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.

M. Lebesgue a montré (*Comptes rendus*, 1899) qu'on peut ramener le cas de $n$ variables à celui d'une seule et étendre ainsi l'énoncé précédent.

M. Baire présente une nouvelle démonstration du fait que la condition est *suffisante :* il prouve que :

*Si une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, il existe une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots$ qui a pour limite $f$.*

*Demoulin* (*A.*). — Sur la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur. (180-183).

Le wronskien $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $n$ fonctions d'une variable $x$, c'est-à-dire le déterminant de ces fonctions et de leurs dérivées des $n-1$ premiers ordres

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

jouit d'une remarquable propriété qui se traduit par la formule

$$W(\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n) = \lambda^n W(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

où $\lambda$ désigne une fonction quelconque de $x$.

De là résultent des formules qui trouvent une application immédiate dans la recherche de la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur.

Soient $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ les coordonnées homogènes d'un point de l'espace et $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ les quatre coefficients de l'équation d'un plan

$$y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 + y_4 x_4 = 0;$$

ce sont des fonctions connues d'un paramètre $t$. La courbe enveloppe des caractéristiques de ce plan a sa torsion représentée par la formule

$$\frac{1}{\tau} = \frac{W^2(y_1, y_2, y_3)}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\, W(y_1, y_2, y_3, y_4)}.$$

De là l'auteur déduit une nouvelle démonstration de la relation qu'il a jadis établie entre les torsions de deux courbes polaires réciproques par rapport à une sphère de rayon $a$,

$$\tau\tau' \cos^2\varphi = a^2,$$

$\varphi$ étant l'angle des plans osculateurs aux deux courbes aux points correspondants, $\tau$ et $\tau'$ les rayons de torsion en ces deux points.

## *Picard* (*Ém.*). — Sur quelques problèmes relatifs à l'équation $\Delta u = k^2 u$. (184-191).

L'auteur examine deux problèmes particuliers qui se rattachent à la question générale de l'équilibre calorifique d'une surface fermée rayonnant au dehors.

I. Plaque indéfinie avec une seule source de chaleur à l'origine. L'équation du problème se réduit à

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dv} - u = 0,$$

$u$ ne dépendant que de la distance $r$ à l'origine. Il s'agit d'avoir l'intégrale $u$ qui s'annule à l'infini et devient infinie à l'origine de telle sorte que l'intégrale qui représente le flux ait une valeur donnée.

M. Picard établit la formule

$$u = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{zr}\, dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

et montre que le flux de chaleur correspondant est $-2\pi$; en outre, on a

$$\lim_{r=\infty} (u\sqrt{r}\, e^r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

II. Trouver l'intégrale unique de l'équation

$$\Delta u = u$$

qui admet une période $a$ par rapport à $x$, une période $b$ par rapport à $y$ et qui est continue sauf au point $(\alpha, \beta)$ et aux points homologues $(\alpha + ma, \beta + nb)$ où elle devient infinie comme le devient à l'origine l'intégrale $u$ du problème précédent.

Partant de la fonction

$$\Theta(z, x, y) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{z\sqrt{(x-\alpha-ma)^2+(y-\beta-nb)^2}}$$

qui est parfaitement définie pour $z$ négatif, M. Picard résout le problème proposé par la fonction

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\Theta(z, x, y)\, dx}{+\sqrt{z^2-1}}.$$

On a ainsi un type de solution *doublement périodique* de l'équation

$$\Delta u = k^2 u \qquad (k^2 > 0),$$

qui cesse entièrement d'exister lorsque $k^2$ devient nul.

*Painlevé* (*P.*). — De la détermination unique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par les conditions initiales de Cauchy. (191-196).

Voici, d'après l'auteur lui-même, quel est l'objet de cette Note :

« Dans son savant *Traité sur les équations différentielles,* dont les tomes II et III ont paru récemment, M. Forsyth a discuté longuement la question de savoir si les conditions initiales de Cauchy définissent une solution unique d'un système différentiel. Il a formulé (t. II, p. 44-47 et p. 80-83), au sujet de deux solutions distinctes que nous avons données, M. Picard et moi, de la question, des critiques qui ne me semblent pas fondées.

» Je voudrais montrer ici que le procédé qui m'a permis d'établir que la solution de Cauchy est *unique* ne prête à aucune objection. »

*Ripert.* — Sur les triangles trihomologiques inscrits ou circonscrits à une conique. (196-200).

On peut inscrire *et* circonscrire à toute conique une double infinité (P, Q) de triangles trihomologiques à tout triangle inscrit *ou* circonscrit donné A et trihomologiques entre eux. Les neuf centres d'homologie sont en ligne droite, et les neuf axes passent par un point fixe, si les triangles A, P, Q sont tous les trois soit inscrits soit circonscrits. Si A est inscrit et P, Q circonscrits (ou *vice versa*), les centres du couple (P, Q) restent en ligne droite et ses axes concourants; les six centres des couples (A, P) et (A, Q) sont sur une conique, et les six axes correspondants touchent une autre conique.

*Borel.* — Sur le prolongement analytique de la série de Taylor. (200).

Étant donnée une série entière

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

dont le rayon de convergence n'est ni nul ni infini, si l'on pose

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}}(a_0 + C_n^1 a_1 z + \ldots + C_n^p a_p z^p + \ldots + C_n^n a_n z^n),$$

le développement

$$f(z) = \Sigma P_n(z)$$

est convergent dans une région facile à déterminer et qui dépasse le cercle de convergence de la série entière en tout point non singulier.

## *Painlevé* (*P.*). — Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. (201-261).

On connaît toutes les équations différentielles algébriques du premier ordre dont l'intégrale générale est uniforme; mais dès qu'on passe au second ordre, des difficultés d'une nature toute nouvelle interviennent. Ainsi l'équation

$$yy'' = (1+i)y'^2$$

a pour intégrale générale

$$y = (Ax + B)^i,$$

A et B étant deux constantes arbitraires. Quand $x$ tend vers le point d'affixe $-B:A$ suivant une direction quelconque, $y$ est indéterminé. Une infinité de valeurs de $y$ se permutent, d'ailleurs, autour de ce point qui est à la fois point essentiel et point critique de $y$. L'existence possible de pareilles singularités, variables avec les constantes d'intégration et que rien ne met en évidence sur l'équation différentielle, constitue un obstacle qui « pouvait, à bon droit, dit l'auteur, être regardé comme insurmontable ». Néanmoins l'auteur a pu triompher de cette difficulté, et il expose dans le présent Mémoire une partie d'un vaste ensemble de recherches sur les équations différentielles algébriques dont l'intégrale n'a que des points critiques fixes.

I. Dans un premier Chapitre, il fait connaître le principe de sa méthode et recherche les *conditions nécessaires pour qu'une équation différentielle ait ses points critiques fixes*.

II. Ensuite vient l'application de la méthode aux équations

$$y'' = R(x, y, y'),$$

où R désigne une fonction rationnelle irréductible en $y$, $y'$ dépendant analytiquement de $x$. Il faut d'abord que l'équation soit de la forme

$$(E) \qquad y'' = y'^2 L(x, y) + y' M(x, y) + N(x, y),$$

L, M, N étant des fractions rationnelles de $y$, analytiques en $x$; et l'on est conduit à déterminer toutes les équations de la forme

$$y'' = y'^2 l(y),$$

$l(y)$ étant une fraction rationnelle, dont l'intégrale générale est uniforme. Ce problème préliminaire se ramène à une question résolue par Briot et Bouquet,

de sorte que l'on connaît les neuf formes possibles de $l(y)$, et par conséquent aussi celles de $L(x, y)$.

Étudiant ensuite l'équation (E) dans le voisinage d'un pôle de L, M, N, l'auteur prouve que *les pôles* $y = h(x)$ *des fonctions* M *et* N *coïncident nécessairement avec ceux de* L *et sont tous simples,* ce qui *limite* le degré de M et N en $y$.

A partir d'ici, M. Painlevé s'en tient au cas où L a la plus simple de ses neuf formes possibles, savoir $L = 0$, et considère, en particulier, pour en épuiser l'étude, l'un des cinq types d'équations auxquels cette hypothèse donne lieu, savoir

$$(\mathcal{E}) \qquad y'' = y' b(x) + y^2 B(x) + y C(x) + D(x),$$

en déterminant *explicitement toutes* les équations $(\mathcal{E})$ qui sont à *points critiques fixes.*

L'équation $(\mathcal{E})$ conserve la même forme quand on effectue le changement de variables

$$(T) \qquad y = Y\lambda(x) + \mu(x), \qquad x = \varphi(X),$$

ce qui permet de la transformer soit en $y'' = 0$, soit en

$$y'' = 6y^2 + S(x);$$

mais cette dernière ne peut avoir des points critiques fixes que si $S(x)$ est *linéaire en* $x$,

$$S(x) = px + q.$$

On est ainsi conduit, abstraction faite des fonctions elliptiques uniformes, à la seule équation nouvelle

$$(F) \qquad y'' = 6y^2 - x;$$

mais on sait reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, si une équation donnée $(\mathcal{E})$, où $b$, B, C, D sont algébriques en $x$, est réductible par une transformation (T) à l'un des quatre types d'équations à points critiques fixes dont (F) est le dernier.

III. L'étude de l'équation (F) occupe une grande partie du Mémoire. M. Painlevé établit qu'*elle n'admet pas de points critiques algébriques, mais admet des pôles mobiles.*

Il ne résulte nullement de là que son intégrale ne présente pas de singularités transcendantes; et la démonstration de la non-existence de singularités transcendantes ne laisse pas que de présenter de grandes difficultés. L'auteur y parvient par une méthode synthétique qui s'étend aux équations d'ordre supérieur.

Il traite ensuite des propriétés de la transcendante méromorphe $y(x)$ définie par l'équation (F), et de la façon dont elle dépend des constantes arbitraires $y_0$ et $y'_0$ : c'est une fonction *essentiellement transcendante* de ces *deux* constantes. Il suit de là (en vertu d'un théorème antérieurement établi par M. Painlevé) que c'est une *fonction méromorphe* (*du second ordre*) *essentiellement nouvelle;* et même *toute intégrale particulière de* (F) *est une transcendante nouvelle.* L'intégrale générale $y(x)$ se laisse mettre sous la

forme

$$y = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right),$$

où $\zeta(x)$ est une fonction *entière* essentiellement nouvelle, définie par le système du troisième ordre

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = \eta, \qquad \frac{\eta''^2}{2} + 2\eta'^3 + x\eta' - \eta = 0.$$

Elle est par suite représentable par le quotient de deux fonctions entières en $x$, $x_0$, $y_0$, $y'_0$ dont le développement peut être poursuivi indéfiniment à l'aide de simples dérivations. L'expression de $y$, $y'$ en $y_0$, $y'_0$ définit une correspondance *essentiellement biuniforme* entre les deux couples de variables.

IV. Quand on passe aux équations d'ordre supérieur, la première partie de la méthode (recherche des conditions *nécessaires*) s'étend aisément, tandis que la question de savoir si ces conditions sont suffisantes soulève des difficultés de plus en plus grandes.

Pour montrer la portée de la première méthode, M. Painlevé termine son travail par une première étude des conditions que doit vérifier une équation du troisième ordre (ou d'ordre supérieur) pour que ses points critiques soient fixes, ce qui est, comme on sait, une première condition pour que l'intégrale générale puisse être uniforme. Les résultats acquis dans cette voie, et que l'auteur se propose de compléter ultérieurement, montrent d'ores et déjà le rôle considérable que sont appelées à jouer, dans l'étude systématique des équations différentielles à intégrale uniforme, les fonctions automorphes (fuchsiennes et kleinéennes) de M. Poincaré.

## *Appell* (*P.*). — Propriété caractéristique du cylindroïde. (261-265).

Le conoïde droit dont l'équation est

$$z = \frac{axy}{x^2 + y^2},$$

et qui est appelé *cylindroïde* de Plücker ou de Cayley, a été rattaché par Sir R. Ball à la composition des forces appliquées à un solide. Sir R. Ball a démontré que ce conoïde partage avec les cylindres la propriété que *le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices est une courbe plane.*

M. Appell démontre que toute surface réglée qui jouit de cette propriété est, ou bien un *cylindre,* ou bien un *conoïde droit.*

Mais tout conoïde droit jouissant de la propriété considérée est un cylindroïde; c'est ce qui résulte d'une démonstration que l'auteur a publiée en 1895 dans la *Revue de Mathématiques spéciales* et qu'il reproduit ici.

## *Miller* (*G.-A.*). — Sur plusieurs groupes simples. (266-267).

Ém. Mathieu a établi (*Journal de Liouville*, 1873) l'existence d'une fonction cinq fois transitive de vingt-quatre éléments ayant $\frac{19!}{48}$ valeurs.

2ud Partie



L'objet de cette Note est de prouver que le groupe ($G^{24}$) de cette fonction et chacun de ses sous-groupes maxima de degré 21, 22 et 23 sont des groupes simples.

*De Montcheuil.* — Généralisation des formules de M. Schwarz relatives aux surfaces minima. (268-269).

---

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome CXXX, 1900 (1).

*Servant.* — Sur les systèmes orthogonaux. (28-30).

En rapprochant un théorème de Ribaucour (*Bull. Soc. philomathique,* 1869) des formules de M. Darboux (*Théorie des surfaces,* t. IV) l'auteur parvient au résultat suivant :

De tout couple de systèmes de surfaces ayant même représentation sphérique on peut déduire trois autres couples jouissant de la même propriété, ainsi que quatre couples se correspondant par inversion et quatre par la transformation de Ribaucour.

La proposition subsiste pour l'espace à $n$ dimensions.

*Estienne.* — Sur la théorie des erreurs. (66-69).

*Padé.* — Sur la distribution des réduites anormales d'une fonction. (102-104).

L'auteur démontre un théorème qui est fondamental dans la théorie des fractions continues holoïdes pour les fonctions qui peuvent avoir des réduites anormales, et qu'il a énoncé dans une Note antérieure.

*Ptaszycki.* — Sur la réduction d'un problème algébrique. (105-107).

Étant donnés sur une courbe algébrique $F(x, y) = 0$, de genre $p$, $2q$ points

$$(a_1, b), \quad \ldots, \quad (a_q, b_q); \quad (\alpha_1, \beta_1), \quad \ldots, \quad (\alpha_q, \beta_q),$$

existe-t-il une fonction rationnelle $\varphi(x, y)$ et un nombre entier positif $m$, tels que $\varphi$ reste partout finie et différente de zéro, sauf aux points $(a, b)$ qui soient des zéros d'ordre $m$ et aux points $(\alpha, \beta)$ qui soient des pôles d'ordre $m$?

Ce problème auquel se ramènent des questions importantes de Calcul intégral

---

(1) Voir *Bulletin,* t. $XXV_2$, p. 89.

fait l'objet de la présente Note. L'auteur, généralisant des résultats d'Abel et de Tchebychef, montre que, dans le cas général, l'existence de $\varphi$ est liée à la périodicité d'une suite de fractions rationnelles qu'il définit.

*Boulanger* (*A.*). — Détermination d'invariants attachés au groupe $G_{168}$ de M. Klein. (107-109).

Il s'agit des quatre invariants différentiels fondamentaux dont dépend l'intégration algébrique des équations linéaires de troisième ordre et de certains systèmes de la forme

$$r = a_1 p + a_2 q + a_3 z \qquad s = b_1 p + b_2 q + b_3 z \qquad t = c_1 p + c_2 q + c_3 z.$$

L'auteur résume les résultats qu'il a obtenus au sujet de ces invariants dans un Mémoire destiné au *Journal de l'École Polytechnique.*

*Petrovsky.* — Sur la distribution du potentiel dans un milieu hétérogène. (112-115).

Capacité d'un condensateur plan, toutes les couches étant séparées par des plans parallèles.

Capacité d'un condensateur sphérique, toutes les couches étant sphériques et concentriques.

Capacité d'un condensateur cylindrique, toutes les couches étant séparées par des surfaces cylindriques coaxiales.

Distribution du potentiel autour d'une sphère métallique placée au centre d'une autre sphère, imparfaitement isolante.

*Guichard.* — Sur les surfaces isothermiques. (159-162).

L'auteur commence par retrouver d'une manière nouvelle une transformation des surfaces isothermiques qu'il avait déjà signalée et qui lui a permis de déduire des quadriques de révolution d'autres surfaces isothermiques, dont la courbure moyenne est constante.

Il indique ensuite une autre méthode qui permet, sous certaines conditions, d'obtenir par quadratures une série de surfaces isothermiques.

*Riquier.* — Sur le degré de généralité d'un système différentiel. (162-164).

Définition des systèmes *explicites, passifs, complètement intégrables, isonomes.* Ces définitions sont suivies de l'énoncé d'un théorème d'où il résulte que l'on peut définir d'une manière absolument précise le degré de généralité d'un système différentiel complètement intégrable, à l'aide de deux nombres relatifs à l'une quelconque des formes isonomes passives auxquelles il est réductible.

*Duport* (*H.*). — Sur les équations aux dérivées partielles. (232-233).

L'auteur donne le résumé d'un Mémoire que l'on trouvera dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* où il traite d'un système de deux équations de Pfaff

$$(1) \qquad \sum a_i dx_i = 0, \qquad \sum b_i dx_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Il associe à ces équations un système de huit équations algébriques linéaires et homogènes, dont les six premières contiennent linéairement deux paramètres $\lambda$ et $\mu$ et dont le déterminant, égalé à zéro, fournit pour le rapport $\lambda : \mu$ une équation du second degré. Quand cette équation a ses racines égales, on peut obtenir les solutions du système (1) à l'aide d'équations différentielles ordinaires.

Quand l'équation en $\lambda : \mu$ a ses racines distinctes, on est conduit à reconnaître un cas où toutes les solutions de (1) peuvent être exprimées au moyen de deux fonctions arbitraires de la même variable.

## *Petrini* (*Henrik*). — Sur l'existence des dérivées secondes du potentiel. (233-235).

## *Clairin* (*J.*). — Sur une classe de transformations. (309-310).

Quand un système $(\sigma)$ de quatre équations fait, à un élément $(xyzpq)$ d'un espace $(e)$, correspondre $\infty^1$ éléments unis d'un espace $(e')$, à une famille de surfaces $(s')$ de ce dernier espace correspond dans le premier une famille $(s)$ qui est déterminée par une équation aux dérivées partielles du second ordre, admettant un système de caractéristiques du premier ordre. Inversement, étant donnée une équation du second ordre qui jouit de cette propriété, il est possible de déterminer un système $(\sigma)$, tel que la famille $(s)$ correspondante soit définie par l'équation proposée. A une surface de $(s)$ correspond une surface de $(s')$, et une seule.

Grâce à des considérations de cette nature, l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, admettant un système de caractéristiques du premier ordre, se ramènera dans des cas étendus à l'intégration d'une équation de Monge-Ampère, dès que l'on connaîtra un certain nombre d'intégrales d'une équation du premier ordre.

## *Cosserat* (*Eug.*). — Sur la détermination de toutes les surfaces algébriques à double génération circulaire. (311-313).

L'auteur se propose de déterminer toutes les surfaces que l'on peut déduire d'une quadrique $f = 0$ par une transformation

$$\rho x'_i = f_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où les $f_i$ sont, comme $f$, des formes quadratiques de $x_1$, $x_2$, $x_3$ et $x_4$, telles que les transformées des génératrices de $f = 0$ soient des coniques rencontrant toutes en deux points une conique C'.

On est conduit à classer les solutions suivant les cas d'intersection de $f = 0$ et de la quadrique qui correspond au plan de C'. Une remarque de M. Kœnigs permet de démontrer que ces différents cas fournissent, soit des solutions géné-

rales dont toutes les autres dérivent par inversion, soit des solutions particulières jouissant de la même propriété, soit, enfin, des solutions particulières qui ne donnent par inversion qu'une classe de surfaces répondant à la question.

M. Cosserat rapporte les résultats qu'il a obtenus touchant les solutions de la première classe et fait connaître certaines de leurs propriétés.

*Autonne.* — Sur les équations algébriques harmoniques. (313-315).

L'auteur appelle *équation anharmonique d'ordre n* toute équation algébrique

$$x^n + x^{n-1} A_2(t) + \ldots A_n(t) = 0,$$

dont les $n$ racines $x_i$ satisfont à la même équation de Riccati

$$\frac{du}{dt} = B_0(t) + u B_1(t) + u^2 B_2(t).$$

Il avait déjà fait connaître (*Comptes rendus,* février 1899) plusieurs propriétés de ces équations. Dans la présente Communication il achève la construction effective de toutes les anharmoniques.

*Miller* (*G.-A.*). — Sur les groupes des isomorphismes. (316-317).

*Cosserat* (*Eug.*). — Sur les cercles tangents à quatre plans isotropes et sur les surfaces à double génération circulaire. (385-387).

L'auteur examine un cas particulier important qui se présente lorsque l'intersection de $f = 0$ et de la quadrique Q qui correspond au plan de C′ se compose de quatre droites distinctes. (*Voir* la Note ci-dessus de M. Cosserat.)

On est ainsi conduit à étudier la congruence des cercles tangents à quatre plans isotropes, dont l'auteur fait connaître certaines propriétés.

*Thybaut* (*A.*). — Sur les équations harmoniques et les surfaces isothermiques. (387-390).

L'équation de Laplace à invariants égaux, que vérifient les coordonnées rectangulaires d'une surface minima quelconque, rapportés à ses lignes de courbure, possède une infinité de groupes de quatre solutions dont la somme des carrés est constante. Chacun de ces groupes fait connaître les coordonnées pentasphériques d'une surface isothermique. On trouve ainsi, en partant des équations harmoniques, les surfaces isothermiques dépendant de deux fonctions arbitraires que l'auteur a fait connaître dans sa Thèse.

M. Thybaut indique diverses propriétés de ces surfaces et énonce une condition nécessaire et suffisante pour que la représentation sphérique des lignes et courbures d'une surface soit isothermique : c'est qu'il y ait correspondance entre les lignes de courbure sur les deux nappes de l'enveloppe des sphères tangentes à cette surface et qui ont pour rayon la demi-somme de ses rayons de courbure au point de contact.

*Autonne.* — Sur les équations algébriques anharmoniques. (390-393).

*Estienne.* — Valeur plausible d'une grandeur variable. (393-395).

*Andrade* (*J.*). — A propos de deux problèmes de probabilités. (395-396).

Rectifications apportées par l'auteur à une Note antérieure : *Sur l'application répétée du théorème de Bernoulli.*

*Stekloff.* — Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. (396-399).

L'auteur énonce quatre conditions et démontre que pour toute surface (S) satisfaisant à ces conditions, la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann résout le problème de Dirichlet, si la fonction donnée $f$ est seulement continue sur (S).

*Davidoglou.* — Sur les zéros des intégrales réelles des équations linéaires du troisième ordre. (399-401).

Considérant l'équation binome

$$\frac{d^3y}{dx^3} + yq(x) = 0,$$

où $q(x)$ est une fonction continue de $x$ réelle et telle qu'à partir de $x = x_0$ on ait

$$q(x) > \alpha > 0,$$

l'auteur énonce ce théorème :

*Si $y_1$ est une intégrale continue ainsi que ses deux dérivées premières, si elle est positive de a à b et si de plus sa dérivée en a est positive ou nulle, elle sera certainement donnée par la méthode des approximations successives de M. Picard.*

Vient ensuite un théorème, relatif à ces mêmes équations, analogue au théorème de Sturm pour les équations du second ordre.

*Picard* (*Ém.*). — Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles par leurs valeurs sur un contour fermé. (447-449).

M. Picard considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

dans le cas où les coefficients $a$, $b$, $c$ sont des fonctions analytiques de $x$ et $y$

et établit l'existence d'une solution unique prenant sur un contour régulièrement analytique, *suffisamment petit,* une succession de valeurs représentant une fonction continue, qui pourra d'ailleurs admettre une infinité de maxima et de minima.

*Torrès* (*L.*). — Sur les machines à calculer. (472-474).

*Bricard* (*R.*). — Détermination des surfaces ayant un système de lignes de courbure égales. (475-477).

*Guichard* (*C.*). — Sur une transformation des surfaces isothermiques. (477-480).

L'auteur développe analytiquement la transformation des surfaces isothermiques indiquée dans sa précédente Note (*voir* ci-dessus) : des deux espèces d'équation de Riccati que l'on est conduit à former il ne fait que mentionner la première et calculer les équations du second groupe, celles qui permettent de trouver les points qui décrivent des surfaces isothermiques.

*Stekloff* (*W.*). — Sur les problèmes de Neumann et de Gauss.

Sous les quatre conditions posées dans la Note précédente de M. Stekloff (*voir* ci-dessus), la méthode de Neumann résout le problème hydrodynamique (problème de Neumann) si la fonction donnée $f$ est seulement continue sur la surface considérée.

L'auteur adjoint ensuite aux conditions précitées une cinquième condition (Liapounoff) et conclut que le problème de Gauss est résolu par la méthode de Robin pour toute surface (S) satisfaisant aux quatre premières conditions, si la fonction $f$, continue sur (S), satisfait à la condition de Liapounoff.

*Humbert* (*G.*). — Sur les fonctions à quatre paires de périodes. (483-486).

Les fonctions abéliennes auxquelles conduit le problème d'inversion de Jacobi, pour une courbe de genre deux, sont des fonctions uniformes de deux variables $u$ et $v$, ayant pour paires de périodes $(1,0)$, $(0,1)$, $(g, h)$, $(h, g')$; de plus, si $g_1$, $h_1$, $g'_1$ désignent les parties imaginaires de $g$, $h$, $g'$, la quantité $h_1^2 - g_1 g'_1$ est essentiellement négative.

M. Humbert pose et résout successivement ces deux questions :

1° Existe-t-il des fonctions uniformes $F(u, v)$ ayant pour paires de périodes $(1,0)$, $(0,1)$, $(g, h)$, $(h'_1, g')$, $h'$ étant différent de $h$?

2° Si $h' = h$, est-il nécessaire, pour l'existence des fonctions $F(u, v)$, que $h_1^2 - g_1 g'_1$ soit négatif?

*D'Ocagne* (*M.*). — Sur l'application de la Nomographie à la prédiction des occultations d'étoiles par la Lune. (554-556).

*Korn* (*A.*). — Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. (557).

Observations relatives à la Note récente de M. Stekloff sur *la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*voir* ci-dessus).

*Hatzidakis* (*N.-J.*). — Sur les équations cinématiques fondamentales des variétés dans l'espace à $n$ dimensions. (557-560).

On peut développer, parallèlement à la théorie *analytique* des surfaces, fondée par Gauss, une théorie purement *cinématique,* comme l'a fait M. Darboux.

L'auteur a étudié, dans un Mémoire destiné à l'*American Journal of Mathematics,* les équations fondamentales entre rotations et translations pour les variétés de l'espace à $n$ dimensions. Il donne ici les équations cinématiques fondamentales d'une variété à deux dimensions ou *surface* dans cet espace général.

*Pascal* (*Ern.*). — Sur une théorie des systèmes d'équations aux différentielles totales du second ordre. (645-647).

On considère $n-m$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ et $m$ fonctions $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$ de ces variables, liées par les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} d^2 x_{n-m+1} - \sum\limits_{h,\,k=1}^{n}\sum X_{hk1}\, dx_h\, dx_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad (X_{hki} = X_{khi}), \\ d^2 x_n - \sum\limits_{h,\,k=1}^{n}\sum X_{hkm}\, dx_h\, dx_k = 0, \end{array}\right.$$

dont il s'agit de trouver les intégrales

$$\varphi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_m = 0.$$

L'auteur a démontré que les intégrales $\varphi$ ne peuvent contenir plus de $m(n-m+1)$ constantes arbitraires et donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi. Parmi ces conditions, il y en a toujours

$$\frac{m(n-1)n(n+1)}{3}$$

qui sont indépendantes. Quand elles sont vérifiées, il existe toujours $m$ systèmes de $m$ fonctions $\mu_{i1}, \ldots, \mu_{im}$ telles que la somme des produits de ces fonctions par les premiers membres des équations (1) soit une différentielle seconde exacte. Les fonctions $\mu$ sont déterminées par un système d'équations aux différentielles totales du premier ordre, qui est complètement intégrable.

*Davidoglou*. — Sur une application de la méthode des approximations successives. (692-695).

Si l'équation du quatrième ordre

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = y\varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction qui ne devient jamais négative pour $a \leqq x \leqq b$, admet une intégrale $y_1(x)$ positive et non nulle dans cet intervalle, avec les conditions

$$y'_1(a) \geqq 0, \qquad y'_1(b) \leqq 0,$$

cette intégrale $y_1$ est donnée par la méthode des approximations successives.

L'existence d'une pareille intégrale entraîne la non-existence dans $ab$ de l'intégrale $z(x)$, non identiquement nulle, tangente à $Ox$ en $a$ et en $b$.

## *Le Roux* (*J.*). — Sur l'intégration des équations linéaires à discriminant non nul. (695-697).

A toute équation linéaire d'ordre $p$, à $n$ variables indépendantes, correspondent des surfaces caractéristiques (variétés à $n-1$ dimensions) définies par une équation aux dérivées partielles du premier ordre, homogène et du degré $p$.

Quand le discriminant de cette équation homogène est différent de zéro, on peut représenter par des intégrales multiples à $n-1$ dimensions et à limites variables toutes les intégrales de l'équation proposée, quand on a préalablement obtenu :

1° Une intégrale complète de l'équation des caractéristiques;

2° Une solution particulière de l'équation considérée qui satisfasse à certaines conditions déterminées.

## *Padé* (*H.*). — Sur l'extension des propriétés des réduites d'une fonction aux fractions d'interpolation de Cauchy. (697-700).

Si l'on considère successivement les cas où l'on se donne une seule valeur $u_0$, puis deux $u_0$, $u_1$, puis trois $u_0$, $u_1$, $u_2$ et ainsi de suite en ajoutant chaque fois une valeur nouvelle aux valeurs précédemment considérées, les systèmes de une, deux, trois, ... fractions d'interpolation de Cauchy correspondantes constituent, prises toutes ensemble, une suite à double entrée analogue à celle des réduites d'une fonction et qui est définie par deux suites de quantités correspondantes : la première formée des valeurs

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots$$

de la variable, la seconde des valeurs

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots$$

de la fonction à interpoler.

Soit $U_{\mu\nu} : V_{\mu\nu}$ la fraction de Cauchy relative aux $\mu + \nu + 1$ premiers termes des suites ci-dessus.

Entre les numérateurs U et les dénominateurs V de trois fractions d'indices voisins existent deux formules de récurrence qui conduisent à des fractions

continues dont les numérateurs partiels et les dénominateurs partiels sont des polynomes entiers de degré au plus égal à 2.

*Coulon* (*J.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires et à coefficients constants. (765-767).

Il s'agit de l'équation

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2 U}{\partial y_j^2} = 0.$$

L'auteur commence par signaler certaines solutions, les unes de la forme

$$t^n \varphi\left(\frac{r}{t}\right),$$

les autres de la forme

$$t^n \left[\varphi\left(\frac{r}{t}\right) + \log t \psi\left(\frac{r}{t}\right)\right],$$

$r$ et $t$ ayant les significations suivantes

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_i - x_i^0)^2}, \qquad t = \sqrt{\sum_{j=1}^{q} (y_j - y_j^0)^2}.$$

Il applique ensuite ces solutions à la détermination d'une solution définie par ses valeurs et celles d'une certaine fonction de ses dérivées du premier ordre, sur une multiplicité ponctuelle à $p + q - 1$ dimensions.

*Painlevé* (*P.*). — Sur les systèmes différentiels à points critiques fixes. (767-770).

La méthode que l'auteur a suivie pour déterminer explicitement les équations du second ordre à points critiques fixes est applicable à un système différentiel *quelconque* (dont l'intégrale générale ne dépend que de constantes).

M. Painlevé esquisse les opérations à effectuer, qui se répartissent en deux séries : on procède d'abord à la recherche des conditions *nécessaires* pour que les points critiques soient fixes; il faut ensuite reconnaître si ces conditions sont ou non *suffisantes*.

*Demoulin* (*A.*). — Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont égales. (823-826).

La recherche de ces surfaces est un problème qui a déjà été étudié par M. Hatzidakis, par M. Caronnet et tout récemment par M. Bricard, mais sans recevoir une solution complète.

M. Demoulin l'a soumis à une discussion approfondie, et contrôlé ses conclusions par l'accord de trois méthodes différentes. Il communique le résultat de ses recherches, qui comportent la détermination de toutes les courbes planes, tant imaginaires que réelles, dont les développées appartiennent par leurs tangentes à un complexe linéaire.

*Stekloff* (*W.*). — Remarque relative à une Note de M. A. Korn : *Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.* (826-827).

*Painlevé* (*P.*). — Sur les équations différentielles du troisième ordre à points critiques fixes. (879-882).

L'auteur communique les premiers résultats de ses recherches, en se limitant aux équations de la forme

$$y''' = R(y'', y', y, x), \tag{1}$$

où R est *rationnel* en $y''$ et $y'$, *algébrique* en $y$, *analytique* en $x$.

Si l'équation (1) a ses points critiques fixes, R est un polynome du second degré au plus en $y''$

$$R = A(y', y, x)y''^2 + B(y', y, x)y'' + C(y', y, x).$$

Les coefficients A, B, C sont assujettis à diverses conditions.

A la différence de ce qui se passe pour les équations du second ordre à points critiques fixes, les équations (1) à points critiques fixes ne sont pas réductibles à un nombre fini de types dépendant d'un nombre fini de constantes.

*Le Roux* (*J.*). — Sur une inversion d'intégrale double. (881-884).

Étant donnée une fonction $F(u, v)$ holomorphe dans le voisinage de l'origine et s'annulant pour $u = 0$ et pour $v = 0$, trouver une fonction $f(x, y)$ telle qu'on ait

$$F(u, v) = \int\int f(x, y)\, dx\, dy,$$

l'intégration s'étendant à toute l'aire du triangle

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad \frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1.$$

M. Le Roux arrive à la formule

$$f(x, y) = -\frac{1.2}{4\pi^2} \int\int \frac{F(u, v)\, du\, dv}{u^2 v^2 \left(1 - \frac{x}{u} - \frac{y}{v}\right)^3},$$

valable sous certaines conditions qu'il spécifie.

*Michel* (*Ch.*). — Sur les applications géométriques du théorème d'Abel. (885-888).

*Meslin* (*G.*). — Sur une machine à résoudre les équations. (888-891).

*Clairin* (*J.*). — Sur certaines équations de Monge-Ampère. (997-999).

L'auteur indique un exemple de transformations de Bäcklund établissant une correspondance uniforme entre les intégrales des équations transformées. Il donne un procédé qui permet d'obtenir, à une transformation de contact près, toutes les équations de Monge-Ampère admettant pour l'un de leurs systèmes de caractéristiques un invariant du premier ordre et un invariant du second ordre.

*Desaint.* — Sur la représentation générale des fonctions analytiques quelconques. (999-1002).

L'auteur fait connaître une méthode et des théorèmes propres à expliquer et à généraliser les résultats obtenus par Laguerre, MM. Le Roy et Borel, dans la représentation analytique des fonctions et dans la sommation des séries divergentes.

La méthode s'étend aux fonctions de plusieurs variables et aux fonctions analytiques, non uniformes, d'une variable.

*Borel* (*Ém.*). — Sur les séries de fractions rationnelles. (1061-1064).

Après avoir fait ressortir les défectuosités du mode de représentation des fonctions uniformes par des séries de fonctions rationnelles, quand on laisse à ce mode toute sa généralité, M. Borel le particularise en considérant des séries de cette nature,

$$\sum \frac{P_n(z)}{R_n(z)},$$

telles que les degrés des dénominateurs $R_n$ ont une limite supérieure et que les divers zéros de chaque polynome $R_n$ figurent seulement dans un nombre limité de termes. On peut étendre à ces séries la plupart des résultats que l'auteur a obtenus antérieurement sur les séries

$$\sum \frac{A_n}{z - a_n},$$

en posant des conditions où ne figurent que les coefficients des numérateurs $P_n(z)$. Ces conditions ne dépendant pas de la distribution des pôles des fractions qui composent la série, ces généralisations ne peuvent pas se ramener, par la décomposition en éléments simples, aux théorèmes antérieurement connus.

*Coulon* (*J.*). — Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles et le principe d'Huygens. (1064-1065).

La *surface d'onde,* telle que Hugoniot l'a définie en étudiant la propagation simultanée de deux mouvements dans un fluide indéfini, est forcément une surface caractéristique, au sens que ce mot a dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

L'application de cette remarque, dans le cas des équations à coefficients constants, permet de définir la surface d'onde comme enveloppe de cônes dont les équations s'obtiennent très simplement.

Le principe d'Huygens peut être regardé comme une interprétation géométrique du mode de génération des surfaces caractéristiques.

*Picard* (*Ém.*). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre et sur la généralisation du principe de Dirichlet. (1088-1094).

M. Picard considère l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

où $a$, $b$, $c$ sont des fonctions analytiques de $x$ et $y$, pour préciser et compléter sur certains points de détail les démonstrations qu'il a données, en 1890 (*Journal de l'École Polytechnique*), de ce théorème :

*Toute intégrale de l'équation* (E), *bien déterminée et continue dans une certaine région ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, est une fonction analytique.*

A cette occasion, il démontre divers lemmes qu'il avait admis au cours de ses recherches antérieures sur le même sujet.

*Painlevé* (*P.*). — Sur les équations différentielles d'ordre quelconque à points critiques fixes. (1112-1115).

Les propositions que l'auteur a fait connaître dans une Note récente (*voir* ci-dessus) au sujet de l'équation du troisième ordre ont leurs analogues pour l'équation différentielle d'ordre $q$ algébrique par rapport aux quatre dérivées $y_q$, $y_{q-1}$, $y_{q-2}$, $y_{q-3}$, analytique par rapport à $x$, à la fonction $y$ et à ses $q-4$ dérivées premières.

M. Painlevé énonce les plus simples de ces généralisations.

Dans le cas où $y_q$ est rationnel en $y_{q-1}$ et $y_{q-2}$, les fonctions fuchsiennes et kleinéennes jouent un rôle fondamental dans la détermination des équations à points critiques fixes.

*Borel* (*Ém.*). — Sur la généralisation du prolongement analytique. (1115-1118).

L'auteur commence par définir une classe étendue de fonctions, qu'il appelle *fonctions* (M). L'existence de pareilles fonctions résulte d'un théorème de M. Mittag-Leffler. M. Borel donne d'ailleurs un exemple de fonction (M).

Il trace ensuite les traits essentiels d'une théorie des fonctions (M) qui comprend comme cas particulier la théorie de Weierstrass, et qui est plus générale, puisqu'on connaît effectivement des cas nouveaux dans lesquels elle s'applique.

*Painlevé* (*P.*). — Sur une relation entre la théorie des groupes

continus et les équations différentielles à points critiques fixes. (1171-1173).

L'auteur considère un groupe continu fini de transformations *algébriques* dans l'espace à $n$ dimensions

$$y_i = \rho_i(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, a, b, \ldots, l) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

groupe qui dépend analytiquement de $x$. Il énonce ce théorème :

*Les fonctions $\rho_i$, regardées comme fonctions de $x$, n'ont comme points singuliers non algébriques que des points fixes, et elles n'acquièrent, autour de leurs points critiques mobiles, qu'un nombre fini de valeurs.*

Un cas particulier de ce théorème établit une relation entre la théorie des groupes continus finis et les équations différentielles à points critiques fixes.

Comme conséquence de ces résultats, on peut former des systèmes d'équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale est une fonction essentiellement *transcendante de toute les constantes.*

*De Saint-Germain.* — Sur la fonction S introduite par M. Appell dans les équations de la Dynamique. (1174).

*Korn* (*A.*). — Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. (1238-1241).

*Davidoglou.* — Sur une application de la méthode des approximations successives. (1241-1243).

L'auteur énonce divers résultats relatifs à une équation qui se présente dans la théorie des vibrations des verges élastiques, savoir

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k y \varphi(x) \qquad [\varphi(x) \geqq 0 \text{ pour } a \leqq x \leqq b],$$

où $k$ est un paramètre variable.

Il existe une suite infinie de quantités

$$k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots,$$

toutes positives, croissantes, et telles de plus que l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k_n y \varphi(x)$$

admet une intégrale tangente à $Ox$ en $a$ et $b$, et s'annulant $(n-1)$ fois entre $a$ et $b$.

Les nombres $k_n$ croissent plus vite que $n^4$.

*von Koch* (*H.*). — Sur la distribution des nombres premiers. (1243-1246).

L'auteur applique à l'étude d'une formule d'Euler cette remarque :

Si $x$ et $s$ sont deux nombres positifs, on a

$$\lim_{s=\infty}(1-e^{-x^s}) = 1, 0, \qquad 1-e^{-1},$$

selon que

$$x > 1, \qquad x < 1, \qquad x = 1.$$

Il obtient ainsi des formules nouvelles relatives à la fonction $f(x)$ de Riemann et à d'autres fonctions numériques analogues.

*Le Roy.* — Sur les séries divergentes. (1293-1296).

L'auteur étend aux séries entières d'une variable complexe un procédé pour rendre sommable une série trigonométrique divergente, qui consiste à multiplier par $e^{-n^2t}$ le terme en $\cos nx$ et $\sin nx$.

Certains résultats de cette Note doivent être modifiés, conformément à une rectification subséquente (*voir* ci-après).

*Desaint* (*L.*). — Sur la représentation des fonctions non uniformes. (1296-1298).

Une fonction à point de non-uniformité unique, confondu avec l'origine, admet à l'intérieur d'un cercle C de rayon $r$ inférieur à l'unité, tel que $f(z)$ n'ait pas d'autres discontinuités à son intérieur, le développement en série

$$(1) \qquad f(z) = \sum A_n\left(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{2\log r}\right)^n;$$

aux déterminations multiples de $\log z$ correspondent les déterminations multiples de la fonction (théorème dû à M. Picard).

M. Desaint appelle *élément fondamental de non-uniformité* le développement (1) et résout, en s'appuyant sur des résultats de sa dernière Note (*voir* ci-dessus), le problème suivant :

La fonction $f(z)$ étant analytique, à point de non-uniformité unique confondu avec l'origine et connue seulement par son élément fondamental de non-uniformité, déterminer la fonction $\varpi$ telle que l'on ait

$$f(z) = \varpi(z)$$

pour toutes les valeurs de $z$ du domaine d'existence de la fonction $f(z)$ et pour toutes les branches de celle-ci.

*Coulon* (*J.*). — Remarques à propos d'un Mémoire de M. Massau : *Sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles.* (1378-1379).

*Maillet* (*Edm.*). — Sur des suites remarquables de sous-groupes d'un groupe de substitutions ou de transformations de Lie. (1449-1452).

*Guldberg* (*Alf.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du troisième ordre qui admettent une intégrale intermédiaire. (1452-1454).

Il s'agit des équations de la forme

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E(\beta^2 - \alpha\gamma) + F(\gamma^2 - \beta\delta) + G(\alpha\delta - \beta\gamma) + H = 0,$$

où les coefficients A, B, ..., H sont des fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ et où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont les dérivées du troisième ordre

$$\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}, \qquad \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} \qquad \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

L'auteur étudie le cas où une pareille équation admet une intégrale intermédiaire

$$u = f(v),$$

$u$ et $v$ étant des fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$.

Il enseigne à former deux systèmes d'équations différentielles ordinaires, analogues aux équations des caractéristiques pour les équations du second ordre, et prouve que si l'un de ces systèmes admet deux combinaisons intégrables

$$du = 0, \qquad dv = 0,$$

l'équation proposée admet l'intégrale intermédiaire $u = f(v)$.

*Picard* (*Ém.*). — Sur l'équilibre calorifique d'une surface fermée rayonnant au dehors. (1499-1504).

Si le milieu ambiant est à la température zéro, la température V de la surface en un point $(u, v)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-F\dfrac{\partial V}{\partial u} + E\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) = k^2 V\sqrt{EG - F^2},$$

l'élément linéaire de la surface étant

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Les intégrales uniformes sur toute la surface doivent présenter des singularités : car si une pareille intégrale restait toujours continue, elle serait identiquement nulle.

M. Picard suppose qu'elle devient infinie en un point, d'une manière qu'il précise en se donnant sa partie infinie; et il établit l'existence de l'intégrale uniforme sur toute la surface avec cette singularité (une source de chaleur au point considéré).

Le cas particulier du tore, pour lequel la solution cherchée peut être représentée par une formule explicite, conduit à une transcendante remarquable.

*Le Roy*. — Sur les séries divergentes; rectification à une Note précédente. (1535-1536).

La méthode proposée récemment par l'auteur n'a point toutes les conséquences énoncées; mais *elle permet de déterminer les points singuliers de $f(z)$ qui sont situés sur le cercle de convergence de cette fonction.*

*Maillet* (*Edm.*). — Sur la décomposition des groupes finis continus de transformations de Lie. (1536-1538).

*Lindeberg* (*J.-W.*). — Sur l'intégration de l'équation $\Delta u = fu$. (1539-1541).

*Boussinesq* (*J.*). — Réduction de certains problèmes d'échauffement ou de refroidissement par rayonnement, au cas plus simple de l'échauffement ou du refroidissement des mêmes corps par contact; échauffement d'un mur d'épaisseur indéfinie. (1579-1583).

*Stekloff* (*W.*). — Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. (1599-1601).

*Maillet* (*Edm.*). — Sur la classe des groupes finis continus primitifs de transformations de Lie. (1602-1603).

*Störmer* (*Carl*). — Sur les logarithmes des nombres algébriques. (1603-1605).

L'auteur énonce un théorème qu'il a démontré sur les logarithmes des nombres algébriques, et qui est analogue à celui de Liouville sur les développements de ces nombres en fractions continues.

De cette proposition de M. Störmer résultent diverses conséquences pour la théorie des nombres transcendants.

*Boussinesq* (*J.*). — Problème du refroidissement de la croûte terrestre, traité au même point de vue que l'a fait Fourier, mais par une méthode d'intégration beaucoup plus simple. (1652-1658).

*Painlevé* (*P.*). — Sur les intégrales uniformes du problème des $n$ corps. (1699-1701).

M. Poincaré a démontré que le problème des $n$ corps n'admet pas, en dehors des intégrales classiques, d'intégrale *uniforme* dans tout le domaine réel des variables.

M. Painlevé a démontré qu'il n'existe pas, en dehors des intégrales classiques, d'intégrale analytique uniforme, dans le domaine réel, *par rapport aux vitesses*. Cette proposition n'est établie que pour des valeurs *arbitraires* des

2nd Partie.



masses et pourrait être en défaut pour des valeurs exceptionnelles des masses.

*Demoulin* (*A.*). — Sur la théorie générale des congruences rectilignes. (1701-1703).

M. Waelsch a fait connaître un invariant W de toute congruence rectiligne pour le groupe projectif. M. Demoulin donne deux expressions nouvelles de cet invariant, et énonce ce théorème, indépendant de la théorie des congruences :

*Soient* $F_1$ *et* $F_2$ *deux points pris sur deux courbes* $(C_1)$, $(C_2)$ *et tels que le plan osculateur en chacun de ces points passe par l'autre. Soient* V *l'angle des deux plans osculateurs et* $b_1$, $b_2$ *les rayons de torsion des courbes* $(C_1)$, $(C_2)$ *en* $F_1$, $F_2$. *La quantité*

$$\frac{b_1 b_2 \sin^2 V}{\overline{F_1 F_2}^2}$$

*est un invariant projectif.*

Vient ensuite une propriété caractéristique d'une classe de congruences parmi lesquelles se trouve celle qui est formée des normales d'une surface de Weingarten; on en déduit la généralisation de propriétés relatives à ces surfaces.

*Boussinesq* (*J.*). — Problème du refroidissement d'un mur par rayonnement, ramené au cas plus simple où le refroidissement aurait lieu par contact. (1731-1736).

*Amodeo* (*F.*). — Courbes normales trigonales du plan. (1744-1745).

L'auteur donne le nom de *courbes trigonales* aux courbes algébriques qui peuvent être représentées au moyen de surfaces de Riemann à trois feuillets sans être rationnelles, ni hyperelliptiques, et dont le genre $p$ est conséquemment supérieur ou égal à 3.

Il énonce ce théorème :

*Toute courbe trigonale peut être représentée au moyen d'une courbe normale du plan, dont l'ordre est* $\frac{p}{2} + 3$ *ou* $\frac{p-1}{2} + 3$, *suivant que* $p$ *est pair ou impair. La courbe normale doit avoir un point multiple d'ordre* $\frac{p}{2}$ *et un seul point double dans le premier cas et ne doit avoir qu'un seul point multiple, d'ordre* $\frac{p-1}{2}$ *dans le second cas.*

*Floquet* (*G.*). — Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. (1745-1748).

L'auteur rappelle des formules qu'il a données antérieurement (*Comptes rendus*, 1892) pour étudier ce problème. Il en fait aujourd'hui diverses applications, notamment aux cas où le fil admet, pour figure de repos apparent, soit une hélice, soit un cercle.

## ACTA MATHEMATICA.

Tome XX; 1897.

### *Epstein* (*P.*). — Sur la théorie des intégrales hyperelliptiques. (1-58).

Weierstrass a donné l'expression des intégrales de première et de seconde espèce pour l'irrationalité hyperelliptique

$$(1) \qquad s = \sqrt{(z-e_0)(z-e_1)\ldots(z-e_{2p+1})} = \sqrt{f(z)}.$$

Mais ces expressions contiennent encore un certain degré d'arbitraire. Dans un Mémoire de M. Wiltheiss (*Journal de Crelle*, t. 99) figure une forme particulière des expressions de Weierstrass : c'est cette forme que M. Epstein a été conduit à étudier de plus près; elle est particulièrement bien appropriée à la recherche des dérivées des intégrales hyperelliptiques par rapport aux points de ramification.

#### I. — Les intégrales principales et leurs dérivées par rapport aux points de ramification.

1. Système de coupures conjuguées $a_\mu$, $b_\mu$ et notations. Le point analytique $(z, s)$ sera désigné par $x$.

2. La fonction $s$, définie par l'équation (1) est, à l'infini, de la forme

$$(2) \qquad s = \pm z^{p+1}\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots\right).$$

Soit $\varphi_k(z)$ le polynome $z_k + a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-2} + \ldots + a_k$.

Il est aisé de calculer la dérivée $\frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i}$ : il suffit, pour cela, de comparer la valeur de $\frac{\partial s}{\partial e_i}$ tirée de la formule (2) à la valeur obtenue directement

$$\frac{\partial s}{\partial e_i} = -\frac{s}{2(z-e_i)} = \pm \frac{1}{2} z^p \left[1 + \frac{\varphi_1(e_i)}{z} + \frac{\varphi_2(e_i)}{z^2} + \ldots\right],$$

ce qui donne immédiatement $\frac{\partial a_k}{\partial e_i}$. On en déduit, pour les dérivées cherchées,

le résultat très simple suivant : *L'expression* $\frac{1}{\varphi_k(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left[\frac{\varphi_k(z)}{s}\right]$ *a la même valeur quel que soit k, savoir* $\frac{1}{2s(z-e_i)}$.

3. On introduit alors les intégrales *principales,* c'est-à-dire les intégrales

$$\omega_n(x) = \int \frac{\varphi_{p+n}(z)}{s}\,dz \qquad [n = -p, -(p-1), \ldots, -1, 0, +1, \ldots, p],$$

lesquelles jouissent de la propriété suivante : *Dans le développement de chaque intégrale principale à l'infini, tous les termes variables en z, sauf un, manquent jusqu'à la puissance* $\frac{1}{z^{p+1}}$.

En particulier, les intégrales $\omega_{-p}, \ldots, \omega_{-1}$ sont de première espèce; les intégrales $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, de seconde, et l'on a ainsi constitué un système complet d'intégrales de première et de seconde espèce. Quant à $\omega_0$, c'est une intégrale de troisième espèce qui disparaîtra toujours dans des calculs ultérieurs.

On désigne par $\alpha_{n\mu}, \beta_{n\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ les modules de périodicité de $\omega_n$ relatifs aux coupures $a_\mu, b_\mu$.

Les équations du numéro précédent montrent que $\frac{\partial\omega_n}{\partial e_i}$ est égal à $\varphi_{p+n}(e_i)\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$, en désignant par $\omega$ l'intégrale $\omega_{-p} = \int\frac{dz}{s}$. Les dérivées par rapport à $e_i$ des modules $\alpha_{n\mu}, \beta_{n\mu}$ peuvent donc se rattacher aux modules de périodicité $p_{i\mu}, q_{i\mu}$ de $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$. On déduit de là, en particulier, les équations différentielles qui expriment que $\alpha_{n\mu}, \beta_{n\mu}$ sont des fonctions homogènes et de degré $n$ des $e_i$.

4. L'intégrale $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ est de seconde espèce et peut, par suite, s'exprimer en fonction des intégrales fondamentales. Après avoir obtenu cette expression et en avoir déduit celle des quantités $p_{i\mu}, q_{i\mu}$ (numéro précédent) en fonction des $\alpha_{n\mu}$ $\beta_{n\mu}$, l'auteur introduit l'intégrale de troisième espèce

$$(3) \qquad r(x, \xi) = \int \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\frac{dz}{2s}$$

où $\xi = (\zeta, \sigma)$ est un point analytique déterminé satisfaisant à l'équation (1) : intégrale dont il étudie les dérivées par rapport aux $e_i$ et par rapport à $\zeta$.

L'expression $\Pi(x, \xi) = r(x, \xi) + \frac{1}{2}\sum_1^p \nu\omega_\nu(\xi)\omega_{-\nu}(x)$ est inaltérée par l'échange du paramètre et de l'argument, ce que l'on peut vérifier par la méthode de M. Klein, en mettant $\Pi(x, \xi)$ sous la forme d'intégrale double.

5. Les modules de périodicité $A_\mu(\xi), B_\mu(\xi)$ de l'intégrale (3) sont, par rapport à $\zeta$, des intégrales abéliennes de la classe étudiée et s'expriment aisément à l'aide des quantités $\omega_n(\zeta)$. L'expression inverse de celles-ci à l'aide des $A_\mu(\xi)$, $B_\mu(\xi)$ est particulièrement simple. Il en est de même, d'autre part, de la manière dont se comportent les $A_\mu(\xi), B_\mu(\xi)$ au passage des coupures : chacune des intégrales $A_\mu(\xi), B_\mu(\xi)$ n'a qu'un module de périodicité différent de zéro.

II. — Les intégrales normales de première et de seconde espèce et leurs dérivées par rapport aux points critiques.

6. *Intégrales normales de première espèce.* — L'auteur les exprime à l'aide des $A_\mu$, $B_\mu$ $\left(\text{on a } 2u_\mu = B_\mu - \frac{1}{i\pi}\sum_\lambda a_{\mu\lambda} A_\lambda, \text{ où les } a_{\mu\lambda} \text{ sont les périodes de } u_\mu\right)$; puis, posant $u_\mu = \int \frac{\Phi_\mu(z)}{s}\,dz$, où $\Phi_\mu$ est un polynome, il calcule l'expression $T_i(x) = \frac{1}{\Phi_\mu(e_i)}\frac{\partial u_\mu}{\partial e_i}$.

7. *Les intégrales normales de seconde espèce.* — Mettant également celles-ci sous la forme $v_\mu = \int \frac{\Psi_\mu(z)}{s}\,dz$, on constate que l'expression $\frac{1}{\Psi_\mu(e_i)}\frac{\partial v_\mu}{\partial e_i}$ a précisément la même valeur $T_i(x)$ obtenue au numéro précédent. Ces quantités $T_i$ vérifient, par rapport aux $e$, un système d'équations linéaires aux dérivées partielles S, auquel satisfont également les quantités $\frac{\Phi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}$, $\frac{\Psi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}$. Ce système S jouit de cette propriété remarquable que, si l'on en considère deux solutions quelconques (distinctes ou non), celles-ci peuvent servir à former (par l'intégration d'une certaine différentielle totale exacte) une solution des équations aux dérivées partielles

$$(4)\qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial e_i\,\partial e_k}\right)^2 + 4\,\frac{\partial^2 \log\left(\Delta \sqrt[8]{F}\right)}{\partial e_i\,\partial e_k}\,\frac{\partial V}{\partial e_i}\,\frac{\partial V}{\partial e_k} = 0,$$

où F est le discriminant de $f$ et $\Delta$ le déterminant des périodes des intégrales principales. En particulier, on a

$$f'(e_i)\,T_i(x)^2 = 2\,\frac{\partial \Omega(x)}{\partial e_i},$$

$\Omega$ étant une solution des équations (4). La fonction $\Omega$ n'est pas une fonction abélienne de la classe considérée (sa dérivée par rapport à $z$ jouit seule de cette propriété); mais elle permet d'exprimer explicitement, à l'aide de $z$, les fonctions $\Theta$ qui interviennent dans l'inversion des intégrales abéliennes en question.

## *Poincaré* (*H.*). — La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. (59-142).

W étant le potentiel d'une simple ou d'une double couche étendue sur la surface fermée S, désignons par V la valeur de W en un point très voisin de S, mais intérieur à S, et par V′ la valeur de W en un point très voisin de S, mais extérieur.

Cela posé, la méthode connue de Neumann pour la résolution du problème de Dirichlet peut être considérée comme consistant à ramener ce problème au suivant :

*$\Phi$ étant une fonction donnée en tous les points de la surface et $\lambda$ un para-*

*mètre, trouver une double couche dont le potentiel* W *satisfasse à la condition*

$$V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi. \tag{1}$$

Si, en effet, on développe W suivant les puissances croissantes de $\lambda$, soit

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots, \tag{2}$$

on constate que les coefficients successifs W ne sont autres que les fonctions formées par Neumann. La solution du problème de Dirichlet intérieur correspond à $\lambda = -1$, et celle du problème extérieur, à $\lambda = 1$.

Cette méthode est relativement très simple comme calcul. Mais sa légitimité (autrement dit, la convergence de la série W pour $\lambda = \pm 1$) n'a pu être établie par Neumann qu'en supposant la surface convexe. Si l'on renonce à cette hypothèse, les raisonnements de Neumann montrent seulement que les termes successifs croissent moins vite que ceux d'une certaine progression géométrique.

Cependant, il va être établi (en supposant, toutefois, la possibilité du problème de Dirichlet démontrée par ailleurs) que *les opérations de Neumann convergent, même lorsque la surface est concave.*

I. Les intégrales $J_m$ : 1. *Définition des intégrales* $J_m$. — Désignons par $J_{i,k}$, $J'_{i,k}$ les intégrales

$$\iiint \left( \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial W_k}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial W_k}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z} \frac{\partial W_k}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

étendues, la première au volume intérieur à S, la seconde au volume extérieur.

L'application du théorème de Green montre :

1° Que $J_{i,k}$ et $J'_{i,k}$ ne dépendent que de la *somme* des indices $i$ et $k$, de sorte qu'on peut poser

$$J_{i,k} = J_m, \qquad J'_{i,k} = J'_m \qquad (m = i + k);$$

2° Que l'on a

$$J_m + J'_m = J_{m-1} - J'_{m-1}. \tag{3}$$

2. *Propriétés des intégrales* $J_m$. — On voit immédiatement que, pour $m$ pair, $J_m$ et $J'_m$ sont positifs. L'application d'un mode de raisonnement connu montre ensuite que les rapports $\frac{J_m}{J_{m-1}}$ et $\frac{J'_m}{J'_{m-1}}$ sont toujours croissants en valeur absolue. Si, enfin, on fait intervenir les équations (3), on aboutit aux inégalités suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{J_2}{J_0} < \dfrac{J_4}{J_2} < \dfrac{J_6}{J_4} \cdots < 1, \\[2ex] \dfrac{J'_2}{J'_0} < \dfrac{J'_4}{J'_2} < \dfrac{J'_6}{J'_4} \cdots < 1, \\[2ex] \dfrac{J_2 + J'_2}{J_0 + J'_0} < \dfrac{J_4 + J'_4}{J_2 + J'_2} < \dfrac{J_6 + J'_6}{J_4 + J'_4} \cdots < 1. \end{array} \right. \tag{4}$$

avec

$$(5) \qquad |J_{2m+1}| < J_{2m}, \quad |J'_{2m+1}| < J'_{2m}.$$

II. Étude du rapport $\frac{J}{J'}$ : 1. *Énoncé du problème.* — W étant un potentiel de simple ou de double couche, soient J l'intégrale

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$

étendue à l'intérieur de S; J' l'intégrale analogue relative au domaine extérieur. Il est aisé de voir que le rapport $\frac{J}{J'}$ ne peut, dans le cas de la double couche, ni s'annuler ni devenir infini. Dans le cas de la simple couche, ce même rapport ne peut pas non plus devenir infini, mais il peut s'annuler.

Posons maintenant

$$(6) \qquad W = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \ldots + \alpha_p W_p,$$

les $\alpha$ étant des constantes arbitraires. Les intégrales J et J' seront alors des formes quadratiques par rapport aux $\alpha$. Le rapport $\frac{J}{J'}$ est essentiellement positif et ne peut devenir infini; il ne peut même pas s'annuler, même dans le cas de la simple couche, si l'on suppose que $W_1, W_2, \ldots, W_p$ soient linéairement indépendants. Ce rapport a donc un maximum positif $R_1$ et un minimum positif $R_2$. On peut se proposer de rechercher des limites entre lesquelles sont compris $R_1$ et $R_2$.

2. *Comparaison des cas de la simple et de la double couche.* — Soient $W_1$ un potentiel de simple couche et $W_2$ un potentiel de double couche; le premier donnant lieu aux intégrales $J = J_1$, $J' = J'_2$; le second, aux intégrales $J = J_2$, $J' = J'_2$.

Posons, comme tout à l'heure

$$W_1 = \alpha_1 W_1^1 + \alpha_2 W_2^1 + \ldots + \alpha_p W_p^1,$$
$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \alpha_2 W_2^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2,$$

les $W_i^1$ étant des potentiels de simple couche, les $W_i^2$ des potentiels de double couche linéairement indépendants.

Lorsqu'on fera varier les $\alpha$, le rapport $\frac{J_1}{J'_1}$ aura un maximum $R_1$ et un minimum $R_2$; le rapport $\frac{J_2}{J'_2}$, un maximum $R'_1$ et un minimum $R'_2$. Si maintenant on fait varier, à leur tour, les densités des simples ou des doubles couches qui fournissent les potentiels $W_i^1$, $W_i^2$, $R_1$, $R'_1$ auront des limites inférieures $m_p$, $m'_p$; $R_2$, $R'_2$ des limites supérieures $M_p$ $M'_p$.

La considération de l'intégrale

$$\iiint \left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\frac{\partial W_2}{\partial x} + \frac{\partial W_1}{\partial y}\frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\frac{\partial W_2}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

montre que, si $W_1$ est égal à $W_2$ à l'extérieur de S, on a

$$(7) \qquad \frac{J_1}{J'_1} < \frac{J'_2}{J_2}$$

et que l'on a l'inégalité inverse

$$(7') \qquad \frac{J'_1}{J_1} < \frac{J_2}{J'_2}$$

si $W_1$ est égal à $W_2$ à l'extérieur de S.

Or, étant donnée une fonction harmonique dans le domaine intérieur ou dans le domaine extérieur à S, il existe toujours un potentiel de simple couche qui lui est égal dans le même domaine. Ceci résulte du principe de Dirichlet tel que l'établissent les méthodes de démonstration autres que celles de Neumann (par exemple, la méthode du balayage).

Une conclusion analogue, *mutatis mutandis*, peut être d'ores et déjà énoncée pour un potentiel de double couche, *si la surface* S *est convexe*. Dans le cas contraire, la conclusion en question ne peut être considérée comme acquise, car elle dépend de la méthode de Neumann.

Si l'on tient compte de ces remarques, l'emploi des inégalités (7) et (7') donne dans tous les cas

$$M'_p \leqq \frac{1}{m'_p},$$

$$m'_p \geqq \frac{1}{M'_p},$$

et, *si la surface est convexe*,

$$M_p = \frac{1}{m'_p}.$$

3. *Cas de la sphère.* — Dans ce cas les diverses quantités dont il vient d'être question se calculent aisément en remplaçant W par son développement en fonctions sphériques. En particulier, $\frac{J_2}{J'_2}$ est compris entre 1 et 2.

4. *Surfaces simplement connexes.* — Si la surface S est simplement connexe et sans point singulier, il existera une transformation ponctuelle T, régulière (le sens de ce mot étant convenablement défini), à distance finie et à l'infini et qui changera S en une sphère. Cette transformation n'altérera les intégrales dont il est question précédemment que dans un rapport fini, compris entre deux limites positives que l'on peut assigner. On peut dès lors étendre, dans ce qu'elles ont d'essentiel, les conclusions du numéro précédent à une surface S quelconque.

5. *Couche de masse nulle.* — Si $W_1$ est un potentiel de simple couche de masse nulle, on aura $\frac{J_1}{J'_1} > m_2$.

C'est ce que l'on démontre en introduisant la densité de la distribution électrique qui est en équilibre par elle-même sur S, par conséquent en utilisant le principe de Dirichlet tel qu'il est démontré par d'autres méthodes. Mais si l'on veut simplement une limite inférieure de $\frac{J_1}{J'_1}$ (sans avoir besoin de

constater que cette limite est $m_2$), on peut l'obtenir sans s'appuyer sur le principe de Dirichlet, en employant la méthode du numéro précédent, autrement dit, en ramenant le cas général au cas de la sphère.

En résumé le principe de Dirichlet n'est nécessaire que pour établir les propriétés du rapport $\frac{J_2}{J'_2}$.

III. Le rapport $\frac{J_{2m+2}}{J_{2m}}$. — Si l'on reprend alors les intégrales $J_{2m}$ et $J'_{2m}$ considérées au Chapitre I, il résulte de l'analyse du Chapitre II que le rapport $\frac{J_{2m}}{J'_{2m}}$ est compris entre deux limites positives $\mu$ et $\frac{1}{\mu}$, déterminées lorsque S est donnée.

Ceci a lieu, quelle que soit la fonction donnée $\Phi$ et subsiste, en particulier, si l'on remplace $\Phi$ par $\alpha\Phi + \beta\psi$, $\psi$ étant une fonction quelconque, $\alpha$ et $\beta$ des nombres quelconques. On peut évidemment appliquer à l'inégalité ainsi obtenue un mode de raisonnement analogue à celui qui conduit à l'inégalité de Schwartz. En prenant pour $\psi$ l'une des fonctions qui s'introduisent dans la méthode de Neumann, on trouve ainsi que le rapport $\frac{J_{2m+2} + J'_{2m+2}}{J_{2m} + J'_{2m}}$ est inférieur à $\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2$. Autrement dit, les intégrales $J_{2m}$, $J'_{2m}$, et, par conséquent aussi, les intégrales $J_{2m+1}$, $J'_{2m+1}$ vont en décroissant plus vite que les termes d'une progression géométrique de raison $L = \frac{1-\mu}{1+\mu}$.

IV. L'intégrale $\iint (V - C)^2 d\omega$ : 1. *Énoncé du problème* — Soit W une fonction harmonique à l'intérieur de S, se réduisant à V sur S. L'intégrale $J = \iiint \sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx\,dy\,dz$ peut s'annuler (pour V constant et $\neq 0$) sans que l'intégrale $\iint V^2 d\omega$ étendue à la surface S soit nulle. Mais il n'en sera pas de même si, à l'intégrale $\iint V^2 d\omega$, on substitue l'intégrale

$$K = \iint (V - C)^2 d\omega,$$

C étant une constante choisie de manière que l'intégrale soit minimum.

On pourra alors se proposer de trouver une limite du rapport $\frac{K}{J}$.

2. *Cas de la sphère.* — Dans le cas de la sphère, le développement en fonctions sphériques donne aisément la solution.

3. *Surfaces simplement connexes.* — On passe de la sphère à une surface simplement connexe quelconque par la transformation déjà utilisée au Chapitre II, n° 4.

4. *Application au problème de Neumann.* — Reprenant les notations primitives, soient $W_0$, $W_1$, ..., les fonctions qui figurent dans la formule (2); $V_m$,

$V'_m$ les valeurs intérieure et extérieure de $W_m$; $U_m$ la moyenne arithmétique de $V_m$ et de $V'_m$. Si l'on tient compte de ce qui vient d'être établi et des résultats du Chapitre III, on voit que l'intégrale

$$\Omega_m = \iint (U_m - C_m)^2 \, d\omega \tag{8}$$

($C_m$ étant choisi de manière que l'intégrale soit minimum) est telle que le rapport $\frac{\Omega_m}{L^{2m}}$ reste fini, L désignant la constante plus petite que 1 rencontrée au Chapitre III.

V. Convergence de la série de Neumann : 1. *Démonstration.* — Si $U'_m$ désigne la valeur de $U_m$ au point $M'(x', y', z')$ de la surface; $d\sigma' = d\omega' \frac{\cos\varphi}{r^2}$, l'angle solide sous lequel l'élément $d\omega'$ de la surface S autour de M' est vu d'un point M de l'espace : la valeur de $W_{m+1}$ au point M sera

$$W_{m+1} = \int \frac{U'_m \, d\sigma'}{2\pi}.$$

Ajoutons une constante à $W_{m+1}$ de manière à remplacer $U'_m$ par $U'_m - C_m$. Alors, en vertu de l'inégalité de Schwartz, le carré de l'intégrale est inférieur au produit de la quantité $\Omega_m$ par l'intégrale $\iint \left(\frac{d\sigma'}{2\pi \, d\omega'}\right)^2 d\omega'$.

Si le point M n'est pas sur S, l'intégrale $\iint \left(\frac{d\sigma'}{2\pi \, d\omega'}\right)^2 d\omega'$ est finie et inférieure à une quantité que nous pouvons assigner si M reste à une distance déterminée de S. On voit dès lors que, dans ces conditions, la série $\Sigma \lambda^m W_m$, dans le cas de M extérieur, et la série $\Sigma \lambda^m (W_m - 2C_m)$, dans le cas de M intérieur, sont convergentes pour $\lambda = \pm 1$.

Mais le résultat ainsi obtenu est insuffisant, puisqu'on n'a établi ni la convergence sur S, ni la convergence uniforme dans le voisinage de S. Il faut, à cet effet, M étant un point de la surface, diviser celle-ci en deux parties par un cylindre de révolution $\Sigma$ ayant pour rayon $\rho$ et pour axe la normale à S en M. L'intégrale $\iint \left(\frac{d\sigma'}{d\omega'}\right)^2 d\omega'$, étendue à l'extérieur du cylindre $\Sigma$, croît indéfiniment avec $\frac{1}{\rho}$, mais non plus vite que $\log \frac{1}{\rho}$. Quant à l'intégrale

$$\iint (U'_m - C_m) \, d\sigma'$$

relative à l'aire intérieure à $\Sigma$, elle s'évalue directement, et l'on constate qu'en prenant $\rho$ proportionnel à $L^m$, on obtient, pour $U_{m+1} - C_m$, le terme général d'une série uniformément convergente sur la surface.

2. *Uniformité de la convergence.* — Pour arriver à la série même de Neumann, il faut remplacer toutes les constantes $C_m$ par une seule C. C'est à quoi l'on arrive en remarquant que $(C_{m+1} - C_m)$ satisfait aux inégalités qui viennent d'être établies pour $(U_{m+1} - C_m)$ et que, par suite, $C_m$ tend vers une limite C

[la différence variant comme $(L+\varepsilon)^m$]. Ayant ainsi une limite de $(U_m - C)$, on peut (en partant de la valeur de $W_{m+1}$, exprimée à l'aide de $U_m$) montrer que la série de Neumann est uniformément convergente partout et satisfait aux conditions du problème.

VI. Les fonctions fondamentales : 1. *Définition.* — Après avoir ainsi établi en toute rigueur la convergence des opérations de Neumann, M. Poincaré, sans chercher, cette fois, à être entièrement rigoureux, montre, par des considérations de calcul des variations, l'existence d'une série infinie de quantités positives croissantes $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, +\infty;\ \lambda_0 = 0)$ et de potentiels de simples couches correspondantes $\Phi_i$ dites *fonctions fondamentales,* tels que :

1° Le rapport des deux valeurs (intérieure et extérieure) de la dérivée normale $\frac{d\Phi_i}{dn}$ soit, en chaque point de S, égal à $\lambda_i$;

2° On ait, pour $i \neq k$,

$$\iint \Phi_i \frac{d\Phi_k}{dn}\, d\omega = \iint \Phi_i \frac{d\Phi_k}{dn'}\, d\omega = 0,$$

$$\iiint \sum \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = 0,$$

cette dernière intégrale étant étendue, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de S.

3° $\iiint \sum \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right)^2 dx\, dy\, dz$ ait la valeur 1 ou la valeur $\lambda_i$ suivant qu'on l'étend à l'extérieur ou à l'intérieur de S.

Considérant une fonction harmonique quelconque $\varphi$ telle que sur S, le rapport des deux valeurs de $\frac{d\varphi}{dn}$ soit constant et égal à $\lambda$, on constate que $\lambda$ ne peut être ni imaginaire, ni négatif, et qu'il ne peut être compris entre deux des nombres $\lambda_i$ précédemment introduits. Si donc $\lambda$ n'est pas plus grand que tous les $\lambda_i$, il est égal à l'un d'entre eux et alors $\varphi$ est une des fonctions fondamentales (ou une de leurs combinaisons linéaires, si plusieurs $\lambda_i$ consécutifs sont égaux entre eux).

Les fonctions fondamentales donnent, pour la sphère et l'ellipsoïde, les fonctions de Laplace et de Lamé.

2. *Développements en série.* — Il y a lieu de penser que toute fonction F, définie sur S, peut se développer en série de fonctions fondamentales, le calcul des coefficients se faisant suivant la méthode classique. Un potentiel de simple couche serait représenté par un seul et même développement à l'intérieur et à l'extérieur; un potentiel de double couche, par deux développements différents, le rapport des coefficients homologues étant $-\lambda_i$.

Si ces développements sont toujours possibles, l'hypothèse d'une fonction $\varphi$ donnant lieu à une valeur $\lambda$ supérieure à tous les $\lambda_i$ (numéro précédent) est inadmissible.

3. *Application au problème de Neumann.* — Les notations étant celles du Chapitre I, soit, développé en série de fonction $\Phi_i$,

$$\Phi = \Sigma C_i \Phi_i$$

et soit $W = \Sigma A_i \Phi_i$ le développement de W à l'intérieur de S : on aura aisément

$$A_i = \frac{2 C_i}{1 + \lambda_i - \lambda(1 - \lambda_i)}.$$

Si ces résultats étaient établis rigoureusement, on en déduirait immédiatement l'expression et les propriétés des intégrales $J_{m,p}$ considérées au Chapitre I.

Au contraire, on pourrait essayer de démontrer les résultats qui viennent d'être énoncés en employant ceux qui ont été établis jusqu'ici et imitant la méthode du Mémoire inséré aux *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1894); autrement dit, en étudiant W comme fonction de $\lambda$.

VII. La méthode de Robin : 1. *La méthode de Robin et les fonctions fondamentales.* — La méthode de Robin peut se rattacher aux considérations précédentes. Soit, en effet, $w$ le potentiel d'une *simple* couche telle que l'on ait ($v$, $v'$ étant les valeurs intérieures et extérieures de $w$ et $\varphi$ une fonction donnée sur S),

$$\frac{dv}{dn} - \frac{dv'}{dn} = \lambda\left(\frac{dv}{dn} + \frac{dv'}{dn}\right) + 2\varphi.$$

$w$ pourra encore être considéré comme un développement ordonné suivant les puissances de $\lambda$. Soit

$$w = w_0 + \lambda w_1 + \ldots + \lambda^m w_m + \ldots.$$

Si, d'autre part, $\varphi$ est développé sous la forme $\Sigma C_i \frac{d\Phi'_i}{dn}$ $\left(\text{en désignant par } \frac{d\Phi'_i}{dn}\right.$ la dérivée normale extérieure d'une fonction fondamentale$\Big)$ et que l'on cherche $w$ sous la forme $\Sigma A_i \Phi_i$, on a aisément les $A_i$ en fonction des $\Phi_i$ : en particulier, on a

$$(-1)^m w_m = -2 \sum \frac{C_i \Phi_i}{1 + \lambda_i} \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^m.$$

On voit alors que, pour $m$ infini, $(-1)^m w_m$ tend vers le potentiel de la couche électrique en équilibre sur S. Or les $w_m$ sont précisément les fonctions successivement formées par Robin.

La méthode de Neumann repose, au fond, sur un principe analogue.

D'autre part, pour $\lambda = \pm 1$, la méthode de Robin donne la solution du problème hydrodynamique $\left(\text{déterminer } w, \text{ connaissant } \frac{dv}{dn}\right)$.

2. *La méthode de Robin et le problème de Neumann.* — On peut rattacher les deux méthodes l'une à l'autre sans admettre les postulats relatifs aux fonctions fondamentales. Si, en effet, en même temps que la fonction $w$, on considère le potentiel de double couche W étudié en commençant, la méthode de Neumann montre qu'on pourra choisir ce dernier de manière que $W_0$ soit égal à $w_0$ à l'intérieur de S. On peut alors déduire des équations de récurrence qui déterminent les $W_i$, $w_i$ que l'on a

$$W_i = (-1)^i w_i.$$

*Wertheim* (*G.*). — Racines primitives des nombres premiers de

la forme $2^\varkappa q^\lambda + 1$, dans laquelle $q = 1$ ou est un nombre premier impair. (143-152).

Grâce à la simplicité de la décomposition de $p - 1$ en facteurs premiers, on peut juger assez aisément si les nombres les plus simples sont ou non racines primitives du nombre premier $p = 2^\varkappa q^\lambda + 1$.

*Wertheim* (*G.*). — Table des plus petites racines primitives $g$ de tous les nombres premiers $p$ entre 3000 et 5000 (*suite* de la Table du Tome XVII, p. 315). (153-158).

*Weingarten* (*J.*). — Sur la déformation des surfaces. (159-200). [Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Grand Prix des Sciences mathématiques, 1894).]

Au lieu d'employer l'équation connue de laquelle dépend la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée, l'auteur rattache le problème à une autre équation de même forme, mais qui, dans certains cas (tous ceux où la solution a pu être obtenue jusqu'ici), peut être intégrée par des méthodes connues.

M. Weingarten s'attache d'ailleurs surtout aux solutions réelles.

I. Soient $ds^2 = E' dz^2 + 2F' dz\, d\omega + G' d\omega^2$ un élément linéaire,

$$\Delta' = E'G' - F'^2;$$

K la courbure.

Introduisons, au lieu de $\omega$, la variable $t = \int_{\omega_0}^{\omega} K\sqrt{\Delta'}\, d\omega$ (les quantités K et $\Delta'$ étant supposées $\neq 0$ dans le domaine où l'on opère et $\sqrt{\Delta'}$ étant pris avec le signe de K). Posons ensuite $t = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$. Notre élément linéaire deviendra

$$(1) \qquad ds^2 = E\, dz^2 + 2F\, dz\, d\sigma + G\, d\sigma^2,$$

et l'on trouve aisément

$$(2) \qquad K\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}, \qquad \Delta = EG - F^2.$$

Il existe alors quatre fonctions $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ de $z$ et de $\sigma$, vérifiant les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 = E, \quad a\alpha + b\beta = F, \quad \alpha^2 + \beta^2 = G, \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial z} - \dfrac{\partial a}{\partial\sigma} + \dfrac{\beta}{\sqrt{\sigma}} = 0, \quad \dfrac{\partial\beta}{\partial z} - \dfrac{\partial b}{\partial\sigma} - \dfrac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} = 0, \end{cases}$$

d'où l'on peut tirer les valeurs de toutes les dérivées premières des quatre fonctions en question.

II. Soient $(\xi, \eta, \zeta)$ un point qui décrit une surface admettant l'élément linéaire (1); X'', Y'', Z'' les cosinus directeurs de la normale en ce point; con-

sidérons, outre la forme bien connue

$$c_{11}\,dz^2 + 2c_{12}\,dz\,d\sigma + c_{22}\,d\sigma^2 = dX''\,d\xi + dY''\,d\eta + dZ''\,d\zeta,$$

les quantités

$$X = \frac{\beta\dfrac{\partial\xi}{\partial z} - b\dfrac{\partial\xi}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}}, \qquad Y = \frac{\beta\dfrac{\partial\eta}{\partial z} - b\dfrac{\partial\eta}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}}, \qquad Z = \frac{\beta\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} - b\dfrac{\partial\zeta}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}},$$

$$X' = \frac{a\dfrac{\partial\xi}{\partial\sigma} - \alpha\dfrac{\partial\xi}{\partial z}}{\sqrt{\Delta}}, \qquad Y' = \frac{a\dfrac{\partial\eta}{\partial\sigma} - \alpha\dfrac{\partial\eta}{\partial z}}{\sqrt{\Delta}}, \qquad Z' = \frac{a\dfrac{\partial\zeta}{\partial\sigma} - \alpha\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}}{\sqrt{\Delta}}.$$

Les neuf quantités X, Y, Z, X′, Y′, Z′, X″, Y″, Z″ sont les paramètres d'une substitution orthogonale (*Voir* Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, IIe Partie, p. 377).

Désignons par E la forme quadratique

$$(4) \qquad E = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = e_{11}\,du^2 + 2e_{12}\,du\,dv + e_{22}\,dv^2,$$

et supposons X, Y, Z (coordonnées d'un point qui varie sur la sphère de rayon 1) exprimées en fonction de deux paramètres $u$, $v$ : nous chercherons $z$ et $\sigma$ en fonction de ces mêmes paramètres. On a, à cet égard, les résultats suivants :

1° $\sigma$ n'est autre que le premier paramètre différentiel de $z$ relativement à E,

$$(5) \qquad \sigma = \Delta(z) = \frac{e_{11}\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 - 2e_{12}\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} + e_{22}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2}{e_{11}e_{22} - e_{12}^2};$$

2° La fonction $z$ se détermine par une équation du second ordre invariante formée à l'aide de E;

3° Cette équation étant intégrée, la surface cherchée s'obtient par des quadratures.

Le premier résultat s'obtient en calculant la forme (4), à l'aide des formules établies au n° I. Si l'on désigne ensuite par $\Delta(\varphi, \psi)$ le paramètre mixte [analogue à (5)] des fonctions $\varphi$ et $\psi$, on trouve

$$(6) \qquad X' = -\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\sigma}}, \qquad Y' = -\frac{\Delta(z, Y)}{\sqrt{\sigma}}, \qquad Z' = -\frac{\Delta(z, Z)}{\sqrt{\sigma}},$$

d'où

$$(7) \qquad d\xi = \left[aX - b\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]dz + \left[\alpha X - \beta\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]d[\Delta(z)],$$

et les formules analogues pour $d\eta$, $d\zeta$.

Les conditions d'intégrabilité de la différentielle (7) et des deux autres analogues se réduisent *à une seule*, qui est l'équation du problème. $\Delta_2(z)$, $J(z)$, $\theta(z)$ étant certains paramètres différentiels *relatifs à la forme* E, cette équa

tion est

$$(8)\qquad a\sigma + 2\alpha\sigma\,\Delta_2(z) + \frac{b + 2\alpha\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}\,J(z) - 2\beta\sqrt{\sigma}\,\theta(z) = 0,$$

où $\sigma$ doit être remplacé par $\Delta(z)$.

$a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ étant des fonctions connues de $z$, $\sigma$, cette équation est une équation de Monge-Ampère.

III. En considérant la seconde série de quantités X′, Y′, Z′, au lieu de X, Y, Z on aurait une équation tout analogue.

On passe de l'une de ces équations à l'autre par une transformation de contact définie par les équations (6) et leurs analogues.

IV. Formes diverses de l'équation. En prenant pour coordonnées sur la sphère de rayon 1, les coordonnées symétriques $x$, $y$, on trouve

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(r + \frac{2y}{1+xy}p - \rho p^2\right)\left(t + \frac{2x}{1+xy}q - \rho q^2\right)\\ &\qquad - \left(s - \frac{\tau}{\sigma}pq\right)\left(s - \frac{\tau_1}{\sigma}pq\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

$\rho$, $\tau$, $\tau_1$ étant des fonctions connues de $z$, $\sigma$.

V. L'application de la méthode de Monge conduit à déterminer l'intégrale intermédiaire $\varphi = C$ par le système

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \left(\rho p^2 - \frac{2yp}{1+xy}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\tau}{\sigma}pq\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\tau_1}{\sigma}pq\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \left(\rho q^2 - \frac{2xq}{1+xy}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0,$$

ou par le système analogue obtenu en permutant $x$ et $y$ d'une part, $p$ et $q$ de l'autre. Il en résulte que de toute intégrale $\varphi(x, y, z, p, q)$, on déduira l'intégrale $\varphi(y, x, z, q, p)$. Ces intégrales ne peuvent exister que si l'élément linéaire donné a la forme $t^2\,du^2 + (lt^2 + m)\,dt^2$, c'est-à-dire dans le cas du paraboloïde de révolution.

VI. Si, d'autre part, on cherche quand l'équation (9) est linéaire par rapport aux dérivées secondes et ne contient pas les dérivées premières, on constate qu'alors elle prend la forme

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{f(z)}{(1+xy)^2},$$

l'élément linéaire correspondant étant $[d\sigma - 2f(z)\,dz]^2 + 4\sigma\,dz^2$.

Pour $f(z) = \beta(1-\beta)z$ ou $f(z) = e^z + 2$, on a des équations intégrables par des méthodes connues. Mais ces cas de résolubilité du problème ont également été indiqués. C'est néanmoins un fait digne de remarque que l'équation connue des surfaces applicables puisse se réduire à une autre qui admet dans certains cas des intégrales intermédiaires, alors que la première n'en admet pas.

*Hadamard* (*J.*). — Mémoire sur l'élimination. (201-238).

Le résultant de plusieurs équations algébriques, tel qu'il s'obtient par la méthode des fonctions symétriques, semble dépendre de l'ordre dans lequel on range les équations données. La recherche de la loi de cette dépendance importe à toute la théorie de l'élimination.

I. Le calcul, sous forme symbolique, du résultant de deux formes binaires, ou, plus généralement, l'expression symétrique des fonctions symétriques des facteurs d'une forme binaire, dépend de la question suivante :

*La forme*

$$(1) \qquad f(u_2, -u_1) = (u_1 x_1^{(1)} + u_2 x_2^{(1)}) \ldots (u_1 x_1^{(m)} + u_2 x_2^{(m)})$$

*étant représentée symboliquement par* $(au)^m$ *ou* $u_\alpha^m$, *exprimer, en fonction de* $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}; u_1^{(2)}, u_2^{(2)}; \ldots; u_1^{(p)}, u_2^{(p)}$ *et des symboles* $a$ *ou* $\alpha$, *la quantité* $\Sigma\Pi\gamma_k^i$, *où l'on a*

$$(2) \qquad \gamma_k^i = u_1^{(i)} x_1^{(k)} + u_2^{(i)} x_2^{(k)},$$

*et où, dans chaque produit* $\Pi$, *l'indice* $i$ *varie de* $1$ *à* $p = mm'$, *chaque couple* $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ *figurant dans* $m'$ *facteurs et la sommation* $\Sigma$ *étant étendue aux* $m!$ *permutations de ces couples.*

Cette expression peut s'obtenir sous différentes formes, car entre les symboles tels que $u_\alpha$ existent des identités bien connues. Mais certaines de ces formes doivent être préférées aux autres. Supposons, en effet, qu'on exprime les $u_\alpha$ en fonction des $\gamma_k^i$ à l'aide de la formule

$$u_\alpha^{(1)} u_\alpha^{(2)} \ldots u_\alpha^{(m)} = \frac{1}{m!} \Sigma \gamma_1^1 \gamma_2^2 \ldots \gamma_m^m$$

(la sommation étant relative aux $m!$ permutations des indices inférieurs).

L'expression considérée $\Phi$ devra se changer en une expression $P_1$ identique à $P = \Sigma\Pi\gamma_k^i$. Si $P_1 = P$ est une identité *par rapport aux* $\gamma$ [et non pas seulement une relation qui devient identique lorsqu'on remplace les $\gamma$ par leurs valeurs (2)], l'expression $\Phi$ sera dite *essentiellement équivalente*. Une telle expression conserve sa forme pour un nombre quelconque $h$ de variables, c'est-à-dire que, si l'on pose

$$\gamma_k = u_1 x_1^{(k)} + \ldots + u_h x_h^{(k)}$$

et

$$u_\alpha^m = \prod_{k=1}^{m} \gamma_k,$$

l'expression $\Phi$, si elle est essentiellement équivalente, représentera encore, dans ces nouvelles conditions, la quantité $\Sigma\Pi\gamma_k^i$. La réciproque est d'ailleurs vraie, et montre l'existence d'une expression symbolique essentiellement équivalente pour toute expression P. On peut peut même trouver pour le résultant de deux formes binaires une forme symbolique qui soit essentiellement équivalente, tant par rapport à l'une que par rapport à l'autre des formes données.

Soient maintenant trois équations à deux inconnues, de degrés $m_1, m_2, m_3$. Soient $x^{(i)}, y^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m_1 m_2)$ les solutions communes aux deux pre-

mières. Substituons ces valeurs dans le premier membre de la troisième équation. Le produit $P_3$ des résultats obtenus s'exprimera rationnellement en fonction des coefficients des équations données, avec un dénominateur, lequel est la puissance $m_3^{\text{ième}}$ du résultant $R_{12}^0$ des termes de plus hauts degrés des deux premières équations. On nommera *résultant* le produit $R_{123} = P_3(R_{12}^0)^{m_3}$ et il s'agit de comparer ce produit aux produits analogues $R_{231}$, $R_{312}$. On y arrive en retranchant du premier membre de la troisième équation une constante arbitraire $\lambda$ et étudiant l'équation en $\lambda$ obtenue en faisant $R_{123} = 0$.

Plus généralement, et, prenant la question au point de vue projectif, supposons qu'on ait défini le résultant de $n$ polynomes homogènes à $n$ inconnues. On en déduit aisément le résultant $R_{12\ldots n}^u$ de $n$ polynomes homogènes à $n+1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ et du polynome du premier degré

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_{n+1} x_{n+1},$$

résultant qui est rationnel par rapport aux coefficients de $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et qui, d'autre part, considéré comme fonction des $u$, peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad R_{12\ldots n}^u = \prod_i (u_1 x_1^{(i)} + \ldots + u_{n+1} x_{n+1}^{(i)}),$$

les $x_1^{(i)}, \ldots, x_{n+1}^i$ étant, pour chaque indice $i$, $n+1$ nombres déterminés à un même facteur arbitraire près, avec cette condition que le produit de tous les facteurs arbitraires relatifs aux différents indices soit égal à l'unité.

Soit enfin un $n+1^{\text{ième}}$ polynome $f_{n+1}$ de degré quelconque par rapport aux mêmes inconnues : le résultant $R_{12\ldots n(n+1)}$ des polynomes $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ sera le produit des résultats de substitution, dans $f_{n+1}$, des différents systèmes de quantités $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n+1}^{(i)}$ définis par l'identité (3).

On saurait exprimer, dans tous les cas, ce résultant sous forme symbolique si l'on savait trouver, pour le résultant de deux formes *binaires*, une expression essentiellement équivalente.

Si enfin on veut comparer le résultant $R_{12\ldots n(n+1)}$ à celui qu'on en déduirait par une permutation quelconque des indices, on ramènera (par une méthode analogue à celle qui a été indiquée pour $n+1=3$) le problème au cas où les polynomes donnés sont des puissances exactes de polynomes linéaires, cas où il devient intuitif : on voit ainsi que le rapport des deux valeurs du résultant est $(-1)^{s m_1 m_2 \ldots m_{n+1}}$, où $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$ sont les degrés des polynomes donnés et $s$ un entier pair ou impair en même temps que la permutation considérée.

On peut même voir comment cette conclusion devra être modifiée lorsque les équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\ldots$, $f_{n+1} = 0$ ont une solution commune. On est ainsi conduit à une certaine identité relative à trois courbes qui passent par un même point.

II. *Applications géométriques.* — $x^{(i)}, y^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, mm')$ désignant les coordonnées des différents points d'intersection de deux courbes de degré $m$, $m'$, les considérations précédentes donnent évidemment une expression du produit $\prod_i F(x^{(i)}, y^{(i)})$, où F est une fraction rationnelle quelconque. On en déduit immédiatement les résultats connus de Laguerre et d'Elling Holst.

Mais on peut également exprimer, à l'aide des mêmes principes, la somme $\sum_i F(x^{(i)}, y^{(i)})$. Il suffit (F étant supposé égal au quotient des deux polynomes U et V) d'utiliser l'identité $\frac{U}{V} + \frac{d}{d\lambda}_{\lambda=0} \log(V + \lambda U)$. On obtient ainsi, pour la somme cherchée, l'expression qui a été établie par M. Humbert à l'aide des fonctions fuchsiennes.

On peut supposer également que la fonction dont on doit sommer les valeurs soit l'élément différentiel d'une intégrale abélienne. On calcule ainsi, conformément au théorème d'Abel, des sommes d'intégrales abéliennes ayant pour limites d'intégration les points d'intersection d'une courbe fixe avec des courbes variables; la formule que l'on retrouve est la formule fondamentale de M. Humbert

$$\sum I = -\sum \mathcal{E}\left[\frac{dI}{dt}\log\left(\frac{F}{\Phi}\right)\right],$$

I étant l'intégrale abélienne donnée, $F = 0$ et $\Phi = 0$, les courbes qui définissent les limites d'intégration, $\mathcal{E}$ un résidu par rapport au paramètre variable $t$.

## *Liouville* (*R.*). — Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points. (239-284).

Après le nouveau cas d'intégrabilité découvert par Mme Kowalewski, la question qui se pose, relativement au mouvement d'un corps pesant suspendu par un quelconque de ses points, est de savoir quels sont tous les autres cas où il existe une quatrième intégrale algébrique. M. Poincaré a d'ailleurs établi que cela ne peut avoir lieu si l'ellipsoïde d'inertie au point O de suspension n'est pas de révolution.

1. *L'intégrale cherchée, s'il y en a une algébrique, peut être mise sous forme entière.* — On remarque d'abord que les équations du problème présentent, par rapport à $t$ et aux six fonctions inconnues (savoir les composantes $p$, $q$, $r$ de la rotation instantanée et les cosinus directeurs $x_1$, $x_2$, $x_3$ de la verticale), une homogénéité particulière. Soit alors $\frac{R}{S}$ une intégrale rationnelle. La quantité $\frac{dR}{dt}$ s'exprime par un polynome entier qui doit être divisible par R. Le quotient $\lambda$, en vertu de l'homogénéité qui vient d'être signalée, ne peut être que de la forme $\lambda_0 p + \lambda_1 q + \lambda_2 r$ ($\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ constants, indépendants même du nombre $\mu$ qui exprime le poids du corps). $\lambda_0$ et $\lambda_1$ ne peuvent être que nuls; quant à $\lambda_2$, ou bien il est nul, et alors R est une intégrale entière, ou bien il est purement imaginaire, et le produit de R par le polynome imaginaire conjugué est une telle intégrale.

2. *Calcul des premiers termes de l'intégrale, lorsqu'elle existe.* — Si $\lambda_2$ n'est pas nul, on a $\lambda_2 = -\frac{A_1 ei}{A}$, où A, B = A et C sont les trois moments principaux d'inertie et $e$ un nombre rationnel. Si alors on développe R suivant les puissances de $\mu$

$$(1) \qquad R = R_0 + R_1\mu + \ldots + R_i\mu^i + \ldots,$$

on constate que $R_0 = \rho(p+iq)^c$, $\rho$ ne dépendant que de $r$ et de la variable $\omega = p^2 + q^2$. Les termes suivants $R_1, R_2, \ldots, R_i$ sont homogènes et de degré $i$ par rapport à $x_1, x_2, x_3$, homogènes et de degré $m - 2i$ par rapport à $p, q, r$.

En particulier, $R_1$ est de la forme $x_1 R'_1 + x_2 R''_1 + x_3 R'''_1$, où $R'_1, R''_1, R'''_1$ sont des fonctions de $p, q, r$. La condition imposée à R donne trois équations aux dérivées partielles auxquelles doivent satisfaire ces fonctions, et qu'on réduit à des équations différentielles linéaires ordinaires en introduisant la variable $y_1 = p + iq$ $\left(\text{d'où } y_2 = p - iq = \frac{\omega}{y_1}\right)$ et considérant $\omega$ et $r$ comme des constantes.

Il convient en même temps d'introduire, à la place de $x_1, x_2$, les variables $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_1 - ix_2$. Le système différentiel donné devient, dans ces conditions (la nouvelle variable indépendante étant $\tau = it$),

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{A\,dy_1}{d\tau} &= -A_1 r y_1 + \mu(z_1 \sin\varepsilon - x_3 \cos\varepsilon), & \frac{dz_1}{d\tau} &= x_3 y_1 - r z_1,\\ \frac{A\,dy_2}{d\tau} &= A_1 r y_2 + \mu(x_3 \cos\varepsilon - z_2 \sin\varepsilon), & \frac{dz_2}{d\tau} &= r z_2 - x_3 y_2,\\ \frac{2C\,dr}{d\tau} &= \mu \cos\varepsilon (z_2 - z_1), & \frac{2\,dx_3}{d\tau} &= y_2 z_1 - y_1 z_2. \end{aligned}\right.$$

3. *Étude d'une solution particulière remarquable.* — Dans le système précédent, si $y_1$, $z_1$ et $x_3$ sont nuls initialement, ils sont nuls constamment. Dans ces conditions, $y_2$, $z_2$ et $r$ s'obtiennent aisément par des quadratures. On connaît ainsi toute une catégorie de solutions particulières du système, et l'on en aurait une seconde en permutant $y_1$ et $y_2$, $z_1$ et $z_2$.

Les solutions infiniment voisines de celles que l'on vient ainsi d'obtenir dépendent d'un système linéaire aisé à former et qui s'intègre par des quadratures. Si le système (2) admet une intégrale algébrique, il en sera forcément de même de ce système auxiliaire : or il est bien aisé de reconnaître dans quels cas il peut en être ainsi. On trouve ainsi que, si l'on n'a pas $\cos\varepsilon = 0$ (cas classique du corps de révolution suspendu par un point de son axe) :

1° $\sin\varepsilon$ doit être nul; autrement dit, le centre de gravité appartient à l'équateur de l'ellipsoïde d'inertie au point de suspension;

2° Le rapport $\frac{2C}{A}$ doit être entier.

4. *Calcul des divers termes qui doivent composer l'intégrale* R. *Propriétés des coefficients.* — R étant une intégrale entière (par conséquent $\lambda$ étant nul) et cette intégrale étant développée sous la forme (1), les polynomes $R_i$ successifs se déterminent par des équations qui, comme celles auxquelles on était conduit dans la détermination de $R_1$ (n° 2), deviennent des équations différentielles linéaires *ordinaires*, lorsqu'on considère $\omega$ et $r$ comme des constantes et $y_1$ comme une variable indépendante. De plus, les systèmes adjoints des systèmes ainsi obtenus se ramènent à ceux qui sont intervenus dans le calcul de $R_1$.

5. *Expression des termes qui composent l'intégrale* R, *dont l'existence est supposée. Mode d'achèvement des calculs qui s'y rapportent.* — L'étude des systèmes linéaires précédents et de leurs adjoints donne, en général, pour

ces systèmes, des solutions possédant la forme voulue, c'est-à-dire où les fonctions inconnues sont des polynomes.

Mais les propriétés des systèmes en question dépendent des quantités $\omega$ et $r$ (qui sont considérées en ce moment comme des paramètres) ou plutôt du rapport $w = \frac{\omega}{r^2}$. Pour certaines valeurs de ce rapport, les équations caractéristiques ont des racines égales et les conclusions précédentes pourraient être mises en défaut.

6. *Valeurs exceptionnelles du rapport $w$. Elles introduiraient des logarithmes, qui disparaissent après un choix convenable des arbitraires dont on dispose.* — Pour que ces valeurs exceptionnelles de $w$ n'introduisent que des puissances de $y_1$ et non des logarithmes, il faut que certaines conditions soient remplies par les seconds membres des équations. Peut-on satisfaire à ces conditions par un choix convenable des éléments laissés encore arbitraires jusqu'ici?

La réponse est affirmative. Elle résulte du fait constaté au n° 3, à savoir que les conditions $\sin\varepsilon = 0$, $\frac{2C}{A}$ = nombre entier suffisent pour que le système auxiliaire possède une intégrale algébrique.

Dès lors, ces mêmes conditions sont également suffisantes, en ce qui regarde le système donné.

7. *Solutions développées en séries quand,* $\sin\varepsilon$ *étant nul, le rapport* $\frac{2C}{A}$ *demeure quelconque. Convergence dans les cas ordinaires. Conséquences relatives aux propriétés des intégrales, lorsque* $\frac{2C}{A}$ *devient un nombre entier.*

8. *Remarques sur les moyens d'achever la détermination de l'intégrale. Proposition relative aux systèmes différentiels ayant des intégrales uniformes.* — L'auteur ne poursuit pas, quant à présent, le calcul complet de l'intégrale. Il rattache ses recherches actuelles à une remarque générale : Soient $m-1$ équations différentielles du premier ordre à $m$ variables $x_1$, $x_2, \ldots, x_m$. Supposons qu'on connaisse $m-2$ intégrales uniformes permettant d'exprimer les inconnues en fonction de deux d'entre elles et de $m-2$ constantes arbitraires $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_m$. Considérons le tableau rectangulaire formé avec les dérivées partielles de $x$ par rapport aux $\alpha$ et soit $\Delta_i (i = 2, 3, \ldots, m)$ le déterminant formé par la suppression des colonnes de rang 1 et de rang $i$ dans ce tableau. Les $\Delta$ peuvent être considérés comme définis par un système d'équations différentielles linéaires et ce système doit présenter, au point de vue de la théorie des groupes, certaines propriétés si le système donné admet des intégrales uniformes.

## *Hurwitz* (*A.*). — Sur l'intégrale finie d'une fonction entière. (285-312).

On nomme (avec Abel) *intégrale finie* d'une fonction $G(z)$ la solution la plus générale de l'équation

$$F(z+1) - F(z) = G(z). \tag{1}$$

Il suffit d'ailleurs, évidemment, de connaître une solution particulière de cette équation, et d'ajouter à cette solution une fonction périodique quelconque.

Dans le cas où $G(z)$ est une fonction entière, M. Guichard a montré, et M. Hurwitz se propose de montrer par une voie différente, que le problème a toujours une solution entière.

$\varphi_n(z)$ étant la fonction de Bernoulli, c'est-à-dire le polynome de degré $n+1$ nul avec $z$ et tel que $\varphi_n(z+1) - \varphi_n(z) = z^n$, le théorème est évident si la série

$$F = a_0\varphi_0(z) + a_1\varphi_1(z) \ldots + a_n\varphi_n(z) + \ldots$$

(où

$$(2) \qquad G = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots)$$

converge uniformément.

Mais, s'il en est autrement, on pourra rendre la série convergente par un procédé tout analogue à celui qui sert à la démonstration du théorème de M. Mittag-Leffler, en retranchant de chaque terme une fonction périodique convenable.

En effet, le polynome $\varphi_n(z)$ est le coefficient de $\zeta^n$ dans le développement de la fonction

$$f(z, \zeta) = \frac{e^{z\zeta} - 1}{e^{\zeta} - 1},$$

de sorte que $\varphi_n(z)$ est représenté par l'intégrale

$$\varphi_n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int f(z, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}},$$

prise suivant un petit cercle C entourant l'origine.

Si nous nommons $\psi_{n,r}(z)$ la même intégrale prise suivant un contour englobant les points o, $\pm 2\pi i$, $\pm 4\pi i$, $\pm 2r\pi i$, mais laissant tous les autres pôles de $f$ à son extérieur, la différence $\varphi_n - \psi_{n,r} = n!\sum_1^r \frac{1 - e^{2ik\pi z}}{(2ki\pi)^{n+1}}$ sera une fonction périodique de $z$ et, d'autre part, on aura

$$[\psi_{n,r}(z)] < \frac{16n!}{\pi^{n+1}}\,\frac{\rho^{2r+1}}{(2r+1)^n},$$

$\rho$ restant fini quand $z$ est dans une région finie du plan et ne dépendant que de cette région.

Dès lors, on constate aisément que, si la série (2) représente une fonction entière, c'est-à-dire si $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$, la série

$$(3) \qquad \sum_n \psi_{n,r}(z)$$

converge uniformément pour $r = n$ et satisfait à l'équation (1).

Mais si la série (2) est assez rapidement convergente, il n'est pas nécessaire que $r$ croisse indéfiniment avec $n$, et l'on peut prendre $r$ constant. C'est ce

qui arrive si la série $\sum n! a_n z^n$ a un rayon de convergence différent de zéro, et dans ce cas seulement.

La dérivée d'une fonction F satisfaisant à l'équation (1) est évidemment une solution de l'équation $F'(z+1) - F'(z) = G'(z)$. L'auteur trouve la relation entre la solution ainsi obtenue et celle que donnerait l'application directe de la méthode à l'équation dérivée.

Un exemple intéressant est fourni par la fonction $(e^{2i\pi z} - 1)\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \Psi(z)$, qui satisfait à l'équation $\Psi(z+1) - \Psi(z) = \dfrac{e^{2i\pi z} - 1}{z}$. L'application de la méthode générale donne une fonction qui ne diffère de $\Psi(z)$ que par une quantité périodique. On peut, ici, déterminer cette quantité périodique. On arrive ainsi à la série de M. Lerch

$$\sin \pi z \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\pi}{2} \cos \pi z + [\log 2\pi - \Gamma'(1)] \sin \pi z = \sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \sin(2n+1)\pi z$$
$$(0 < z < 1).$$

Un certain nombre d'équations fonctionnelles ramenées par M. Guichard à l'équation (2) peuvent se résoudre directement, par un procédé analogue à celui qui a servi pour l'équation (1).

Si $G(z)$ était une fonction méromorphe, l'équation (1) posséderait une solution également méromorphe. Il en résulte que l'équation $\dfrac{F(z+1)}{F(z)} = \Phi(z)$ admet des solutions méromorphes si $\Phi(z)$ est méromorphe. Plus généralement, il en est de même de l'équation

$$\varphi_1(z) F(z+1) + \varphi_0(z) F(z) = \varphi(z),$$

où $\varphi$, $\varphi_0$, $\varphi_1$ sont des fonctions méromorphes données.

## *Poincaré* (*H.*). — Sur la polarisation par diffraction (seconde Partie). (313-356).

Suite du Mémoire publié dans le tome XVI (pages 297-340).

L'auteur complète ses résultats et les compare à ceux que M. Sommerfeld a publiés depuis dans les *Mathem. Annalen*.

VII. *Étude du cas où la ligne focale de la lentille ne coïncide plus avec le biseau de l'écran.* — Cette nouvelle hypothèse ne change rien à l'équation précédemment obtenue (où l'on ne doit prendre que la partie réelle)

$$Z = \sum a_n e^{ipt} J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin \frac{n\omega}{2},$$

laquelle donne, pour $\alpha\rho$ très grand,

$$Z = \sum \frac{a_n \sin \frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{i\left(\alpha\rho + pt - \frac{n+1}{4}\pi\right)} + \sum \frac{a_n \sin \frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{i\left(pt - \alpha\rho + \frac{n+1}{4}\pi\right)}.$$

expression dont le premier terme correspond au faisceau incident et le second aux faisceaux transmis.

Seulement les $a_n$ ne sont plus réels. Le faisceau incident présente des différences de phases : l'argument de la quantité

$$F(a) = \sum \frac{a_n \sin \frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{4}}$$

est égal à $l\cos(\omega - \omega_0)$, où $\frac{l}{\alpha}$ et $\omega_0$ sont les coordonnées polaires du point situé sur la ligne focale $\left(\text{la longueur d'onde étant } \frac{2\pi}{\alpha}\right)$.

Cette fonction F définit la phase et l'intensité de la lumière incidente, celles de la lumière transmise étant définies par la fonction

$$F_1(\omega) = \sum \frac{a_n \sin \frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{+i\frac{(n+1)\pi}{4}}.$$

Le calcul de cette dernière se ramène à celui de la fonction

$$\Phi(\omega) = \sum \frac{a_n \cos \frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{4}}.$$

On trouve

$$\Phi(\omega) = \int_0^{2\pi} F(\alpha) \frac{d\alpha}{4\pi}\left(\cot\frac{\omega+\alpha}{4} + \cot\frac{\alpha-\omega}{4}\right),$$

où l'intégrale du second membre doit recevoir sa valeur principale.

Dès que la ligne focale est notablement distante du biseau, la quantité $l$ (laquelle contient en facteur l'inverse de la longueur d'onde) est très grande. On conviendra, dès lors, de regarder les quantités qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{l}$ comme infiniment petites, $\frac{1}{\sqrt{l}}$ étant regardé comme l'infiniment petit principal. Dans ces conditions, si l'on n'a d'abord égard qu'aux termes finis, on constate que la lumière diffractée est négligeable; quant à l'étude des termes du premier ordre, elle conduit à des résultats identiques à ceux du n° III (Mémoire précédent), c'est-à-dire à ceux qui sont relatifs aux cas où la mise au point était parfaite; seulement les seuls rayons qui interviennent sont ceux qui passent très près du bord de l'écran.

VIII. *Examen du cas où le biseau de l'écran n'est pas parfait.* — On assimile la section droite de ce biseau à une branche d'hyperbole très aplatie; on est alors conduit à prendre un système de coordonnées elliptiques définies par l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

$\lambda$ et $\mu$ seront les coordonnées d'un point quelconque, $\lambda$ étant le paramètre qui donne une ellipse et $\mu$ celui qui donne une hyperbole, $\mu = \mu_0$ correspondant à

l'hyperbole donnée. $c$ et $1 - \frac{\mu_0}{c}$ sont très petits. L'équation $\Delta u + \alpha^2 u = 0$ admet alors des solutions de la forme LM, L et M étant des fonctions de $\lambda$ et de $\mu$ respectivement, la première satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad (\lambda^2 - c^2)\frac{d^2 L}{d\lambda^2} + \lambda \frac{dL}{d\lambda} + \alpha^2(\lambda^2 - k) L = 0,$$

où $k$ est une constante quelconque; la seconde à l'équation analogue où $\lambda$ est remplacé par $\mu$. Ces équations, qui se ramènent à une équation bien connue en Mécanique céleste, peuvent aussi être considérées comme des formes limites de l'équation de Lamé.

Elles admettent, chacune, dans le voisinage des points singuliers $+c$ et $-c$, une solution paire par rapport à la variable $\sqrt{\lambda - c}$ ou $\sqrt{\mu + c}$ et une solution impaire par rapport à cette variable. Pour que LM soit une fonction uniforme de $x$ et de $y$, il faut combiner des solutions de même parité. On devra, d'ailleurs, déterminer $k$ de manière que, aux limites, on ait $M = 0$ ou $\frac{\partial M}{\partial \mu} = 0$, suivant que le plan de polarisation est parallèle ou perpendiculaire au plan d'incidence.

IX. Pour $\lambda$ très grand, L est de la forme $\frac{A e^{i\alpha\lambda} + B e^{-i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$, où A et B sont des constantes qui restent encore à obtenir, ou plutôt dont il faut obtenir le rapport. Celui-ci est déjà connu dans plusieurs cas, savoir :

1° Si $c = 0$; alors L est une fonction de Bessel et on a $\frac{B}{A} = e^{\frac{i\pi}{2}\left(\frac{m\pi}{\omega_0} + 1\right)}$ ($m$ étant entier).

2° Si $\omega_0 = \pi$, alors l'écran se réduit à un plan et les conclusions du n° III sont applicables.

Dans tous les cas, $\left|\frac{B}{A}\right| = 1$. Car la valeur approchée de L pour $\lambda$ très grand doit être réelle.

X. Soient $L = F_1\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k\right)$ la solution de l'équation (1) qui est paire par rapport à $\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}$; $L = F_2\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k\right)$ impaire par rapport à cette même quantité.

Les solutions de notre problème peuvent se diviser en :

1° Solutions de la première sorte : Plan de polarisation parallèle à celui d'incidence; M fonction impaire de $\omega$. Ce sont les solutions impaires qui interviendront seules et on déterminera $k_i$ par l'équation

$$(A_1) \qquad F_2\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right) = 0;$$

Deuxième sorte : Les deux plans parallèles; M pair. On déterminera $k_i$ par

$$(A_2) \qquad F_1\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right) = 0;$$

Troisième sorte : Les deux plans perpendiculaires; M impair. On aura

$$(A_3) \qquad F'_2\left(-\frac{\mu_0}{c},\ \alpha^2 c^2,\ \alpha^2 k_i\right) = 0;$$

Quatrième sorte : Les deux plans perpendiculaires; M pair. On aura

$$(A_4) \qquad F'_1\left(-\frac{\mu_0}{c},\ \alpha^2 c^2,\ \alpha^2 k_i\right) = 0.$$

On constate : 1° que ces équations ne peuvent avoir que des racines réelles et positives; 2° que $(A_1)$ et $(A_3)$ ne peuvent avoir de racines communes; de même pour $(A_1)$ et $(A_2)$, $(A_2)$ et $(A_4)$, $(A_3)$ et $(A_4)$.

Or, pour $c^2 = 0$, les racines de $A_1$ et de $A_3$ sont réelles et se séparent mutuellement. Donc il en sera de même pour toutes les valeurs des données. Le même raisonnement s'applique à $(A_1)$ et $(A_2)$; $(A_2)$ et $(A_4)$; $(A_3)$ et $(A_4)$.

A toute racine $k_i$ correspond une fonction $M_i(\omega)$ $\left(\text{où l'on a } \cos\omega = -\frac{\mu}{c}\right)$ et nous admettrons que toute fonction paire ou impaire de $\omega$ peut être développée suivant les solutions $M_i$. En particulier, $F(\omega)$ sera de la forme

$$\Sigma A_n C_n M_n$$

(où $A_i$, $B_i$ sont les valeurs des coefficients A et B du n° IX qui correspondent à la solution $M_i$) et $F_1(\omega)$ sera $\Sigma B_n C_n M_n$. Connaissant $F(\omega)$, on pourra avoir les $C_n$ et en déduire $F(\omega)$ si l'on connaît les rapports $\frac{B_n}{A_n} = e^{-i\theta_n}$.

Il est vrai que l'on est conduit ainsi à introduire une série $\Sigma_1$ qui est divergente. Mais, si l'on désigne par $S_1$ la valeur de cette série pour $c = 0$, la série $\Sigma_1 - S_1$ converge, ce qui permet de tourner la difficulté. Étude du cas de $c$ très grand.

XI. *Étude du cas où les ondes sont sphériques et concentrées en un point du tranchant du biseau, en adoptant d'ailleurs, pour le reste, les hypothèses les plus simples.* — On passe alors aux coordonnées polaires en remplaçant $x$, $y$, $z$, par $\rho\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2}$, $\rho\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2}$, $\rho\mu$ et l'on cherche des solutions de la forme $R(\rho)M(\mu)\sin\frac{m\varphi}{2}$ et l'on trouve que $M(\mu)$, multiplié par $(\mu^2-1)^{-\frac{m}{4}}$, doit donner un polynome entier. Si $m$ est pair, $M\sin\frac{m\varphi}{2}$ est une fonction sphérique ordinaire et $R\sqrt{\rho}$ une fonction de Bessel.

Dans les cas où il y a symétrie, on retrouve ainsi des résultats analogues à ceux du n° III. Dans le cas général, mais en supposant le faisceau incident très délié, le faisceau diffracté se répartit sur un cône de révolution ayant le biseau pour axe : résultat qu'il serait intéressant de vérifier expérimentalement.

## *Borel* (*E.*). — Sur les zéros des fonctions entières. (357-396).

On connaît aujourd'hui la relation qui existe entre le genre d'une fonction entière et l'ordre de grandeur de cette fonction pour les grandes valeurs de la variable, en ce sens que, connaissant ce dernier, on peut avoir une limite supérieure du nombre des zéros inférieurs à une quantité donnée. Mais il reste

à savoir si le nombre des zéros atteint effectivement cette limite supérieure. Il semble, au premier abord, qu'on ne puisse rien affirmer de général à cet égard, puisqu'il existe des fonctions entières croissant aussi vite qu'on veut et n'ayant aucun zéro. Mais ces fonctions sont exceptionnelles : on va voir que, parmi toutes les fonctions entières de la forme $\varphi_1(z)\,G z - \varphi_2(z)$, où G est une fonction entière donnée et $\varphi_1$, $\varphi_2$ des fonctions entières quelconques croissant beaucoup moins rapidement que G, il y en a *au plus une* telle que le nombre de ses zéros soit notablement plus petit que la limite supérieure en question. C'est la généralisation du théorème connu de M. Picard.

Première Partie : *La décomposition en facteurs primaires.* — Les facteurs primaires étant, comme d'habitude, pris sous la forme $F_p\left(\frac{z}{a_n}\right)$, où

$$F_p(u) = (1-u)\,e^{\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}},$$

la fonction entière $G(z)$ considérée sera représentée par un produit de la forme

$$G(z) = e^{H(z)}\,\Pi\,F_p\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Il importera, dans les raisonnements actuels, de prendre pour $p$ (en fonction de $n$) la valeur strictement nécessaire pour assurer la convergence.

Si d'abord $p$ est une constante et $H(z)$ un polynome, de manière que la fonction soit de genre fini, il convient d'introduire un nombre $\rho$, dit *ordre* de la fonction, tel que la série $\sum \frac{1}{(a_n)^{\rho-\varepsilon}}$ soit divergente et la série $\sum \frac{1}{(a_n)^{\rho+\varepsilon}}$ convergente. Il existera alors une infinité de cercles dont les rayons R sont tels que le produit de facteurs primaires y ait partout un module plus grand que $e^{-R^{\rho+\varepsilon}}$. Mais ce produit est partout inférieur à $e^{R^{\rho+\varepsilon}}$. De sorte que le *minimum est au moins égal à l'inverse du maximum.*

On appellera *ordre apparent* d'une fonction entière, un nombre $\rho$ tel que la croissance de cette fonction soit de même ordre que celle de $e^{(z)^\rho}$. Si ce nombre $\rho$ n'est pas entier, *il est égal à l'ordre réel.*

Soit maintenant une exponentielle de la forme $e^{G(z)}$ et soient $A(r)$ le maximum des valeurs positives de G sur le cercle de rayon $r$, $B(r)$ le maximum des valeurs négatives de G sur le même cercle. On a aisément, pour $r > \rho$,

$$B(\rho) < 8\rho\,\frac{A(r)}{r-\rho}.$$

Il en résulte que l'on ne peut pas avoir constamment

$$B(r) > [A(r)]^2,$$

car ceci donnerait, pour $\varepsilon > 0$,

$$A(\rho+\varepsilon) > \varepsilon\,\frac{[A(\rho)]^2}{8\rho},$$

équation qui, en remplaçant successivement $\varepsilon$ par $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots$ et $\rho$ par

$\rho+\varepsilon,\ \rho+\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2},\ \ldots,\ \rho+\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}+\ldots+\frac{\varepsilon}{2^{n-1}},\ \ldots,$ conduirait, pour $A(\rho+2\varepsilon)$, à une valeur infinie.

L'auteur indique, en outre, que l'inégalité en question ne peut pas être vérifiée dans une série d'intervalles dont l'étendue totale, entre o et R, soit constamment supérieure à $k$R ($k$ étant un nombre positif quelconque) : remarque importante pour la suite.

Avant de passer au cas d'un produit de facteurs primaires, il convient de définir avec précision ce qu'on entend par *fonctions du même ordre de grandeur*. Cette définition est, dans une certaine mesure, arbitraire et dépend essentiellement de l'objet que l'on a en vue.

Au point de vue de la question actuelle, il y a lieu de dire que deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$ à croissance très rapide sont du même ordre, lorsque $F(x)$ est compris entre $[G(x)]^{1-\varepsilon}$ et $[G(x)]^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

On définit l'ordre de grandeur des fonctions à croissance très lente par celui de leurs fonctions inverses. Il est à remarquer que, de cette manière, deux fonctions (à croissance très lente) qui ne diffèrent que par une constante, peuvent être d'ordre différent.

On constate, moyennant ces définitions, que deux fonctions $f(X)$, $g(X)$, à croissance très lente, telles que l'on ait

$$f(X)=g(X)+\frac{1}{(\log X)^{\alpha}},$$

$\alpha$ étant un nombre positif, sont à peu près du même ordre de grandeur, en ce sens que, $F(x)$ et $G(x)$ étant leurs inverses, les inégalités

$$[G(x)]^{1-\varepsilon}<F(x)<[G(x)]^{1+\varepsilon}$$

sont vérifiées, sinon constamment, du moins abstraction faite d'intervalles dont l'étendue totale est finie.

Considérons, en particulier, un produit $\Pi(z)$ de facteurs primaires

$$\Pi(z)=\Pi F_{\rho}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Supposons $\rho=(\log n)^2$ et étudions la convergence du produit, laquelle se ramène à celle de la série

$$\sum\left[\frac{r}{(\alpha_n)}\right]^{\rho(|\alpha_n|)},$$

où $r$ est le module de $z$ et où $\rho$ est regardé comme une fonction, non de $n$, mais de $|\alpha_n|$. On constate que le reste de cette série, arrêtée au terme de rang $n$, est négligeable dans le cas où $\alpha_n$ est à croissance très lente, si $\alpha_n$ est de l'ordre de $n+\frac{1}{(\log n)^{\alpha}}$, $\alpha$ étant plus petit que 1. Ceci permet de comparer les plus grandes et les plus petites valeurs du produit considéré. Si $M(r)$ sont les premières, $N(r)$ les secondes et que $M(r)$ soit de l'ordre de $e^{r^{\rho}}$, $\frac{1}{N(r)}$ sera de l'ordre de $e^{-r^{\rho'}}$ où $\rho'$ est compris entre $\rho$ et $\rho^{\frac{1}{2}}$. Mais on aurait

pu, dans ces conclusions, remplacer 2 par un nombre quelconque supérieur à 1 (du moins en changeant la composition des facteurs primaires). On en conclut que $\log M(r)$ et $\log N(r)$ sont du même ordre de grandeur, au sens indiqué précédemment.

Il en résulte que, dans une fonction entière $G(z)$, mise, *d'après les règles précédentes*, sous la forme $\Pi(z)e^{H(z)}$, aucun des deux facteurs ne peut croître plus vite que $G(z)$.

Deuxième Partie : *Le théorème de M. Picard.* — On établit d'abord (par un procédé analogue à celui qui a été indiqué en commençant) une relation entre l'ordre de grandeur de la fonction et celui de sa dérivée.

Cela posé, considérons deux séries de fonctions entières $G_i(z)$, $H_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Supposons que ces fonctions croissent toutes moins vite que $e^{\mu(|z|)}$, et que toutes les différences $H_i - H_k$ croissent plus vite que $[\mu(|z|)]^2$. Si, alors, on a l'identité

$$G_1(z)e^{H_1(z)} + G_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + G_n(z)e^{H_n(z)} = 0,$$

il en résulte nécessairement $G_1 = G_2 = \ldots = G_n = 0$ : c'est ce qui peut se déduire des considérations précédentes.

Mais on peut aller plus loin et, conservant la même hypothèse sur les G, ne plus rien supposer sur l'ordre de croissance des H, si ce n'est que les différences $H_i - H_k$ croissent plus vite que $[\mu(|z|)]^2$.

Le théorème ainsi obtenu peut être considéré comme la généralisation du théorème connu de M. Picard sur les fonctions entières. Il entraîne, en effet, le corollaire suivant :

*Si $G(z)$ est une fonction entière donnée, $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ des fonctions entières telles que le logarithme des plus grandes valeurs de leur module croisse moins vite qu'une puissance déterminée, d'exposant inférieur à 1, du logarithme des plus grandes valeurs de $|G|$, parmi les équations de la forme*

$$\varphi(z)G(z) - \psi(z) = 0,$$

*il en est une au plus pour laquelle la limite supérieure du nombre des racines n'est pas atteinte.*

M. Borel reproduit ensuite la démonstration du théorème de M. Picard sous sa forme primitive, telle qu'il l'a donnée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1896), en la rattachant aux considérations générales précédentes.

Il termine en indiquant quelques points sur lesquels on pourrait se proposer de compléter les résultats.

*Bohlin* (*K.*). — Hugo Gyldén : Notice biographique avec quelques remarques sur ses méthodes scientifiques. (397-404).

## JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

LXIII^e Cahier; 1893 (1).

*D'Ocagne.* — Sur la détermination géométrique du point le plus probable donné par une système de droites non convergentes (1-25).

La position d'un point sur un plan est déterminée par la rencontre de plusieurs droites. Ces droites, à raison des erreurs d'observation et de tracé, au lieu de converger, forment un petit polygone à l'intérieur duquel il s'agit de déterminer la position la plus probable du point cherché.

L'auteur a trouvé pour ce point une construction, simplifiée depuis par M. Schols. Dans la première partie de son Mémoire il développe sa construction; dans la seconde il justifie la construction de M. Schols par un raisonnement plus direct que celui du savant hollandais. Son exposition est fondée sur la considération du *barycentre symétrique,* dont il fait connaître diverses propriétés, en outre de celles qui sont indispensables à son objet.

*Vaschy.* — Sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants (39-77).

On sait que Cauchy a appliqué les propriétés des résidus à l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants qui sont du premier ordre, par rapport à chacune des inconnues, et même à l'intégration des équations d'ordre supérieur. Toutefois, il n'a point développé d'une manière complète l'application de cette méthode aux systèmes d'équations d'ordre quelconque.

Dans le présent travail, M. Vaschy indique un procédé présentant une grande analogie avec les méthodes de résolution des équations algébriques du premier degré, et qui permet, au moyen d'une règle simple, d'intégrer un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et à un nombre quelconque d'inconnues.

*Autonne* (*L.*). — Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. (Premier Mémoire; Parties I et II.) (79-183).

Étant donnée une équation différentielle H dont le premier membre $F(x, y, y')$ est un polynome, on ne possède aucun moyen de reconnaître si son intégrale générale est algébrique, ni même si elle admet des intégrales algébriques. La difficulté serait tournée, si l'on connaissait une *limite supérieure* du degré d'une pareille intégrale, supposée exister. C'est cette limitation de degré qui fait l'objet des recherches de M. Autonne.

---

(1) Voir *Bulletin,* t. $XIX_2$, p. 46.

En s'occupant précédemment du cas où H est du premier degré, l'auteur avait été conduit à représenter cette équation par une surface $\mathcal{F}$ et les intégrales par des courbes *intégrantes* G tracées sur $\mathcal{F}$. Il fait encore usage dans le cas général de ce mode de représentation.

La première Partie du Mémoire est consacrée à l'étude de l'intégrante algébrique G de degré $n$ et de genre $p$, considérée en elle-même, indépendamment de la surface $\mathcal{F}$, à laquelle elle peut appartenir. Conformément aux théories d'Halphen, G est considérée comme l'intersection d'un cône et d'une surface monoïde. Il est démontré que les courbes G, si elles n'ont d'autres points multiples que des points doubles à tangentes distinctes, possèdent $6p + 2(n - 3)$ points d'inflexion, alors que les courbes gauches en sont généralement dénuées; qu'elles dépendent de $2n + 1 - p$ arbitraires au moins, et comportent au moins $2n - 9 - p$ invariants ou modules projectifs.

La seconde Partie, de beaucoup la plus importante, est consacrée à l'étude des intégrantes tracées sur une surface algébrique donnée $\mathcal{F}$ de degré N et surtout à la recherche du maximum pour le degré de l'intégrale algébrique. Par un point quelconque de $\mathcal{F}$ passe une intégrante et une seule; il y a exception pour $N(N^2 - 2N + 2)$ points *nodaux*, où peuvent passer plusieurs branches ou même une infinité de branches d'intégrantes. En un pareil point l'intégrante algébrique G présente deux branches simples, tangentes respectivement aux deux asymptotes de l'indicatrice de $\mathcal{F}$; mais elle peut présenter en outre une branche ayant en ce point plusieurs tangentes confondues avec une même asymptote de l'indicatrice.

M. Autonne se place dans le cas particulier où cette dernière branche multiple n'existe pour aucun des points nodaux, en sorte que G n'a d'autres points multiples que des points doubles à tangentes distinctes. Alors si l'*intégrante générale* est algébrique, elle n'aura *aucun* point multiple, et toute intégrante algébrique sera d'un degré $n$ qui ne pourra dépasser le plus grand entier contenu dans la fraction

$$\frac{N(N^2 + 6N + 11)}{3(N + 2)}.$$

Mais ce résultat, malgré tout son intérêt, ne constitue, comme l'explique l'auteur, qu'une réponse partielle à la question.

LXIV^e Cahier; 1894.

*Autonne* (*L.*). — Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. [Premier Mémoire (*suite et fin*).] (1-53).

Cette troisième et dernière Partie contient l'application des théories exposées dans les deux précédentes (Cahier LXIII). L'auteur traite les deux cas les plus simples : celui où $\mathcal{F}$ est une quadrique ($N = 2$) et celui où $N = 3$; pour la quadrique, le problème des intégrantes est complètement résolu.

Pour la cubatique $\mathcal{F}$, il commence par construire les quinze *points nodaux*; considérant ensuite les cubatiques auxquelles s'appliquent ses résultats, il montre que l'intégrante générale ne peut pas être algébrique et fait l'énumération des treize types d'intégrantes particulières algébriques que l'on peut

s'attendre à rencontrer. Comme exemples il construit l'intégrante non unicursale la plus simple (quintique de genre un) et quelques intégrantes unicursales.

*Moutard* (*Th.*). — Notes sur les équations aux dérivées partielles. (55-69).

L'objet principal de ces Notes est d'établir la proposition suivante :

*Étant donnée l'équation*

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + 2 B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots = 0,$$

*où* $A_1, A_2, \ldots, B_{12}, \ldots$ *sont des fonctions des variables* $x_1, x_2, \ldots$, *dans la région des valeurs de ces variables pour lesquelles la forme quadratique corrélative*

$$A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 + \ldots + 2 B_{12} t_1 t_2 + \ldots$$

*reste une forme définie, une fonction u, assujettie à y rester continue ainsi que ses dérivées et à vérifier l'équation, ne peut admettre ni maximum ni minimum; de sorte qu'il ne saurait exister deux fonctions distinctes satisfaisant à ces conditions et prenant les mêmes valeurs sur les confins de la région.*

Pour y arriver, l'auteur démontre que toute forme à $n$ variables satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

est nécessairement une forme indéfinie. A propos de ces formes, auxquelles il donne le nom de *formes harmoniques,* il énonce ce résultat curieux :

*Les formes harmoniques qui admettent un diviseur quadratique sont, en général, décomposables en un produit de facteurs quadratiques et de facteurs linéaires.*

*Humbert* (*G.*). — Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième degré. (123-149).

On sait que les cubiques gauches qui passent par cinq points de l'espace forment un système doublement infini et que le lieu des points de contact des cubiques du système avec un plan est une conique. On définit ainsi un système de coniques trois fois infini, c'est-à-dire un complexe de coniques, et chaque plan de l'espace renferme une conique du complexe.

Le présent Travail a pour but d'exposer quelques propriétés de ce complexe. Après en avoir donné sous une forme remarquablement simple l'équation générale, on étudie spécialement une courbe intéressante du septième ordre qui est la surface focale des coniques du complexe dont les plans passent par un même point; enfin on applique les résultats obtenus aux coniques situées sur la surface générale du troisième ordre, ce qui conduit, pour cette surface, à des propositions nouvelles.

*D'Ocagne* (*M.*). — Mémoire sur les suites récurrentes. (151-224).

Le problème principal qui s'offre dans la théorie des suites récurrentes est leur *intégration :* il consiste à obtenir une expression explicite du terme général, quand la suite est définie par une certaine échelle de récurrence et par des conditions initiales données.

Bien que la question pût sembler épuisée par la solution de Lagrange, qui exige la connaissance des racines de l'équation *génératrice*, et surtout par celle de M. D. André, où n'interviennent que les coefficients de cette équation, M. d'Ocagne a été conduit à compléter et à perfectionner la théorie des suites récurrentes par d'assez nombreuses contributions publiées dans divers recueils et qui reposent sur les deux remarques suivantes :

1° L'intégration de toutes les suites répondant à une même échelle peut se ramener à celle de l'une d'entre elles, quelles que soient leurs conditions initiales. On en peut choisir une (*suite fondamentale*) de manière à simplifier le plus possible les formules de transformation.

2° Pour l'étude des propriétés des suites fondamentales, on peut substituer à la formule de Lagrange une autre forme de l'expression de l'intégrale en fonction des racines de l'équation génératrice, qui a l'avantage de subsister sans modification, quel que soit le degré de multiplicité des racines de l'équation génératrice.

Dans le présent Mémoire, l'auteur reprend la théorie des suites récurrentes, fondée sur ces deux remarques, et qui n'était qu'esquissée dans ses travaux antérieurs : de la sorte, les résultats qu'il avait précédemment rencontrés se trouvent rapprochés, coordonnés, généralisés et complétés par un grand nombre de résultats nouveaux. Voici les titres des huit Sections du Mémoire :

Section I. — Définitions. Réduction des échelles.

Section II. — Les suites fondamentales. Intégration dans le cas général.

Section III. — Expression de l'intégrale au moyen des racines de l'équation génératrice. Décomposition du polynome générateur. Opérations sur les suites récurrentes.

Section IV. — Sommation des suites récurrentes. Étude de la convergence. Séries récurrentes.

Section V. — Le problème de l'interpolation dans les suites récurrentes.

Section VI. — Exemples de suites se ramenant aux suites récurrentes.

Section VII. — Quelques applications particulières relatives aux suites récurrentes du second ordre.

Section VIII. — Construction géométrique des termes d'une suite récurrente.

*Andrade* (*J.*). — Sur une détermination de l'irrationnelle $e^{\pi}$ par le calcul des chances et sur une identité numérique. (225-232).

2e série, 1er Cahier; 1895.

*Poincaré* (*H.*). — *Analysis situs*. (1-123).

Quelques extraits de l'Introduction feront bien comprendre l'esprit et l'objet du présent Travail.

« La Géométrie à $n$ dimensions, dit l'auteur, a un objet réel; personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier....

» La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe: rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes analogues et plus généraux.

» Mais pourquoi, dira-t-on, ne pas conserver le langage analytique et le remplacer par un langage géométrique, qui perd tous ses avantages dès que les sens ne peuvent plus intervenir? C'est que ce langage nouveau est plus concis; c'est ensuite que l'analogie avec la Géométrie ordinaire peut créer des associations d'idées fécondes et suggérer des généralisations utiles....

» On sait quelle est l'utilité des figures géométriques dans la théorie des fonctions imaginaires et des intégrales prises entre des limites imaginaires, et combien on regrette leur concours quand on veut étudier, par exemple, les fonctions de deux variables complexes.

» Cherchons à nous rendre compte de la nature de ce concours; les figures suppléent d'abord à l'infirmité de notre esprit en appelant nos sens à son secours; mais ce n'est pas seulement cela. On a bien souvent répété que la Géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites; encore ces figures, pour ne pas nous tromper, doivent-elles satisfaire à certaines conditions; les proportions peuvent être grossièrement altérées, mais les positions relatives des diverses parties ne doivent pas être bouleversées.

» L'emploi des figures a donc avant tout pour but de nous faire connaître certaines relations entre les objets de nos études, et ces relations sont celles dont s'occupe une branche de la Géométrie que l'on a appelée *Analysis situs* et qui décrit la situation relative des points, des lignes et des surfaces, sans aucune considération de leur grandeur.

» Il y a des relations de même nature entre les êtres de l'hyperespace; il y a donc une *Analysis situs* à plus de trois dimensions, comme l'ont montré Riemann et Betti. Cette science nous fera connaître ce genre de relations, bien que cette connaissance ne puisse plus être intuitive, puisque nos sens nous font défaut.... »

Le Mémoire de M. Poincaré est divisé en dix-huit paragraphes, dont voici les titres :

Première définition des variétés. Homœomorphisme. Deuxième définition des variétés. Variétés opposées. Homologies. Nombres de Betti. Emploi des intégrales. Variétés unilatères et bilatères. Intersection de deux variétés. Représentation géométrique. Représentation par un groupe discontinu. Groupe fondamental. Équivalences fondamentales. Conditions de l'homœomorphisme. Autres modes de génération. Théorème d'Euler. Cas où $p$ est impair. Deuxième démonstration.

2^e Partie.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome CXXXI; 1900 (1).

*Boussinesq*. — Échauffement permanent, mais inégal, par rayonnement, d'un mur d'épaisseur indéfinie, ramené au cas d'un échauffement analogue par contact. (9-13).

Comme exemple des principes posés dans ses Communications précédentes, l'auteur retrouve la formule de Poisson en ramenant le cas du rayonnement à celui de l'échauffement par contact.

*Korn*. — Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. (26-27).

Modification proposée à la démonstration de la méthode de Neumann, telle que l'a présentée M. Stekloff dans une Note récente.

*Floquet* (*G.*). — Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. (27-30).

Lorsqu'un fil se meut en affectant une forme *curviligne* et que la vitesse tangentielle est à chaque instant la même tout le long du fil, il figure constamment une géodésique de la surface qu'il engendre. Si la courbe reste plane, la surface est une surface de Monge.

Lorsqu'un fil se meut en affectant la forme d'une courbe plane, les vitesses de tous ses points étant normales, si aucune force binormale n'agit sur l'élément de fil, il engendre une surface de révolution; ses diverses positions coïncident avec les méridiens et ses points décrivent les parallèles d'un mouvement uniforme.

*Boussinesq*. — Problème de l'échauffement permanent d'une sphère par rayonnement, ramené au problème plus simple de l'échauffement de la même sphère par contact. (81-86).

L'auteur retrouve par sa méthode de réduction la formule donnée par Poisson (*Théorie mathématique de la chaleur*), puis il examine le cas extrême où la conductibilité superficielle $h$ est insensible, les températures extérieures $u_e$ étant très élevées, de sorte que le produit $hu_e$ soit une fonction arbitraire finie.

*Floquet* (*G.*). — Sur les équations du mouvement d'un fil en coordonnées quelconques. (97-100).

(1) Voir *Bulletin*, t. XXV₂, p. 169.

*Guichard.* — Sur certaines équations linéaires aux dérivées partielles de second ordre. (100-103).

Si une équation de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\theta$$

admet $p$ solutions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ telles qu'on ait

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_p^2 = f(u) + \varphi(v),$$

l'auteur l'appelle *équation* $E_p$.

Si l'équation (1) est $E_p$, elle admet une infinité de groupes de $p$ solutions $\theta_1, \ldots, \theta_p$ dépendant d'une constante arbitraire $h$ et telles qu'on ait

$$(2) \qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_p^2 = \frac{U}{1 + Uh} + \frac{V}{1 + Vh}.$$

Appliquant alors à l'équation (1) la transformation de M. Moutard à l'aide d'une solution $\lambda$ de cette équation, on arrive à une équation qui est $E_{p+2}$, $E_{p+1}$ ou $E_p$ suivant que $\lambda$ est une solution générale, ou une solution *linéaire*

$$\lambda = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \ldots + a_p\theta_p \qquad (\Sigma a_i^2 \neq 0),$$

composée avec les solutions d'un groupe (2) ou une solution *isotrope*, cas particulier de la solution linéaire pour

$$\Sigma a_i^2 = 0.$$

Vient ensuite l'énumération des divers cas possibles pour $p = 5$.

*Levi-Civita.* — Sur l'instabilité de certaines substitutions. (103-106).

L'auteur considère les transformations réelles à deux variables

$$x_1 = x + \varphi(x, y) + \ldots, \qquad \varphi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$
$$y_1 = y + \psi(x, y) + \ldots, \qquad \psi = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2,$$

dont les termes non écrits sont d'ordre supérieur au second.

Il démontre que ces substitutions sont en général *instables*, c'est-à-dire qu'on peut par des itérations

$$x_n = x_{n-1} + \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}),$$
$$y_n = y_{n-1} + \psi(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

faire sortir le point $(x_n, y_n)$ d'un cercle fixe tracé autour de l'origine O, pourvu qu'on prenne le point initial $(x, y)$ dans un secteur convenable, aussi près de O que l'on veut.

*Levi-Civita.* — Sur l'instabilité de certaines solutions périodiques. (170-173).

Le système canonique à deux variables $(q_1, q_2)$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2),$$

où F est indépendant du temps, est supposé admettre une solution périodique de période T. On peut supposer qu'on ait pour cette solution

$$p_1 = p_2 = q_2 = 0,$$

$q_1$ étant censé varier toujours dans le même sens et augmenter de $2\pi$, lorsque $t$ augmente de T.

Cette solution périodique possède deux exposants caractéristiques nuls et deux autres $\alpha$ et $-\alpha$. On dit que la solution est *stable* quand $\alpha$ est une imaginaire pure. L'auteur démontre, au contraire, qu'elle est *instable* quand le rapport $\frac{\alpha}{\sqrt{-1}}$ est commensurable avec le moyen mouvement $\frac{2\pi}{T}$.

*Kollros* (*L.*). — Sur les formes bilinéaires ternaires d'Hermite. (173-175).

De deux formes correspondantes d'Hermite, ternaires et positives, l'une peut toujours, par une substitution linéaire à coefficients entiers complexes et de déterminant égal à $\pm 1$ ou à $\pm i$, se transformer en une forme réduite équivalente qui rentre dans l'un ou l'autre de deux types caractérisés par des inégalités que l'auteur fait connaître.

*Ebert* (*W.*). — Sur un système d'équations différentielles qui équivaut au problème des $n$ corps, mais admet une intégrale de plus. (251-253).

Dans les équations canoniques du problème des $n$ corps où l'intégrale des forces vives est représentée par

$$F = T - U = \alpha,$$

l'auteur introduit à la place du temps $t$ une nouvelle variable $\tau$ définie par les relations concordantes

$$\frac{d\tau}{dt} = U + 2\alpha = T + \alpha.$$

Le système différentiel garde la forme canonique, mais, en outre, il admet une intégrale de plus

$$(U + 2\alpha) \sum x_i \frac{dx_i}{d\tau} - \tau = \text{const.}$$

*Demoulin* (*A.*). — Sur deux surfaces qu'on peut associer à toute surface de Weingarten. (330-333).

L'une de ces surfaces correspond à l'une des nappes de la développée d'une

surface de Weingarten avec parallélisme des plans tangents et elle a même représentation sphérique de ses lignes de courbure. L'autre surface est dans les mêmes relations avec la seconde nappe de la développée.

Par la considération de ces surfaces, la recherche des surfaces à courbure totale constante est ramenée à celle d'autres surfaces définies par des équations à peine différentes de celle dont dépend la déformation du paraboloïde de révolution.

*Tzitzéica.* — Sur les équations de Laplace à solutions quadratiques. (487-489).

L'auteur étudie le cas particulier où l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}$$

admet $n$ solutions $z_1, z_2, \ldots, z_n$, telles que la somme de leurs carrés soit aussi une solution, avec cette restriction que *l'une* de ces solutions dépend d'une constante arbitraire (non additive) dont les autres ne dépendent pas.

Toutes les équations de la classe ainsi définie peuvent, moyennant un changement de variables, se correspondre par des relations telles que

$$\frac{\partial z'}{\partial x} = \lambda\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial y} = \mu\frac{\partial z}{\partial y},$$

et se transformer dans l'équation

$$2(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

*Painlevé.* — Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles. (489-492).

Après avoir montré, par l'exemple de la fonction

$$y = (\log x)^i,$$

qu'un point *critique* isolé peut n'être pas un point d'*indétermination complète*, comme sont les points essentiels des fonctions uniformes, l'auteur énonce les théorèmes suivants sur les équations différentielles *algébriques :*

1° *L'intégrale d'une équation du premier ordre ne peut présenter de points singuliers transcendants qui soient des points d'indétermination incomplète;*

2° *L'intégrale d'une équation du deuxième ordre ne peut admettre comme points essentiels d'indétermination incomplète qu'un nombre fini de points dont les affixes se calculent algébriquement sur l'équation;*

3° *L'intégrale d'une équation du troisième ordre peut présenter des points essentiels mobiles d'indétermination incomplète.*

*D'Ocagne.* — Sur la résolution nomographique de l'équation du septième degré. (522-524).

*Stekloff* (*W.*). — Le problème des températures stationnaires. (608-610).

Il s'agit de trouver une fonction $v$ des coordonnées rectangulaires $x$, $y$, $z$, continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur d'une surface fermée (S), telle, en outre, que l'on ait à l'intérieur de (S)

$$\Delta v + \varphi = 0,$$

et sur la surface même

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + hv = 0,$$

$\varphi$ étant une fonction donnée, continue et admettant des dérivées premières à l'intérieur de (S), $h$ une constante positive et $n$ la direction de la normale intérieure à (S).

L'auteur communique la solution complète qu'il a obtenue de ce problème (pour les surfaces satisfaisant à certaines conditions) en s'aidant de ses recherches antérieures sur le problème de Neumann et la méthode de Robin.

*Floquet* (*G.*). — Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un fil et sur le calcul de sa tension. (666-668).

*Egorov* (*D.-Th.*). — Sur les systèmes orthogonaux admettant un groupe continu de transformations de Combescure. (668-671).

On peut ramener les équations des trajectoires du groupe à la forme

$$\rho_1 - \rho = \text{const.}, \qquad \rho_2 - \rho = \text{const.},$$

$\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$ étant les paramètres des trois familles du système; l'élément linéaire de l'espace prend alors la forme suivante

$$ds^2 = \frac{\partial \omega}{\partial \rho} d\rho^2 + \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1} d\rho_1^2 + \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2} d\rho_2^2.$$

Les surfaces qui composent les trois familles du système jouissent de propriétés intéressantes : ainsi leurs lignes de courbure s'obtiennent par quadratures.

Ayant obtenu un seul système de valeurs des $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ (notations de M. Darboux), il ne faut qu'intégrer une équation différentielle linéaire ordinaire du troisième ordre pour obtenir une série infinie de valeurs des $\beta_{ik}$ et tous les systèmes orthogonaux homothétiques correspondants.

On arrive ainsi à définir par des formules simples un système orthogonal général admettant un groupe continu de transformations de Combescure et correspondant à des valeurs données des $\beta_{ik}$.

*Liouville* (*R.*). — Sur une méthode de Riemann et sur les équations aux dérivées partielles linéaires. (697-699).

L'auteur modifie la méthode employée par Riemann dans son Mémoire *Sur*

*la propagation d'ondes aériennes.* Par son procédé, une équation aux dérivées partielles linéaire et du second ordre, rapportée à ses caractéristiques (supposées réelles), s'intègre d'une manière complète, si l'on sait en trouver *six solutions particulières* qui peuvent être tout à fait quelconques.

*Castelnuovo* et *Enriques.* — Sur une classe de surfaces algébriques. (739-742).

Énoncé et conséquences d'un théorème général sur les surfaces algébriques :

*Si une surface algébrique contient un système linéaire de courbes de genre $\pi > 0$ se coupant deux à deux en $n$ points et si l'on a*

$$n > 2\pi - 2,$$

*la surface est rationnelle ou bien elle peut être ramenée par une transformation birationnelle à un cylindre de genre $p > 0$.*

De là résulte que, si une surface algébrique contient une série continue de courbes rationnelles, elle est elle-même rationnelle ou bien elle peut être ramenée à un cylindre de genre supérieur à zéro.

Comme autre conséquence, les surfaces admettant une série de transformations birationnelles en elles-mêmes, transformations qui n'engendrent pas un groupe d'ordre fini, se trouvent déterminées : *elles sont rationnelles ou peuvent être ramenées à des cylindres.*

Ce beau résultat comble la seule lacune que présentait encore la théorie des surfaces admettant une série continue de transformations birationnelles en elles-mêmes.

*Kantor* (*S.*). — Sur les surfaces qui possèdent une série non linéaire de courbes rationnelles. (791-793).

L'auteur est arrivé, sans connaître les résultats de la Communication précédente de MM. Castelnuovo et Enriques, à établir que, pour $r > 3$, il est impossible de changer birationnellement toute série $\infty^{r-2}$ de courbes rationnelles en une série $\infty^{r-2}$ de droites. Il communique sa démonstration.

*Bougaïev* (*N.*). — Sur la série analogue à la série de Lagrange. (793-794).

*Servant.* — Sur quelques applications de la Géométrie non euclidienne. (827-830).

Une transformation due à M. Darboux fait correspondre aux surfaces tracées sur l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

des surfaces de l'espace ordinaire. L'auteur indique certaines propriétés des surfaces ordinaires qui dérivent ainsi des surfaces à courbure moyenne constante non euclidiennes (NE, pour abréger).

Il montre, en particulier, que les deux surfaces isothermiques rattachées par

M. Thybault à toute déformée du paraboloïde sont les transformées de deux surfaces NE parallèles, à courbure moyenne constante; inversement, tout pareil couple de surfaces NE supposé connu fournit par quadratures une surface applicable sur un paraboloïde quelconque.

Les coordonnées de ces deux surfaces NE satisfont à l'équation de Laplace relative aux lignes de courbure de deux surfaces ordinaires, parallèles, à courbure moyenne constante; de sorte que la déformation du paraboloïde dépend de l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} = \sin \omega \cos \omega$$

des surfaces à courbure totale constante.

## *Borel* (*Em.*). — Les séries absolument sommables, les séries (M) et le prolongement analytique. (830-832).

L'auteur commence par énoncer la nouvelle définition qu'il a adoptée pour les séries *absolument sommables* (par la méthode exponentielle).

Il a démontré, relativement au *polygone de sommabilité,* que la série n'est absolument sommable *en aucun point* de la région extérieure; d'où une méthode pour la recherche des singularités de la fonction définie par une série entière.

Il appelle enfin l'attention sur un fait qui a de nombreuses conséquences : la région appelée *étoile* par M. Mittag-Leffler n'est jamais une région déterminée de convergence, c'est-à-dire qu'il existe des séries de Taylor telles que tout développement (M) associé à ces séries (développement uniformément convergent dans toute région finie intérieure à l'étoile) converge en dehors de l'étoile correspondante.

## *Lebesgue* (*H.*). — Sur la définition de certaines intégrales de surface. (867-870).

La longueur d'une courbe rectifiable est la plus petite limite des longueurs des polygones qui tendent uniformément vers la courbe (Scheeffer).

On peut, de même, dire que l'aire d'une surface quarrable est la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales qui tendent uniformément vers la surface. Cette définition généralise celle que l'auteur a donnée (*Comptes rendus,* t. CXXIX) de l'aire des *surfaces rectifiables.*

Ces définitions posées, M. Lebesgue passe à celle des intégrales attachées à une courbe tracée sur une surface, et des intégrales de surface.

## *Stekloff* (*W.*). — Sur les fonctions fondamentales et le problème de Dirichlet. (870-873).

L'auteur a établi dans un Mémoire antérieur que la méthode de Neumann résout le problème de Dirichlet pour toute surface (S) satisfaisant à certaines conditions générales, si la fonction donnée $f$, à laquelle doit se réduire sur (S) la fonction harmonique cherchée, satisfait à l'inégalité de M. Liapounoff.

Il serait important de s'affranchir de cette restriction et de démontrer la

méthode de Neumann sous la seule condition que *f soit continue sur* (S).

La démonstration que M. Stekloff a indiquée à cet effet au commencement de 1900 (*Comptes rendus*, t. CXXX) prêtant à quelques objections, il se propose d'en publier une autre, entièrement rigoureuse; la présente Note contient l'énoncé de quatre lemmes préliminaires sur lesquels est fondée cette nouvelle solution.

*Fouché* (*M.*). — Sur les systèmes orthogonaux admettant un groupe continu de transformations de Combescure. (873-875).

L'auteur, cité par M. Egorov dans sa Note récente sur le même sujet (*voir* ci-dessus), complète sur certains points ses résultats antérieurs.

La fonction $\omega$ dont les dérivées partielles sont les coefficients de l'élément linéaire de l'espace, égalée à une constante, fournit l'équation des trajectoires orthogonales des lignes qui joignent les points du système orthogonal où les plans tangents aux trois surfaces conservent la même direction.

On peut former une suite indéfinie de systèmes orthogonaux par des quadratures qui, à chaque opération, introduisent trois constantes arbitraires. Dans tous ces systèmes (qui arrivent à dépendre d'autant de constantes arbitraires que l'on veut) chacune des coordonnées s'exprime par un polynome entier en $\rho$ dont les coefficients sont des fonctions de $\rho_1 - \rho$ et de $\rho_2 - \rho$.

*Fredholm* (*I.*). — Solution d'un problème d'équilibre élastique. (875-876).

Dans un Mémoire récent, l'auteur a prouvé qu'on peut ramener le problème général de l'équilibre d'un corps élastique quelconque à un problème particulier du même genre.

Il fait l'application de cette méthode au cas où le corps est limité par un plan.

*Thybaut* (*A.*). — Sur les surfaces isothermiques. (932-935).

Résumé d'un Mémoire dont le point de départ est ce théorème :

*La condition nécessaire et suffisante pour que les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère variable, dépendant de deux paramètres, se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits, est que les deux points de contact* M *et* M′ *de chaque sphère avec son enveloppe soient conjugués harmoniques par rapport aux points, supposés distincts, de la droite* MM′.

Après avoir indiqué que cette proposition permet de retrouver des résultats dus à M. Christoffel et à M. Darboux, l'auteur l'applique au cas particulier où le plan des normales aux deux nappes en M et M′ passe toujours par un point fixe, cas dont il fait une étude approfondie.

*Lebesgue* (*H.*). — Sur le minimum de certaines intégrales. (935-937).

Démonstration, par un procédé analogue à celui de M. Hilbert (*Nouvelles*

*Annales*, août 1900), de l'existence de la surface passant par un contour et dont l'aire est minima.

*Lemoine*. — La Géométrographie dans l'espace. (937-939).

Conventions proposées pour apprécier la simplicité des constructions réalisables au moyen de droites, de circonférences, de plans et de sphères. Examen de deux constructions du plan mené par un point perpendiculairement à une droite.

*Tejér* (*L.*). — Sur les fonctions bornées et intégrables. (984-987).

Démonstration de ce théorème :

*$f(x)$ étant une fonction bornée et intégrable dans l'intervalle de 0 à $2\pi$ (extrémités comprises), la série de Fourier qui correspond à $f(x)$ peut être divergente, mais en tous les points $x$ pour lesquels $f(x)$ est continue ou pour lesquels $f(x+0)$, $f(x-0)$ sont finis, mais distincts, la moyenne*

$$\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}$$

*des sommes des n premiers termes de la série tend vers une limite qui est égale à*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

La même analyse prouve aussi que toute fonction continue d'une variable est développable en une série de polynomes (Weierstrass).

*Stekloff* (*W.*). — Sur la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann. (987-989).

En s'appuyant sur les lemmes énoncés dans sa dernière Note (*voir* ci-dessus) l'auteur démontre que :

*La série de Neumann converge absolument et uniformément dans tout domaine* (D) *intérieur à la surface donnée* (S), *quelle que soit la fonction f, limitée sur* (S).

En conséquence, la méthode de Neumann fournit la solution du problème intérieur de Dirichlet, quelle que soit la fonction *continue f* à laquelle doit se réduire sur (S) la fonction harmonique cherchée.

Il en est de même du problème extérieur de Dirichlet.

*Duhem* (*P.*). — Sur le théorème d'Hugoniot et sur quelques théorèmes analogues. (1171-1173).

L'auteur se propose de déterminer la vitesse $a$ de propagation d'un ébranlement, au point $x$, $y$, $z$ et au temps $t$, dans le sens de la normale à la surface d'onde (S). Cette surface qui partage l'espace en deux régions, 1 et 2, est dite

*onde d'ordre n* pour une fonction $U_1(x, y, z, t)$ analytique définie dans l'espace 1, se propageant *dans* la fonction $U_2(x, y, z, t)$ analytique et définie dans les espaces 1 et 2 si la fonction

$$V = U_1 - U_2$$

s'annule sur S ainsi que toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement.

On a, pour les ondes d'ordre impair $2n+1$,

$$a^{2(2n+1)}\left[\left(\frac{\partial \Delta_n V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta_n V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta_n V}{\partial z}\right)^2\right] = \left(\frac{\partial^{2n+1} V}{\partial t^{2n+1}}\right)^2;$$

pour les ondes d'ordre pair $2n$,

$$a^{2(n+1)} \Delta_{n+1} V = \frac{\partial^{2(n+1)} V}{\partial t^{2(n+1)}},$$

en désignant par $\Delta_m V$ le résultat de l'opération $\Delta$ appliquée $m$ fois à la fonction V.

*Guichard* (*C.*). — Sur les congruences dont les deux réseaux focaux sont cycliques. (1177-1179).

La recherche de ces congruences revient à celle des réseaux dont les deux tangentes décrivent des congruences cycliques.

Pour trouver de pareils réseaux, l'auteur cherche, dans l'espace à cinq dimensions, les congruences G dont les réseaux focaux sont orthogonaux. On déterminera les cinq cosinus $\xi_i$ d'une droite G en formant toutes les équations du type

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\theta,$$

qui admettent cinq solutions satisfaisant aux conditions

$$\sum \xi_i^2 = 1, \qquad \sum \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)^2 \neq 0, \qquad \sum \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial v}\right)^2 \neq 0.$$

On peut revenir de l'espace à cinq dimensions à l'espace ordinaire par la considération des systèmes de cercles et de sphères.

*Kœnigs* (*G.*). — Compas homographique, réalisant par articulations l'homographie plane générale. (1179-1182).

*Stekloff* (*W.*). — Sur la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann. (1182-1185).

Comme suite à ses recherches précédentes (*voir* ci-dessus) l'auteur aborde les deux questions que voici :

La série de Neumann est-elle convergente non seulement *à l'intérieur* de la surface (S) sur laquelle la fonction harmonique doit se réduire à une fonction $f$ continue, mais aussi *sur la surface* (S) *elle-même?*

Est-il possible de présenter cette série et, par conséquent, la solution du problème de Dirichlet sous la forme d'un potentiel de double couche?

M. Stekloff établit qu'il faut répondre à ces deux questions par l'affirmative.

*Liapounoff.* — Sur une série relative à la théorie d'une équation différentielle linéaire du second ordre. (1185-1188).

L'auteur revient sur l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)y = 0,$$

considérée dans ses Notes antérieures (*Comptes rendus*, 1896 et 1899) pour compléter ses premiers résultats relativement au cas où $x$ est réel et $p(x)$ une fonction continue, périodique.

Les solutions sont toutes des fonctions limitées si $A^2 < 1$; toutes (sauf $y = 0$) sont des fonctions illimitées si $A^2 > 1$; l'auteur indique le moyen de reconnaître à laquelle de ces deux inégalités satisfait A, *constante caractéristique* de l'équation proposée, quand son carré n'est pas égal à 1, ce qui est le cas général.

*Krause* (*M.*). — Sur les fonctions thêta à trois variables. (1188-1190).

Les théorèmes établis par l'auteur prouvent la possibilité de former des systèmes orthogonaux de 64 coefficients dont les éléments sont des produits de fonctions thêta et donnent tous les systèmes possibles.

*Jouguet.* — Le théorème du tourbillon en Thermodynamique. (1190-1191).

L'auteur énonce un certain nombre de cas auxquels il a pu étendre le théorème fondamental de la théorie des tourbillons, pour les fluides sans viscosité.

---

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO. In-8°. Torino, C. Clausen.

Tome XXXII, 1896-1897.

*Bertini* (*Eug.*). [M, 6 *l*]. Les tangentes multiples de la cayleyenne d'une quartique plane générale. (32-33).

Étant donnée une quartique plane générale, il existe vingt et une droites sur chacune desquelles il y a une involution de groupes apolaires de trois

points. Ce sont celles qui font partie de cubiques polaires, et elles sont tangentes quadruples de la cayleyenne.

*Burali-Forti* (*Cés.*). — [I1]. Les classes finies. (34-52).

L'auteur adopte la définition de classe finie, donnée par Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen?*) et au moyen seulement des notions de *classe* et de *correspondance* il démontre le principe d'induction complète, et établit la notion de nombre entier indépendamment de tout concept de grandeur et d'ordre. L'exposition est faite en symboles de logique.

*Campetti* (*Ad.*). — [T7*c*]. Sur le mouvement d'un diélectrique dans un champ magnétique. (52-65).

M. W. Duane (*Wiedemann's Annalen*, 1896) a observé qu'un cylindre isolant suspendu et oscillant entre les pôles d'un électro-aimant subit un affaiblissement des oscillations lorsque l'axe du cylindre, qui est aussi l'axe de rotation, est normal aux lignes de force, et qu'il ne subit pas d'affaiblissement sensible lorsque l'axe est parallèle à ces lignes. M. Campetti, en vue d'étudier ce phénomène, le rapproche des recherches de J.-J. Thomson sur la force électromotrice produite par les corps en mouvement, et calcule les composantes de la force électromotrice dans le corps oscillant quand celui-ci est une sphère, puis, dans le cas mentionné du cylindre, en expliquant le phénomène de l'affaiblissement des oscillations.

*Guidi* (*Cam.*). — [T2*b*]. Sur le calcul des poutres à pleines parois. (137-144).

*Ravenè* (*Gustave*). — [U]. Sur les perturbations produites par les petites planètes. (144-155).

*Burali-Forti* (*Cés.*). — [I1, réf. I5]. Sur un théorème de M. G. Cantor. (229-237).

On ne sait pas faire, pour les propriétés des nombres *infinis*, une réduction semblable à celle effectuée pour les nombres finis dans la Note précédente (*voir* ci-dessus), c'est-à-dire la réduction aux propriétés concernant exclusivement les *classes* et les *représentations*.

*Fellini* (*Diego*). — [K20*eα*]. Le problème de Pothenot. (320-328).

*Pieri* (*Marius*). — [V1*a*]. Sur les éléments de la Géométrie projective abstraite. (343-351).

En apportant un perfectionnement remarquable aux résultats obtenus dans ses travaux précédents sur les fondements de la Géométrie projective, l'auteur montre que l'on peut éliminer la notion de *segment projectif*, et tout fonder sur les deux seules notions de *point projectif* et de *droite projective*.

*Bettazzi* (*Rod.*). — [I1]. Sur la définition du groupe fini. (352-355).

En appliquant un théorème de M. Burali-Forti, l'auteur montre que la définition de groupe fini donnée par lui-même (*voir* ces *Atti,* 1895-96) et fondée sur la notion d'*ordre,* coïncide avec la définition déjà donnée par Dedekind.

*Ramorino* (*Aug.*). — [O3*d*, *e*]. Sur certaines propriétés des courbes de l'espace en relation à leur courbure et torsion. (471-483).

Observations sur l'expression du volume du tétraèdre ayant pour sommets quatre points infiniment voisins d'une courbe gauche.

*Lampe* (*E.*). — [X2, réf. D6*d*]. Sur quelques erreurs dans les *Nuove tavole delle funzioni iperboliche,* de M. A. Forti (Roma, 1892). (530-533).

*Peano* (*Jos.*). — [V1]. Études de logique mathématique. (565-583).

*Aimonetti* (*Cés.*). — [U]. Détermination relative de la gravité terrestre à Turin, faite en 1896 au moyen de l'appareil pendulaire de Sterneck. (715-741).

*Vailati* (*Jean*). — [R2*b*]. Sur la notion de centre de gravité dans la Statique d'Archimède. (742-758).

*Segre* (*Corr.*). — [$M_2$1*b*]. Sur mon Mémoire : *Sur la décomposition des points singuliers des surfaces algébriques.* (781-789).

Réponse aux observations de M. Del Pezzo (*Atti dell' Accad. Pontaniana,* Vol. XXVII).

*Niccoletti* (*Honoré*). — [H9]. Sur la transformation des équations linéaires homogènes du second ordre aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. (790-816). Note II. (970-996).

Ce travail est un complément du Mémoire publié par l'auteur dans les *Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa,* Vol. VIII. Le problème traité par l'auteur, qui est celui des transformations *integro-differentielles,* consiste dans ce qui suit :

*Étant*

$$A(z) = ar + 2bs + ct + 2dp + 2eq + fz = 0$$

*l'équation donnée, trouver toutes les fonctions* $\omega$

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega = \Sigma \alpha_{ik} z_{ik} + \Sigma \beta_l A_l \\ \left[ z_{ik} = \dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}, \qquad A_l = \displaystyle\int (P_l \, dx + Q_l \, dy) \right], \end{cases}$$

*satisfaisant à une équation analogue*

$$P(\omega) = A \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \, \partial y} + C \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial \omega}{\partial x} + 2E \frac{\partial \omega}{\partial y} + F\omega = 0,$$

$P_l$, $Q_l$ *étant des fonctions linéaires homogènes de* $z$ *et de ses dérivées.*

La transformation est indiquée par $[m, p]$ lorsque $0 \leqq i + k \leqq m$, et $p$ est le nombre minimum d'intégrales $A_l$ figurant dans (1). La transformation est *générale* lorsque les deux dérivées de $\omega$, combinées avec $A(z) = 0$ et ses dérivées, permettent d'exprimer les dérivées de $z$ de l'ordre le plus élevé en fonction de celles d'ordre inférieur de $\omega$ et des $A_l$. Si cela n'a pas lieu, la transformation est *singulière*. Une transformation générale $[m, p]$ est déterminée par $2m + p$ solutions particulières de l'équation $A(z) = 0$ et $p$ solutions $u_i$ de l'équation adjointe

$$\Phi(u) = \frac{\partial^2 (au)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (bu)}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 (cu)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial (du)}{\partial x} - 2 \frac{\partial (eu)}{\partial y} + fu = 0.$$

Les substitutions singulières sont de deux classes :

1° Celles appartenant seulement aux équations du type hyperbolique ou parabolique ($b^2 - ac \geqq 0$);

2° Celles pour lesquelles on a $m = 0$, $\Sigma \omega_i u_i = 0$.

L'auteur étudie séparément toutes ces transformations, et trouve que la condition nécessaire et suffisante pour que, dans chacun de ces cas, l'expression $\omega$ correspondante satisfasse à une équation analogue à l'équation donnée, est que cette expression s'annule pour un certain nombre de solutions particulières de $A(z) = 0$. Ce nombre multiplié par $p$ est celui des constantes arbitraires renfermées dans $\omega$.

## *Volterra* (*V.*). — [C2*k*]. Un théorème sur les intégrales multiples. (859-868).

*Étant*

$$J = \int\int_{\alpha_1} \frac{dy \, dz}{\sqrt{\frac{b_2}{\lambda} z^2 - \frac{b_3}{\lambda} y^2 + \beta_1}} + \int\int_{\alpha_2} \frac{dz \, dx}{\sqrt{\frac{b_3}{\mu} x^2 - \frac{b_1}{\mu} z^2 + \beta_2}} + \int\int_{\alpha_3} \frac{dx \, dy}{\sqrt{\frac{b_1}{\nu} y^2 - \frac{b_2}{\nu} x^2 + \beta_3}}$$

*et* $\lambda + \mu + \nu = 0$, *si les intégrations sont étendues sur des portions des plans*

*coordonnés, limités par les projections d'une courbe quelconque tracée sur la surface algébrique*

$$\lambda x\sqrt{\frac{b_2}{\lambda}z^2-\frac{b_3}{\lambda}y^2+\beta_1}+\mu y\sqrt{\frac{b_3}{\mu}x^2-\frac{b_1}{\mu}z^2+\beta_2}+\nu z\sqrt{\frac{b_1}{\nu}y^2-\frac{b_2}{\nu}x^2+\beta_3}=C,$$

*la quantité* J *ne change pas en déformant et en déplaçant la courbe sur la surface.*

Ce théorème est une extension de celui de l'addition des fonctions trigonométriques, qui peut recevoir la forme suivante :

*La quantité*

$$J=\int^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int^y\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

*ne change pas si les limites $x$, $y$ des intégrales satisfont à l'équation*

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\text{const.}$$

En général, pour

$$J'=\int\int_{\alpha_1}\varphi_1(y,z)\,dy\,dz+\int\int_{\alpha_2}\varphi_2(z,x)\,dz\,dx+\int\int_{\alpha_3}\varphi_3(x,y)\,dx\,dy,$$

les surfaces $f=$ const., telles que J' soit constant lorsque $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ sont les projections d'une même portion de $f$, sont données par les intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$\varphi_1\frac{\partial f}{\partial x}+\varphi_2\frac{\partial f}{\partial y}+\varphi_3\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Suit une remarque communiquée à l'auteur par M. Picard, qui contient des considérations analogues. Enfin l'auteur montre le rapport que le résultat précédent a avec la théorie, développée par lui-même ailleurs (voir *Rendiconti dei Lincei*), des *fonctions de lignes*.

*Vailati* (*Jean*). — [R6*aα*]. Le principe des travaux virtuels depuis Aristote jusqu'à Héron Alexandrin. (940-962).

*Almansi* (*Émile*). — [T2*aδ*, réf. T4*a*]. Sur la déformation d'une sphère élastique soumise à la chaleur. (963-969).

Étant $u$, $v$, $w$ les composantes du déplacement du point $x$, $y$, $z$, l'auteur pose

$$u=\xi+\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$v=\eta+\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$w=\zeta+\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

et après avoir déterminé la fonction $\psi$, de manière à simplifier les équations aux dérivées partielles du second ordre que l'on a pour $\xi$, $\eta$, $\zeta$, et celles du premier ordre que l'on a pour ces mêmes fonctions à la surface de la sphère, il observe que ces équations coïncident avec celles que l'on aurait dans le cas de la déformation d'une sphère élastique soumise à des tensions à la surface; ce qui lui permet d'appliquer une méthode d'intégration déjà appliquée par lui dans son Mémoire : *Sulla deformazione di una sfera elastica* (*Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino*, 2e série, t. XLVII). Par cette méthode, il trouve les expressions de $\xi$, $\eta$, $\zeta$ au moyen d'intégrales définies.

*Niccoletti* (*Honoré*). — [H9]. Sur la transformation des équations linéaires homogènes du second ordre aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Note II. (970-996). Note I. (790).

Relations entre les transformations intégro-différentielles avec les transformations intégrales et les transformations différentielles (*Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa*, t. VIII). En appelant *paire* ou *impaire* une transformation intégro-différentielle suivant que le nombre $p$ des intégrales $\Lambda_l$ qui y figurent est pair ou impair, l'auteur trouve que toute transformation paire peut s'obtenir en composant une transformation différentielle avec l'inverse d'une transformation différentielle; une transformation impaire en composant une transformation intégrale avec l'inverse d'une transformation différentielle.

De ce théorème, on déduit plusieurs conséquences, par exemple la relation qui a lieu entre les équations adjointes de deux équations

$$\Lambda(z) = 0, \qquad P(\omega) = 0,$$

liées entre elles par une transformation intégro-différentielle, et la détermination des transformations inverses, et des solutions particulières (de l'équation donnée et de son adjointe) dont elles dépendent. L'équation $\Lambda(z) = 0$, et toutes les transformées intégro-différentielles données par un même groupe de solutions particulières de $\Lambda(z) = 0$ et de son adjointe, sont entre elles en relation involutive, c'est-à-dire que de l'une quelconque d'entre elles on peut obtenir toutes les autres par une transformation intégro-différentielle correspondant au groupe des solutions particulières de la même équation et de son adjointe, données par la méthode de Liouville, en disposant convenablement des constantes arbitraires.

Relativement à la composition et à la permutabilité de ces transformations on a le théorème suivant :

*Deux transformations intégro-différentielles quelconques sont toujours permutables; la transformation composée est encore une transformation intégro-différentielle déterminée par le groupe de solutions particulières de l'équation donnée et de son adjointe, qui déterminent les deux composantes.*

Un cas particulier remarquable de ce théorème est que, si une équation admet une transformation infinitésimale, toute équation qu'on en déduit par une transformation intégro-différentielle admet aussi une transformation infi-

nitésimale. Enfin l'auteur cherche les relations qui ont lieu entre deux transformées quelconques d'une équation, et trouve que celles-ci sont liées par une transformation intégro-différentielle correspondant au groupe de solutions de l'équation donnée et de son adjointe, qui ne sont pas communes aux deux transformations; et il en déduit que l'ensemble de toutes les transformées de la fonction $z$ coïncide avec celui de l'une quelconque de ses transformées.

*Garbasso* (*Ant.*). — [T7*c*]. Sur un système dicyclique imparfait représentant un couple de circuits doués d'induction et de capacité. (1008-1021).

*Rizzo* (*J.-B.*). — [U]. Valeurs absolues et variations séculaires des éléments du magnétisme terrestre à Turin. (1022-1033).

*Balbi* (*Vict.*). — [U]. Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1898. (1034-1050).

Tome XXXIII; 1897-98.

*Peano* (*G.*). — [H1*a*]. Généralités sur les équations différentielles ordinaires. (9-18).

Existence des intégrales et leur expression en série obtenue par l'application des substitutions des nombres complexes d'ordre $n$.

*Segre* (*Corr.*). — [$M_2$1*b*]. Sur un problème relatif aux intersections de courbes et de surfaces. (19-23).

Autre réponse à M. Del Pezzo (*Atti della Accad. Pontaniana*, t. XXVII).

*Bertini* (*Eug.*). — [$M_1$1*c*]. Dans quels cas deux courbes planes de même ordre ont les mêmes premières polaires? (23-29).

Les cas sont les suivants :

1° Les $\infty^2$ courbes (d'ordre $n$) ayant sur chaque côté d'un triangle donné $n$ points d'hyperosculation (points simples dont la tangente y a un contact d'ordre $n-1$) dont les tangentes concourent au sommet opposé;

2° Les $\infty^1$ courbes ayant les mêmes points d'hyperosculation en ligne droite et les tangentes relatives concourant en un point;

3° Les $\infty^2$ courbes ayant un même point $(n-1)^{\text{uple}}$ avec une même tangente unique, et ayant chacune un point d'hyperosculation, les points d'hyperosculation étant sur une ligne droite passant par le point $(n-1)^{\text{uple}}$, et les tangentes en ces points concourant en un point de la tangente au même point $(n-1)^{\text{uple}}$;

4° Les $\infty^1$ courbes (formant un faisceau) ayant un même point $(n-1)^{\text{uple}}$

avec même tangente, et dont les $n^2$ intersections communes se réunissent en ce point;

5° Les $\infty^2$ courbes constituées par une droite $(n-2)^{\text{uple}}$ et par les coniques touchant cette droite en un point donné et osculant en ce point l'une d'entre elles.

*Ovazza* (*Élie*). — [T2*b*]. Sur le calcul des charpentes réticulaires non planes. (30-38).

*Baggi* (*Vict.*). — [U]. Sur la forme la plus convenable à donner aux supports des lunettes dans les théodolites et les niveaux. (39-48).

*Levi* (*Beppo*). — [$M_1$1*c*]. Résolution des singularités ponctuelles des surfaces algébriques. (66-86).

On peut, par des transformations birationnelles, résoudre toutes les singularités ponctuelles d'uue surface, en réduisant celle-ci à une surface n'ayant qu'une ligne double biplanaire avec un nombre fini de points cuspidaux, ordinaires pour la ligne et pour la surface, et un nombre fini de points triples ordinaires pour la ligne et triplanaires pour la surface.

*Pizzetti* (*Paul*). — [U]. La réfraction astronomique calculée suivant l'hypothèse de Mendeleef sur la distribution verticale de la température dans l'air. (213-226).

*Delitala* (*Jos.*). — [K20*eα*]. Contribution à l'étude du problème de Pothenot. (311-320).

*Bettazzi* (*Rod.*). — [D2*a*]. Sur les séries (successions) à termes positifs dont les parties représentent un continu. (355-374).

La succession

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2^n}, \quad \ldots,$$

en prenant toutes les sommes et toutes les séries possibles formées avec ses éléments, donne tous les nombres de l'intervelle $\overline{01}$. L'auteur cherche quelles sont les successions ayant une propriété analogue. La condition nécessaire et suffisante pour cette représentation d'un continu est que la limite inférieure des éléments soit le zéro, et que, pour tout élément $u_p$, la somme de ceux $< u_p$ soit $\geq u_p$.

*Volterra* (*V.*). — [R8]. Sur une classe d'équations dynamiques. (451-575).

Il y a une infinité de cas où les équations du mouvement d'un système aban-

donné à sa propre inertie peuvent se séparer en deux groupes, dont l'un contient seulement les paramètres caractéristiques du mouvement. Le cas le plus simple est celui des systèmes rigides libres; le même a lieu pour le mouvement d'un corps rigide plongé dans un fluide indéfini, et aussi dans un autre cas étudié par l'auteur dans les *Rendicondi dei Lincei*, 1895 (*Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi ciclici*), et dans les *Annali di Matematica*, t. XXIV (*Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici*). Ici l'auteur se propose d'étudier tous les cas où l'on a une semblable séparation des paramètres dans les équations différentielles du mouvement, et qu'il désigne par la dénomination de *mouvements spontanés à caractéristiques indépendantes*. Il fait l'étude des intégrales du premier et du second degré, et la réduction correspondante des équations.

*Fano* (*Gino*). — [P4*g*]. Les groupes continus primitifs de transformations crémoniennes de l'espace. (480-504).

Un tel groupe peut se réduire à un groupe projectif ou à un groupe conforme; plus précisément à l'un de certains *neuf* groupes que l'auteur assigne particulièrement. Ces résultats, déjà obtenus par l'auteur en commun avec M. Enriquez (*Annali di Matematica*, 2e série, t. XXV) en se fondant sur la classification donnée par Lie des groupes continus primitifs de transformations ponctuelles de l'espace, sont retrouvés ici par une voie plus directe et en faisant usage seulement du théorème suivant de Lie :

*Un groupe continu de transformations ponctuelles d'un espace quelconque, qui autour d'un point général, imposé comme point uni, subordonne le groupe projectif maximum, peut être réduit par une ultérieure transformation ponctuelle à un groupe projectif.*

*Peano* (*Jos.*). — [B12*c*]. Analyse de la théorie des vecteurs. (513-534).

Examen des idées et des propositions primitives de cette théorie.

*Jadanza* (*Nicodème*). — [U]. Un nouveau focomètre. (535-539).

*Volterra* (*Vito*). — [R8]. Sur l'intégration d'une classe d'équations dynamiques. (542-558).

Note faisant suite à la précédente (*voir* ci-dessus). D'abord l'auteur se borne aux mouvements (spontanés à caractéristiques indépendantes) du second ordre, c'est-à-dire à ceux qui dépendent de deux caractéristiques. Ces caractéristiques s'obtiennent, dans ce cas, exprimées par des exponentielles. Suit le cas des mouvements d'ordre $\nu$, avec $\nu - 2$ intégrales linéaires, dont les caractéristiques s'expriment par des fonctions exponentielles et trigonométriques; et celui des mouvements d'ordre $\nu$ avec $\nu - 3$ intégrales linéaires et une intégrale quadratique, où les caractéristiques sont des fonctions elliptiques du temps.

*Vailati* (*Jean*). — [V6]. Les spéculations de Jean Benedetti. Sur le mouvement des corps pesants. (559-583).

*Berzolari* (*Louis*). — Sur la courbure des variétés tracées sur une variété quelconque. (692-700). Note II. (759-778).

*Baggi* (*Vict.*). — Examen de la compensation entre la tranchée et le remblai dans les projets routiers. (701-728).

*Chini* (*Mineo*). — [H 4]. Sur l'équation différentielle de deuxième ordre linéaire homogène. (737-745).

Toute forme de degré $m$, à coefficients constants, de deux solutions de l'équation

$$y'' + \frac{a'}{ma} y' + by = 0,$$

$a$, $b$ étant des fonctions quelconques de la variable indépendante, et $m$ un nombre entier et positif, satisfait à une équation

$$F_{m+1}(z) = 0,$$

$F_{m+1}$ étant un polynome différentiel linéaire homogène d'ordre $m+1$, égal ou contraire à son adjoint (suivant que $m$ est impair ou pair).

L'intégration de

$$ay'' + \frac{a'}{z} y' + by = \frac{k}{y^3},$$

dépend de celle de

$$ay'' + \frac{a'}{z} y + by = 0.$$

*Niccoletti* (*Honoré*). — [H 1 *a*]. Sur les conditions initiales qui déterminent les intégrales des équations différentielles ordinaires. (746-759).

Les valeurs réelles $a, b, \ldots, l$ et la variable réelle $x$ étant dans un champ suffisamment petit, et la fonction $\varphi$ étant finie et continue par rapport à ses arguments et satisfaisant aux conditions de Lipschitz, on peut trouver une intégrale de l'équation

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

satisfaisant aux conditions de prendre avec ses $\alpha - 1$ premières dérivées des valeurs arbitrairement données pour $x = a$; avec ses $\beta - 1$ premières dérivées des valeurs arbitrairement données pour $x = b$; ...; avec ses $\lambda - 1$ premières dérivées des valeurs arbitrairement données pour $x = l$, étant

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n.$$

Après avoir démontré que la formule

$$y = \frac{1}{(n-1)!} f(x) \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left[ \frac{\alpha}{f^{\alpha}(a)(x-\alpha)} \int_a^x (a-z)^{n-1} \varphi(z)\, dz \right].$$

étant

$$f(x) = (x - a)^{\alpha} \ldots (x - l)^{\lambda},$$

est une intégrale de l'équation

$$y^{(n)} = \varphi(x),$$

l'auteur démontre le théorème précédent par une méthode d'approximations successives, et en indique l'extension aux systèmes d'équations simultanées, et enfin à une classe d'équations aux dérivées partielles.

*Jadanza* (*Nicodème*). — [U]. La lunette terrestre raccourcie. (803-808).

*Cazzaniga* (*Titus*). — [F2]. Fonctions holomorphes dans le champ elliptique. (808-823).

*Balbi* (*V.*). — [U]. Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1899. (832-848).

*Jadanza* (*Nicodème*). — [J2*e*]. Quelques observations sur le calcul de l'erreur moyenne d'un angle dans la méthode des combinaisons binaires. (883-903).

*Levi-Civita* (*Tullius*). — [H10*e*]. Sur l'intégration de l'équation $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$. (932-956).

Cette intégration dans une aire plane simplement connexe, pour des valeurs de $u$ et de sa dérivée par rapport à la normale données au contour, peut être réduite :

1° A la représentation conforme de l'aire donnée par un cercle;

2° A la résolution d'un certain système d'un nombre infini d'équations linéaires avec un nombre infini d'inconnues.

Pour la résolution de ce système l'auteur donne une méthode d'approximations successives.

*Niccoletti* (*Honoré*). — [H9]. Sur la théorie de la transformation des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. (956-968).

La théorie des transformations *intégro-différentielles* (*voir* Niccoletti, ces *Atti*, 1896-97), étudiées par l'auteur pour les équations linéaires homogènes du deuxième ordre, ne peut s'étendre aux équations linéaires homogènes d'ordre supérieur que dans le cas où les coefficients de l'équation donnée satisfont à des relations particulières.

*Lauricella* (*Jos.*). — [T4*c*]. Sur la propagation de la chaleur. (969-983).

La température variable d'un corps, qui se trouvait initialement à une température quelconque, peut être toujours regardée comme la superposition d'une température stationnaire et d'un nombre fini ou infini de températures élémentaires.

*Cazzaniga* (*Titus*). — [F2]. Sur les fonctions holomorphes et méromorphes dans le champ rationnel et dans le champ elliptique. (983-1002).

Généralisation du théorème de Picard sur les valeurs exceptionnelles des fonctions entières :

*Étant* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *des fonctions entières et* $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ *un système de paramètres arbitraires, il ne peut exister plus de n systèmes de valeurs* $\lambda$ *tels que*

$$f(x) = \lambda_0 \varphi_n + \lambda_0 \varphi_{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} \varphi_1 + \lambda_n$$

*n'ait qu'un nombre fini de zéros.*

Théorème analogue pour les fonctions méromorphes :

*Une fonction holomorphe dans le champ elliptique est une fonction finie dans tout le parallélogramme, à l'exception de l'origine, où elle a un point singulier essentiel; une fonction méromorphe dans le champ elliptique a, dans le parallélogramme, un nombre fini ou infini de pôles et un seul point singulier essentiel à l'origine.*

Si $F(u)$ est holomorphe dans le champ elliptique, il ne peut y avoir plus de trois valeurs de $v$ telles que l'équation

$$F(u) = v$$

ait un nombre fini de racines dans le parallélogramme.

Si $F(u) = \frac{F_1(u)}{F_2(u)}$ est méromorphe dans le champ elliptique, il ne peut y avoir plus de cinq de telles valeurs.

*Severini* (*Charles*). — [D1*b*ε]. Sur la représentation analytique des fonctions réelles discontinues d'une variable réelle. (1002-1023).

Représentation approchée par un polynome rationnel, donnée par Weierstrass pour les fonctions continues (*Sitzungsberichte d. k. preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, 1885).

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES. Journal des candidats aux Écoles spéciales, à la Licence et à l'Agrégation, dirigé par MM. C.-A. LAISANT et X. ANTOMARI [1]. — 3e série.

Tome XIX; 1900.

## Résumé des principales formules de la théorie des fonctions elliptiques. (2-11).

Fonctions de Weierstrass. — Fonctions de Jacobi. — Fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Il est devenu impossible de retenir la multitude de formules mathématiques jouant un rôle dans les applications de jour en jour plus nombreuses. Pour la plupart des formules, il y a des notations consacrées. Il est donc à présumer que le candidat qui possède à fond ces notations doit être en état d'appliquer les formules où elles interviennent. C'est donc avec raison que le Conseil supérieur de l'Instruction publique a décidé de réunir les formules de la théorie des fonctions elliptiques et d'autoriser les candidats à l'Agrégation des Sciences mathématiques à se servir pour les compositions écrites de ce Tableau qui a été publié en cahier à part.

## *Collignon* (*E.*). — Problèmes divers sur la méthode inverse des tangentes. (11-25).

Suite et fin de l'étude commencée au Tome XVIII.

Problème dérivé de celui de M. de Beaune. — Discussion de la solution. — Propriété générale des courbes étudiées. — Cas du parallélisme des droites OX, OH.

## *Sondat* (*P.*). — Théorème sur les équations algébriques. (25-28).

Si l'équation

$$\varphi(x) = ax^n - nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}cx^{n-2} \ldots - nkx - l = 0$$

de degré impair, a $\frac{n+1}{2}$ racines égales, on a, pour cette racine multiple,

$$\rho = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

$\Delta$, $\Delta_1$ et $\Delta_2$ étant des fonctions homogènes et du second degré des coefficients $a, b, c, \ldots, h, k, l$.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXIV$_2$, p. 207.

*Efimov* (*M.*). — Les séries dans la Pangéométrie. (28-31).

Établissement de formules exprimant le théorème de Pythagore ainsi que la relation fondamentale de la Pangéométrie pour la résolution des triangles obliquangles.

*Issaly*. — Sur les équations fondamentales de la théorie des surfaces, rapportées à deux trièdres birectangles supplémentaires mobiles. (49-59).

*Bauer* (*M.*). — Remarques sur la théorie des groupes finis. (59-66).

Généralisation de quelques théorèmes, sur le nombre de certains sous-groupes, exposés par M. Frobenius dans les *Berliner Sitzungsberichte* pour 1895 (p. 163-194, 981-993).

*Lagrange*. — Sur les cubiques strophoïdales. (66-74).

Parmi les propriétés démontrées, nous signalerons que toute cubique strophoïdale peut être, d'une infinité de manières, considérée comme le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère.

*Caspary* (*F.*). — Sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle. (75-77).

Importantes généralisations dues à l'application des méthodes de Grassmann à la Géométrie récente du triangle.

*Vogt*. — Une application de la formule de Stokes. (97-107).

Étant données deux équations

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0,$$

entre trois variables réelles, et à coefficients réels; les fonctions $F_1$, $F_2$ étant finies continues et uniformes dans une certaine région de l'espace; soit dans cette région un contour fermé C ne rencontrant pas la ligne L d'intersection des deux surfaces; l'auteur se propose d'étudier l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0 d \operatorname{arc\,tang} \frac{F_2}{F_1},$$

étendue au contour C parcouru dans un certain sens.

*Pirondini* (*G.*). — Symétrie orthogonale par rapport à un cylindre quelconque. (107-126).

L'auteur résout diverses questions relatives à une symétrie ainsi définie : Deux points A, $A_1$ sont symétriques par rapport à un cylindre K (cylindre

2ud Partie.



ichnographique) quand la droite $AA_1$ est normale à la surface de K et qu'en outre elle est partagée en deux parties égales par cette surface.

Deux figures F, $F_1$ sont symétriques quand l'une d'elles est le lieu des symétriques des points de l'autre.

*Ser* (*J.*). — Note pour servir à l'étude des faisceaux de coniques. (126-129).

Si deux triangles ABC, PQR sont placés de telle sorte qu'une des trois coniques circonscrite aux deux triangles, ou inscrite dans les deux triangles, ou conjuguée des deux triangles, existe, les deux autres existeront simultanément.

*Vacquant* (*A.*). — Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1899). Solution de la question : 1° de Mathématiques spéciales (130-142); 2° de Mathématiques élémentaires. (179-188 et 319).

*Gallucci* (*G.*). — Géométrie du cercle dans le plan. (145-169).

Solution de la question du deuxième Concours des *Nouvelles Annales* pour 1899.

*Michel* (*C.*). — Remarques sur quelques théorèmes généraux de Géométrie métrique. (169-176).

Exposé des rapprochements qui peuvent être établis entre plusieurs théorèmes généraux, de nature différente, énoncés par Chasles, Liouville et Laguerre, complétés et généralisés par M. G. Humbert, dans un important Mémoire sur les applications géométriques du théorème d'Abel (*J. M.*, 1887).

*Tarry* (*G.*). — Carrés magiques supérieurs. (176-177).

*Lefebvre* (*P.*). — Note rectificative. (177-179).

Rectification à la Note du précédent Volume (p. 528).

*Fontené* (*G.*). — Réclamation à propos du théorème dit *de Rouché*. (188).

Il s'agit du théorème sur la discussion d'un système d'équations du premier degré. M. Fontené fait observer qu'il en avait remis l'énoncé à Gerono en septembre 1875, tandis que la Note de M. Rouché fut remise à l'Académie au mois de novembre.

*Duporcq* (*E.*). — Géométrie du cercle dans le plan. (193-213).

Autre solution couronnée de la question du deuxième Concours des *Nouvelles Annales* pour 1899.

*Bilenki* (*H.*). — Note sur les permutants. (213-216).

*Longchamps* (*G. de*). — Sur la règle de Raabe ou règle de Duhamel. (216-218).

*Ocagne* (*M. d'*). — Sur les adjointes infinitésimales d'une courbe plane. (219-224).

Les adjointes considérées sont définies comme le lieu du point de rencontre M' du rayon vecteur OM de la courbe (M) et de la parallèle à la normale (*adjointe des directions normales*), ou à la tangente (*adjointe des directions tangentielles*), issue d'un second pôle P.

*Allan Jerrold*. — Concours de l'École des Ponts et Chaussées (1899); Géométrie analytique. (224-225).

Deuxième Concours des *Nouvelles Annales* pour 1900. (241-244 et 337).

Propriétés d'une certaine surface du troisième ordre.

*Candido* (*G.*). — Pour la Géométrie récente. (244-255).

Principaux sujets traités : point de Lemoine et sa généralisation; cercle de Brocard; point de Gergonne; points (nouveaux) de Terquem; triangle podaire et triangle pédal d'un point.

*Lémeray* (*E.-M.*). — Exposition géométrique élémentaire de quelques propriétés fondamentales des fonctions elliptiques de première espèce. (255-275, 289-306).

L'auteur a entrepris d'exposer les propriétés principales et la double périodicité des fonctions elliptiques au moyen d'une représentation géométrique qui fût la généralisation d'une représentation convenable des fonctions circulaires. Voici les principales subdivisions : sinus; tangente hyperbolique; la fonction sn; les fonctions complémentaires; la fonction $\wp$.

*Philbert du Plessis*. — Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1900. Composition de Mathématiques. (320-334).

*Hilbert* (*D.*) (Traduct. *L. Laugel*). — Sur le principe de Dirichlet. (337-344).

L'auteur propose d'exprimer le principe de Dirichlet sous la forme suivante :

*Tout problème du calcul des variations possède une solution, pourvu que certaines hypothèses restrictives convenablement choisies relatives à la nature des conditions limitatives données soient remplies, et, nécessairement aussi, pourvu que ce que l'on entend par le mot* solution *éprouve une généralisation conforme au sens, à la nature des choses.*

*Landau* (*E.*). — Sur les conditions de divisibilité d'un produit de factorielles par un autre. (344-362 et 576).

Généralisation de diverses propositions déjà connues, entre autres de la formule de Catalan, déduite de la théorie des fonctions elliptiques : le produit $2x_1!\,2x_2!$ est divisible par le produit $x_1!\,x_2!\,(x_1+x_2)!$ pour tous les systèmes $(x_1, x_2) \geqq 0$.

*Lacour* (*E.*). — Sur la surface de l'onde et la surface correspondante d'élasticité. (362-369).

Définition simultanée des deux surfaces, et formation de leurs équations.

*Bricard* (*R.*). — Au sujet d'un théorème de M. G. Humbert. (369-370).

Démonstration élémentaire du théorème ainsi énoncé :

*Soient données dans un plan une conique* C *et quatre droites* $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$. *S'il existe une conique* C' *circonscrite au triangle formé par trois de ces droites, passant par les points communs à la quatrième droite et à* C, *et enfin tangente à* C, *il existe trois coniques analogues que l'on obtiendra en permutant les quatre droites de l'énoncé.*

*Piccioli* (*H.*). — Sur les développantes de certaines lignes en $S_n$ et sur une propriété caractéristique des courbes hypersphériques à courbure constante. (385-390).

Par ligne en $S_n$, l'auteur entend une ligne dans un espace à $n$ dimensions. Voici, par exemple, une des propriétés énoncées :

*Les courbes qui ont pour développantes des hélices sphériques de* $S_3$ *sont les géodésiques du cône de révolution de* $S_3$ *et les géodésiques cylindro-coniques de* $S_4$.

*Dolbnia* (*J.*). — Remarque sur l'inversion des intégrales elliptiques. (390-392).

Solution d'une contradiction qui se présente dans l'exposé de la transformation de Landen.

*Issaly*. — Sur le développement de l'équation différentielle des lignes géodésiques d'une surface. (392-400).

*Fontené* (*G.*). — Sur les surfaces du quatrième ordre qui ont deux droites doubles. (400-409).

Application de différentes idées énoncées par M. R. Bricard.

*Ripert* (*L.*). — Sur la simplification des formules d'angles et de distances en Géométrie de l'espace. (409-419).

Définitions et notations. — Angles et perpendicularité. — Distances. — Comparaison avec les formules de Géométrie plane. — Utilité de la forme détriplée (donnée aux équations d'une droite, et représentant ses projections sur les trois plans coordonnés).

*Jamet* (*V.*). — Sur les invariants de la forme biquadratique binaire. (419-427).

L'auteur s'est proposé de montrer comment la méthode de Ferrari, pour la résolution de l'équation du quatrième degré, fait connaître les invariants proprement dits de la forme biquadratique binaire, et aussi les coefficients de l'équation aux rapports anharmoniques des racines de l'équation biquadratique.

*Agrégation des Sciences mathématiques.* — Concours de 1900. (427-430).

*École Normale supérieure.* — Concours de 1900. (430-431).

*Collignon* (*E.*). — Problèmes sur les normales aux courbes planes. Courbes dans lesquelles la somme N + N′ est constante. (433-442).

N et N′ désignant les longueurs des normales en M, limitées à O$x$ et à O$y$ (coordonnées rectangulaires), l'équation différentielle des courbes considérées est donc

$$y\sqrt{1+p^2} \pm \frac{x}{p}\sqrt{1+p^2} = a,$$

avec

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

L'auteur observe que ces courbes sont les trajectoires orthogonales de droites de longueur constante qui se déplacent entre les deux axes de coordonnées.

*Note.* — Le problème ainsi transformé a été posé déjà sous le n° 1360 (P. Barbarin) et résolu dans le Volume de 1884 par M. E. Fanquembergue (p. 438-440).

Toutes ces trajectoires orthogonales sont les développantes d'une même épicycloïde (qui est l'astroïde enveloppe du segment rectiligne ci-dessus défini).

*Iaggi* (*E.*). — Sur l'intégrale d'Euler et l'addition des fonctions elliptiques de première espèce. (443-450).

Euler a donné, sans démonstration, l'intégrale générale de l'équation classique fondamentale des fonctions elliptiques.

Depuis, il en a été fait de nombreuses démonstrations, parmi lesquelles il convient de signaler celles de Clebsch et de M. Darboux.

L'auteur s'est proposé de les simplifier autant que possible de façon à les rendre élémentaires. Il en déduit la relation connue qui représente le théorème d'addition, et il les compare ensuite aux formules relatives aux fonctions circulaires.

*Mangeot* (*S.*). — Sur la symétrie de deux figures algébriques par rapport à un point. (451-466).

Cas de deux courbes planes ou de deux surfaces.

Cas de deux courbes gauches définies par quatre équations de même degré.

Cas de deux courbes gauches définies par quatre équations n'ayant pas toutes le même degré.

Centre d'une courbe gauche.

*Blutel.* — Sur le minimum de l'angle que fait un diamètre d'un ellipsoïde avec son plan diamétral conjugué. (466-468).

Dans une Communication présentée à la *Société mathématique de France* (p. 66-68) sur les expériences du commandant Hartmann (voir *Bulletin*, IIe Partie, p. 158; 1901), M. Appell, à la demande de qui cette Note a été rédigée, s'est servi de la propriété ici établie, que le minimum correspond au plan diamétral passant par l'axe moyen.

*Saint-Germain* (*A. de*). — Solution du problème de Mécanique proposé au Concours d'agrégation en 1899. (468-475).

Premier Concours des *Nouvelles Annales* pour 1901. (481-482).

*Iaggi* (*E.*). — Sur les substitutions uniformes et le problème de Babbage. (483-489).

Contribution nouvelle à la théorie des fonctions itérées, étudiée dans ce Recueil et aussi dans d'autres par l'auteur du présent Article et par MM. Leau et Lémeray.

*Cesaró* (*E.*). — Sur une classe de courbes planes remarquables. (489-494).

Les courbes ici considérées sont représentées par l'équation intrinsèque

$$s = \int \frac{\lambda\, d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\mu} - 1}},$$

$\lambda$ et $\mu$ étant deux constantes, dont la première peut être prise indifféremment avec le signe $+$ ou $-$.

Aux nombreuses propriétés que l'auteur a déjà signalées, vient s'ajouter aujourd'hui une propriété nouvelle des lignes de Ribaucour.

*Fontené* (*G.*). — Formes réduites d'une relation triplement linéaire entre trois variables. (494-498).

*Issaly*. — Sur l'hélicoïde général. (499-502).

Il s'agit du lieu géométrique représenté par le système

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = \varphi(r) + a\theta.$$

Moyennant une détermination convenable de la fonction $\varphi$, cette surface devient apte à reproduire toute une série de surfaces minima allant de l'hélicoïde gauche, à plan directeur, à l'alysséide de Bour.

L'objet du présent Article est de déterminer cette fonction $\varphi$ par une méthode simple et directe, n'empruntant rien, ni à l'équation de Lagrange, ni à l'intégrale de Monge, ni à l'emploi des lignes coordonnées dites *de longueur nulle*.

*Vacquant* (*A.*). — Démonstration géométrique d'une propriété des normales à une conique à centre. (502-506).

Détermination du centre de l'hyperbole d'Apollonius.

*Jamet* (*V.*). — Sur la transformation, point par point, des courbes algébriques. (506-508).

*Bauer* (*M.*). — Note sur les groupes finis. (508-509).

*Bauer* (*M.*). — Note sur les groupes d'ordre $p^\alpha$. (509-511).

*Lagrange* (*A.*). — Solution de la question du Premier Concours des *Nouvelles Annales* pour 1900. (529-536).

*Iaggi* (*E.*). — Sur une nouvelle transcendante qui transforme l'intégrale elliptique de première espèce en une intégrale circulaire. (537-547).

*Stuyvaert*. — Sur une gerbe de cubiques gauches. (548-557).

*Lamioni* (*C.*). — Sur deux théorèmes de Géométrie différentielle. (557-560).

Démonstration directe et très simple des deux théorèmes suivants, énoncés par M. Bianchi :

*Si une ligne de courbure est géodésique, elle est plane.*
*Chaque ligne géodésique plane est ligne de courbure.*

## *Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.*

Le Journal a continué à publier les sujets de composition d'Analyse, de Géométrie, de Mécanique et d'Astronomie donnés aux sessions d'examens de juillet et de novembre dans les Facultés des Sciences, suivant l'esprit des anciens programmes de la Licence. Le lecteur les trouvera, pour juillet et novembre 1899, aux pages 31-45, 77-85, 225-237, 276-285, 307-318, 371-375, et, pour juillet 1900, aux pages 512-526 et 560-567, avec un aperçu de la solution de quelques-unes des questions posées.

Nous avons, par ailleurs, déjà fait ressortir l'importance et l'utilité de cette collection d'exercices dont plusieurs ont fait l'objet de travaux spéciaux de différents Collaborateurs.

### SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

*Abonné.* — Rectification aux énoncés de deux questions. Degré d'une certaine courbe lieu de l'intersection de deux normales particulières.

*Anonyme.* — Propriété du tétraèdre.

*Audibert.* — Intégration d'une équation différentielle.

*Droz-Farny* (*A.*). — Propriété de l'ellipse et du cercle osculateur. Propriété de cercles associés à un quadrangle. Formule combinatoire. Droite de Simson.

*Fontené* (*G.*). — Perspective de l'intersection de deux surfaces algébriques.

*Retali* (*V.*). — Aire d'une certaine courbe du sixième ordre. Propriété d'une cubique. Relation métrique dans l'ellipse de Steiner.

*Ripert* (*L.*). — Discussion de la surface $\Sigma(=\sqrt{x^2+y^2})=2a$. Théorèmes d'Arithmologie. Relation métrique dans l'ellipse de Steiner.

En résumé, la statistique de cette partie du Journal représente seize questions résolues, onze énoncés anciens réimprimés, et soixante-huit questions nouvelles se terminant à l'énoncé n° 1900.

Ajoutés à ceux des questions de concours universitaires, dont le détail a été donné d'autre part, ces chiffres attestent l'importance que les Rédacteurs n'ont cessé de donner avec raison aux différents sujets d'application des Mathématiques.

Cette année, les Rédacteurs ont apporté au programme habituel du Journal un perfectionnement très sensible, consistant à annexer à chaque Numéro un petit Supplément de quatre pages renfermant une chronique des principaux faits d'actualité scientifique, quelques annonces ou questions de concours, un relevé de publications récentes, des Notes biographiques ou bibliographiques, des programmes d'admission au concours de l'Agrégation, des résumés de Thèses du Doctorat, etc.; mais l'innovation originale et inattendue a été d'ajouter quelques portraits de mathématiciens célèbres. C'est ainsi que durant l'année 1900 les Rédacteurs ont publié successivement les portraits de Lagrange (1736-1813) et de Sylvester (1814-1897).

La continuation de cette précieuse galerie ne sera pas un des moindres attraits du Journal.

H. B.

---

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, fondé par J. LIOUVILLE et continué par C. JORDAN.

4e série, tome I; 1885 (1).

## *Hermite.* — Sur les fonctions holomorphes. (9-10).

Démonstration de ce théorème :

*Toute fonction holomorphe $f(z)$, telle que le rapport $\frac{f(z)}{z^n}$ reste fini pour $z$ infiniment grand, est un polynome du degré $n$ en $z$.*

## *Halphen (G.-H.).* — Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires. (11-85).

Le problème général qui consiste à tirer tout le parti possible de la connaissance d'une relation algébrique entre plusieurs solutions d'une équation différentielle se ramène, dans le cas où l'équation est *linéaire,* au suivant :

*Intégrer une équation différentielle lineaire, quand on connaît, en fonction de la variable indépendante, l'expression d'un polynome entier, homogène, à coefficients constants, formé avec les solutions inconnues.*

C'est à ce problème qu'est consacré le présent Mémoire, qui se divise en trois Parties, traitant la première de la *théorie générale,* la deuxième des *équations du second ordre,* la troisième des *équations du troisième ordre.*

La méthode que suit l'auteur est une méthode nouvelle, fondée sur la considération des covariants des formes algébriques; elle met en lumière les cas exceptionnels où tombent en défaut les prévisions déduites de l'élimination, et

---

(1) Voir *Bulletin,* t. $X_2$, p. 220.

dont le plus important est celui où la relation donnée exprime l'évanouissement d'une forme quadratique homogène par rapport aux solutions inconnues.

*Picard* (*Ém.*). — Sur les fonctions hyperabéliennes. (87-128).

M. Picard généralise les fonctions abéliennes de deux variables en considérant les fonctions uniformes de deux variables $x$ et $y$, qui ne changent pas quand on effectue sur ces variables un groupe de substitutions de la forme

$$(1) \qquad \left(x, y, \frac{ax+b}{cx+d}, \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right),$$

les deux substitutions devant se faire simultanément.

Plus généralement, il étudie les groupes dont les substitutions sont, soit de la forme précédente, soit de la forme

$$(2) \qquad \left(x, y, \frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}, \frac{\alpha' x+\beta'}{\gamma' x+\delta'}\right).$$

C'est à un tel groupe, supposé *discontinu* pour un certain domaine de valeurs de $x$ et $y$, que l'auteur donne le nom de *groupe hyperabélien*.

Le premier Chapitre de son Mémoire traite d'une classe étendue de groupes hyperabéliens qui se présente dans l'étude arithmétique des formes quadratiques quaternaires réelles à coefficients entiers, quand elles sont réductibles au type

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

à chacune de ces formes correspond un groupe hyperabélien, dont on peut trouver les substitutions fondamentales.

Le Chapitre II est consacré à des considérations générales sur les groupes hyperabéliens, particulièrement quand toutes leurs substitutions sont de la forme (1).

Au Chapitre III est abordée l'étude difficile des fonctions hyperabéliennes relatives à un groupe donné, étude qui se relie étroitement à la notion du genre des surfaces algébriques.

Dans le Chapitre IV, M. Picard indique le premier exemple de groupe hyperabélien qu'il a rencontré et auquel il a été conduit par l'examen d'un cas particulier, concernant la théorie des fonctions abéliennes du second genre.

*De Saint-Germain.* — Sur une application des équations de Lagrange. (129-134).

Mouvement d'un point M, assujetti à rester sur un cône et sollicité par deux forces dirigées, l'une vers le sommet O du cône, l'autre suivant la perpendiculaire MN abaissée du point M sur une droite issue du point O; les deux forces sont inversement proportionnelles, la première au cube de MO, la seconde au cube de MN.

*Laguerre.* — Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels. (135-165).

Étant donnée une série $z$, ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de $\frac{1}{x}$, on sait qu'une fraction rationnelle de degré $n$, $\frac{f_n(x)}{\varphi_n(x)}$ est appelée *réduite d'ordre n de z* si le développement de la différence

$$z - \frac{f_n}{\varphi_n}$$

a pour premier terme un terme en $x^{-2n-1}$.

La série $z$ étant supposée satisfaire à une équation de la forme

$$W\frac{dz}{dx} = 2Vz + U,$$

où U, V, W sont des polynomes entiers en $x$, l'objet de ce Mémoire est de fournir les moyens de calculer par voie de récurrence les deux termes de toute réduite d'ordre quelconque de $z$.

L'auteur y parvient en prouvant que $f_n$ satisfait à une équation linéaire du second ordre, homogène, dont les coefficients sont des polynomes entiers.

Comme premières applications, il considère la fonction

$$z = \log\frac{1+x}{1-x},$$

pour laquelle les dénominateurs $f_n$ des réduites successives sont les polynomes de Legendre et la fonction

$$z = e^x x^{-\alpha}\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx,$$

à propos de laquelle se présentent des formules permettant de calculer avec une grande approximation les valeurs numériques de l'importante intégrale

$$\int_a^\infty e^{-t^2}\,dt,$$

et de la fonction de Prym

$$\int_1^x e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx.$$

Les applications suivantes concernent les deux fonctions

$$z = \sqrt{x^4+2\lambda x^2+1}\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+2\lambda x^2+1}},$$

$$z = (x^3+3qx+h)^{\frac{2\mu}{3}}\int_x^\infty \frac{dx}{(x^3+3qx+h)^{\frac{2\mu}{3}}},$$

qui conduisent à des équations aux différences finies, dont l'intégration semble devoir présenter de grandes difficultés.

*Poincaré* (*H.*). — Sur les courbes définies par les équations différentielles (troisième Partie). (167-244).

Suite des recherches publiées dans les Tomes VII et VIII de la troisième série de ce Journal. On sait que, pour étudier l'équation différentielle

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

M. Poincaré pose

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y,$$

et, regardant $x$ et $y$ comme les coordonnées d'un point mobile, $t$ comme le temps, recherche le mouvement de ce point. En particulier, il cherche si le point décrit une courbe fermée, s'il reste toujours dans une région limitée du plan; en d'autres termes, si son orbite est *stable* ou *instable*.

Mais il importe de bien définir ce qu'il faut entendre par *stabilité* ou *instabilité*. On dira que la trajectoire est *stable* si, étant donnée autour du point de départ une circonférence ou une sphère de rayon $r$, le mobile, après être sorti de ce domaine, y rentre une infinité de fois, et cela quelque petit que soit $r$. Si, au contraire, il n'y rentre plus, la trajectoire sera *instable*.

Ces définitions posées (Chap. X), l'auteur étudie (Chap. XI) la stabilité autour de l'origine, dans l'hypothèse où X et Y sont des polynomes entiers en $x$ et $y$ sans terme constant.

Abordant ensuite (Chap. XII) les équations de degré supérieur

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

M. Poincaré pose ainsi le problème :

*On donne la surface*

$$F(x, y, z) = 0$$

(*supposée sans nappes infinies*) *et l'on demande d'étudier le mouvement d'un point sur cette surface, d'après les équations*

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \qquad \frac{dz}{dt} = Z,$$

*où* X, Y, Z *sont des polynomes entiers en* $x$, $y$, $z$ *assujettis à la condition*

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} = MF.$$

Après l'examen de la distribution des points singuliers (Chap. XIII) vient (Chap. XIV) la généralisation de plusieurs des théorèmes établis dans les deux premières Parties.

Enfin, les surfaces de genre 1 étant les seules sur lesquelles il puisse n'exister aucun point singulier, l'auteur traite (Chap. XV) des surfaces du genre 1 sans point singulier, en faisant l'étude particulière du tore circulaire

$$z^2 + (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = r^2.$$

Cette surface n'est choisie que pour fixer les idées, tout ce qu'on peut dir d'elle s'appliquant à une surface quelconque du genre 1 (sans point singulier qui n'en diffère pas au point de vue de la Géométrie de situation.

*Appell* (*P.*). — Sur l'inversion des intégrales abéliennes. (245-279).

L'objet de ce Mémoire est de démontrer le théorème que voici :

*Soient $x$ et $y$ deux variables imaginaires liées par une équation algébrique et $\varphi_1(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de $x$ et $y$; il exist toujours un certain nombre $(n-1)$ d'autres fonctions rationnelles de $x$ et y*

$$\varphi_2(x, y), \quad \varphi_3(x, y), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x, y),$$

*possédant la propriété suivante : le système de $n$ equations différentielle*

$$\varphi_i(x_1, y_1)\,dx_1 + \varphi_i(x_2, y_2)\,dx_2 + \ldots + \varphi_i(x_n, y_n)\,dx_n = du_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

*définit les $n$ points analytiques*

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n),$$

*en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de telle façon que les $n$ valeurs*

$$R(x_1, y_1), \quad R(x_2, y_2), \quad \ldots, \quad R(x_n, y_n),$$

*que prend une fonction rationnelle quelconque $R(x, y)$ en ces points, son racines d'une équation algébrique à coefficients uniformes en $u_1, u_2, \ldots, u_n$*

*Picard* (*Ém.*). — Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce. (281-346).

« Considérons, dit l'auteur, une fonction algébrique $z$ de deux variables indépendantes $x$ et $y$, définie par l'équation irréductible

$$f(x, y, z) = 0,$$

où $f$ est un polynome. On peut faire correspondre à cette surface des intégrales de différentielles totales de la forme

$$\int P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy,$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de $x$, $y$, $z$; bien entendu, la condition d'intégrabilité de l'expression différentielle $P\,dx + Q\,dy$ doit être supposée satisfaite.

» Nous ne voulons considérer dans ce Travail que les intégrales de différentielles totales de *première espèce*, c'est-à-dire celles qui restent finies pour tout système de valeurs, finies ou infinies, des variables indépendantes $x$ et $y$.

» Dès le début de cette étude on rencontre une différence bien profonde entre le cas d'une variable et celui de deux variables.

» On sait, en effet, qu'à une courbe algébrique correspondent, en général, des intégrales de première espèce. Il n'en est pas ainsi pour les surfaces algébriques : il n'existe pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, correspondant à la surface la plus générale du degré $m$. Comment peut-on reconnaître si une surface donnée possède des intégrales de première espèce, et quel est le nombre de ces intégrales linéairement indépendantes?

» Telles sont les questions dont nous nous occupons dans les deux premiers Chapitres de ce Mémoire.

» Le troisième Chapitre est consacré à l'étude d'une classe de surfaces algébriques, dans laquelle la notion des intégrales de première espèce joue un rôle important : ce sont les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres, et nous y ajoutons cette autre condition qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un *seul* système de valeurs des paramètres, abstraction faite, bien entendu, des multiples des périodes.

» Nous terminons ce Travail par l'étude des équations de la forme

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

nous proposant de reconnaître si l'on peut satisfaire à cette équation en prenant pour $u$ une fonction uniforme, quadruplement périodique de $x$ et $y$. »

*Humbert* (*G.*). — Application géométrique d'un théorème de Jacobi. (347-356).

Cette application consiste en ce théorème :

*La somme des cotangentes des angles d'intersection de deux courbes algébriques est égale à la somme analogue pour deux courbes quelconques, respectivement asymptotiques aux premières.*

Cette proposition donne lieu à diverses conséquences intéressantes.

*Le Cordier*. — Actions électrodynamiques renfermant des fonctions arbitraires; hypothèses qui déterminent ces fonctions. (357-401).

*Darboux* (*G.*). — Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe. (403-430).

L'auteur donne, d'un théorème posthume de Jacobi, une démonstration directe et élémentaire, qui conduit à quelques propositions nouvelles, relatives à la représentation cinématique du mouvement. Nous citerons celle-ci, qui est l'une des plus simples :

*Le mouvement le plus général du corps considéré peut se représenter par le roulement d'un cône ayant pour base une herpolodie, sur une sphère ayant son centre sur la verticale du point de suspension.*

*Autonne* (*L.*). — Recherches sur les groupes d'ordre fini con-

tenus dans le groupe Cremona. Premier Mémoire : Généralités et groupes quadratiques. (431-454).

Comme son titre l'indique, ce Travail a pour objet la détermination des groupes finis contenus dans le groupe des substitutions birationnelles entre trois variables homogènes.

Après quelques généralités applicables à tous les groupes, l'auteur expose la théorie complète des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique.

*Gordan* (*P.*). — Sur les équations du cinquième degré. (455-458).

Tome II; 1886.

*Mannheim* (*A.*). — Mémoire d'Optique géométrique comprenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface réglée et son emploi tant pour la démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques. (5-48).

Ce Mémoire renferme la solution géométrique complète, donnée pour la première fois et dans le cas le plus général, du problème de la détermination des éléments des surfaces caustiques.

L'auteur commence par rappeler l'emploi qu'il a déjà fait d'un point représentatif pour étudier les propriétés des surfaces réglées, et donne, à l'aide de ce point, des démonstrations nouvelles de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces; il construit le rayon de courbure de la section faite dans une surface par un plan qui lui est normal, retrouvant ainsi la relation d'Euler et l'indicatrice de Dupin.

Grâce à une représentation plane très simple des pinceaux de rayons, M. Mannheim résout, par deux constructions *planes*, le problème suivant :

*Étant donnés les éléments d'un pinceau quelconque de rayons lumineux incidents et les éléments de courbure de la surface séparatrice des milieux traversés par ces rayons, déterminer les éléments du pinceau formé par ces rayons après leur réfraction.*

A l'occasion de la seconde construction, il donne une démonstration nouvelle du théorème de Malus et Dupin et retrouve divers résultats dus soit à Sturm, soit à M. J. Bertrand.

Le Mémoire se termine par le calcul des éléments du pinceau réfracté lorsqu'il est formé de normales à une surface.

*Autonne* (*Léon*). — Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. Deuxième Mémoire : Groupes cubiques. (49-103).

Ce Mémoire fait suite à celui où l'auteur a exposé (*Journal de Mathéma-*

*tiques,* année 1885) la théorie des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique Cremona.

Soit une substitution cubique

$$S = |z_i \quad \varphi_i(z_1, z_2, z_3)| \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La cubique générale

$$\varphi = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3 = 0 \qquad (u_i = \text{const. arbitr.})$$

du réseau de S a un point double fixe $\omega$ indépendant des $u_i$ et quatre points également fixes. Le point $\omega$ et les quatre points fixes sont dits les *points fondamentaux de* S.

M. Autonne s'occupe seulement des groupes cubiques qui satisfont aux deux conditions suivantes :

1° Aucune substitution du groupe n'a de points fondamentaux infiniment voisins ;

2° Le point $\omega$ est le même pour *toutes* les substitutions cubiques du groupe.

Son Mémoire est divisé en cinq Parties.

La première Partie traite de la multiplication des substitutions cubiques et contient la démonstration d'un résultat capital, qui domine toute la théorie :

*Un groupe cubique* G *d'ordre fini est isomorphe à un groupe* $\Sigma$ *linéaire, à deux variables homogènes, d'ordre fini.*

Ce groupe $\Sigma$ est appelé groupe *directeur* de G ; est dit *normal* le groupe $\Gamma$ contenu dans G et correspondant à la substitution unité de $\Sigma$.

La deuxième Partie contient la théorie complète des groupes normaux et leur réduction à sept types.

Dans la troisième Partie, l'auteur examine quelle peut être la nature du groupe directeur $\Sigma$, lorsque $\Gamma$ appartient successivement aux sept types précédents.

Dans la quatrième Partie est traité le cas particulier des groupes *normo-linéaires* (groupes résultant de la combinaison d'un groupe normal $\Gamma$ avec un groupe linéaire à trois variables homogènes).

Dans la cinquième Partie, M. Autonne, au lieu d'énumérer les groupes cubiques d'ordre fini, dont le nombre est d'une cinquantaine, se borne à faire sur un exemple particulier la construction d'un groupe cubique G dont on se donne le groupe normal $\Gamma$, choisi dans l'un des sept types mentionnés plus haut, et le groupe directeur $\Sigma$ choisi parmi les divers types énumérés par M. Jordan (*Journal de Crelle,* t. 84).

*Weierstrass* (*K.*). — Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites *arbitraires* d'une variable réelle. (Traduction L. Laugel). (105-113).

*Weierstrass* (*K.*). — Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites *arbitraires* d'une variable réelle. (Traduction L. Laugel). (115-138).

*Anglin* (*A.-H.*). — Sur le coefficient du terme général dans certains développements. (139-150).

L'objet de ce Mémoire est d'obtenir, sous forme finie, le coefficient du terme général de quelques développements, qui n'a été obtenu jusqu'ici que sous forme de séries, en déterminant la somme de certaines de ces séries.

La méthode employée repose sur ce théorème :

*La somme*

$$a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)$$

*est divisible par*

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b);$$

*le quotient $h_n$ est la somme des produits homogènes de degré n de a, b, c et de leurs puissances.*

*Poincaré* (*H.*). — Sur les courbes définies par les équations différentielles (quatrième Partie). (151-217).

Ce Mémoire contient la suite des recherches dont l'auteur a publié les trois premières Parties dans le *Journal de Mathématiques,* 3e série, t. VII et VIII, et 4e série, t. I. Il est divisé en quatre Chapitres.

Le Chapitre XVI traite des équations du second ordre et de leurs points singuliers.

Le Chapitre XVII, de l'intégration par les séries.

Le Chapitre XVIII, de la distribution des points singuliers.

Le Chapitre XIX contient l'étude des courbes fermées.

*Lipschitz.* — Propositions arithmétiques tirées de la théorie de la fonction exponentielle. (219-237).

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite :

« En étudiant vos recherches sur la fonction exponentielle, par lesquelles vous avez dévoilé une liaison inattendue entre l'Analyse et l'Arithmétique, recherches appliquées si heureusement par M. Lindemann et traitées de nouveau dans un Mémoire récent de M. Weierstrass, je me suis demandé si les procédés caractéristiques qui y sont mis en jeu ne permettent pas de parvenir à des résultats arithmétiques, dans lesquels les fonctions transcendantes sont disparues. Cette voie prise, j'ai réussi à trouver un ensemble de théorèmes qui se réfèrent à toutes les équations dont les coefficients sont des nombres entiers. »

*Humbert* (*G.*). — Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques. (239-329).

*Introduction.* — « M. Poincaré a démontré qu'on peut toujours exprimer les coordonnées des points d'une courbe algébrique en fonction fuchsienne d'un paramètre : c'est ce résultat capital qui a servi de point de départ au présent Mémoire et nous a permis d'appliquer aux courbes de genre quelconque les

2e Partie.



principes et la méthode dont nous avons fait usage, dans un autre Travail, pour étudier les courbes de genre *un*.

»...Le théorème d'Abel et les éléments de la théorie de l'inversion des intégrales abéliennes de première espèce permettent de traiter, d'une manière complète, la question de l'intersection d'une courbe algébrique et d'une courbe adjointe quelconque, et de résoudre, en particulier, dans le cas des courbes adjointes, le problème dit *des courbes de contact*.

» Pour les courbes non adjointes, il faut introduire en outre des intégrales de troisième espèce; la question se rattache alors au problème de l'inversion étendu et Clebsch ne l'a pas traitée d'une manière générale, au point de vue géométrique.

» L'emploi des fonctions fuchsiennes nous a permis de combler cette lacune, sans recourir à la théorie des intégrales de troisième espèce; nous avons d'ailleurs envisagé la question de l'intersection d'une courbe algébrique et d'une courbe quelconque, adjointe ou non adjointe, à un autre point de vue que Clebsch...

» Les cinq premiers paragraphes de notre Travail sont consacrés à l'extension de quelques propriétés importantes des fonctions fuchsiennes et thêtafuchsiennes; en particulier on démontre au paragraphe III une proposition purement algébrique, relative aux zéros et aux infinis d'une fonction fuchsienne, proposition identique, au fond, au théorème d'Abel et qui joue dans notre théorie le rôle que joue, dans la théorie des courbes de genre *un*, le théorème de Liouville sur les zéros et les infinis d'une fonction doublement périodique.

» Dans les paragraphes VI-X, on expose les principes de la représentation des coordonnées des points d'une courbe à l'aide des fonctions thêtafuchsiennes, et l'on étudie l'intersection d'une courbe de genre $p$ et d'une courbe adjointe. On est ainsi conduit à distinguer deux espèces de courbes de genre $p$.

» Dans les paragraphes XI-XII, on aborde la question de l'intersection d'une courbe de genre $p$ et d'une courbe quelconque et l'on traite le problème général des courbes de contact.

» On termine enfin par l'étude sommaire de quelques courbes spéciales, des courbes hyperelliptiques en particulier. »

## *Picard* (*Ém.*). — Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce. (329-372).

M. Picard appelle *intégrale de différentielle totale relative à une surface algébrique*

$$f(x, y, z) = 0$$

toute intégrale de différentielle totale de la forme

$$\int (P\,dx + Q\,dy). \tag{1}$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de $x$, $y$ et $z$. Dans un précédent Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 1885), il s'était occupé uniquement des intégrales de première espèce, c'est-à-dire des intégrales qui restent finies pour toute valeur des variables indépendantes.

Le Travail actuel est consacré aux intégrales de seconde espèce, dont voici la

définition. L'intégrale (1) est dite *de seconde espèce*, si sa valeur prise le long de *tout cycle* infiniment petit est nulle; un *cycle* est une suite continue fermée à *une* dimension de valeurs de $x$ et $y$, telle de plus que les valeurs initiale et finale de $z$ soient les mêmes.

« Une première proposition fondamentale, dit l'auteur, est la suivante :

» *Si la surface $f$ est la plus générale de son degré, toute intégrale de seconde espèce se réduit à une fonction rationnelle de $x$, $y$ et $z$.*

» Ainsi, en faisant abstraction des fonctions rationnelles des coordonnées, il n'y a pas, pour une surface quelconque, d'intégrale de seconde espèce; c'est ce que nous avions déjà rencontré pour les intégrales de première espèce.

» La question qui se pose alors est de reconnaître si une surface possède des intégrales de seconde espèce autres que des fonctions rationnelles. La question est bien plus difficile à résoudre que le problème analogue pour les intégrales de première espèce. Sa solution forme l'objet principal du deuxième Chapitre de ce Mémoire.

» Dans le troisième Chapitre, je reviens sur les fonctions hyperabéliennes et hyperfuchsiennes dont je me suis occupé précédemment dans différents Mémoires. On sait que toutes les fonctions de cette nature, correspondant à un groupe donné, peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de trois d'entre elles, $x$, $y$, $z$, liées par une relation algébrique

$$f(x, y, z) = 0.$$

» Or une telle surface présente précisément ce caractère remarquable *de posséder en général des intégrales de seconde espèce.* Ceci m'a permis de répondre à la question suivante qui m'avait longtemps préoccupé :

» *Peut-on, avec les fonctions hyperfuchsiennes (ou hyperabéliennes), engendrer toutes les fonctions algébriques de deux variables indépendantes, ou, ce qui revient au même, obtenir toutes les surfaces algébriques?*

» La réponse, pour être *négative*, ne m'en semble pas moins présenter quelque intérêt. »

*Lipschitz.* — Recherches sur la transformation, par des substitutions réelles, d'une somme de deux ou de trois carrés en elle-même (Traduction J. Molk). (373-439).

*Jablouski (E.).* — Sur une loi de Fresnel. (441-466).

Cette loi, admise par Fresnel dans sa théorie mécanique de la réfraction, est la suivante :

*Dans deux milieux éthérés différents, les carrés des vitesses de propagation des ondes planes sont en raison inverse des densités de ces milieux.*

Cette hypothèse est en contradiction avec le principe même de la théorie de

Fresnel, qui, comme celle de Cauchy, repose sur l'action à distance, action d'autant plus forte que la distance est plus faible; elle est, de plus, incompatible avec la dispersion. Elle doit donc être rejetée.

M. Jablouski prouve qu'on peut l'abandonner sans regret, car elle est absolument *inutile;* à cet effet, il reprend la théorie générale de la réfraction et de la réflexion, et, l'appliquant au cas particulier considéré par Fresnel, il montre que l'hypothèse condamnée n'y intervient en aucune façon. Il explique en terminant pourquoi le rejet de cette loi n'est nullement en contradiction avec les vérifications expérimentales des formules de Fresnel relatives aux intensités.

## Tome III; 1887.

### *Appell.* — Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F = 0$. (5-52).

Les fonctions que l'auteur considère se présentent dans divers problèmes de Physique mathématique. Elles sont périodiques, satisfont à l'équation de Laplace et présentent des pôles simples.

La première étudiée est la fonction

$$C_1(x, y, z; a) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sum{}' \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-ma)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{m^2a^2}} \right],$$

où les radicaux sont pris positivement, la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières de $m$, positives et négatives, zéro excepté. Elle ne change pas quand on augmente $x$ de $a$ et admet pour pôles les points de l'axe des $x$ d'abscisse nulle ou égale à $ma$.

Si l'on pose

$$C_1(x, y, z; a) = A_0 + A_1 \cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots + A_\nu \cos\frac{2\nu\pi x}{a} + \ldots,$$

on trouve, en désignant par C la constante d'Euler

$$A_0 = -\frac{1}{a}\log u + \frac{2}{a}(\log 2a - C),$$

$$A_\nu = \frac{2}{a}\int_0^\infty e^{-tu-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2t}}\frac{dt}{t},$$

$u$ désignant la somme $y^2+z^2$.

Après avoir développé en série trigonométrique à double entrée une fonction $C_2(x, y, z; a, b)$ analogue à la précédente, et qui admet relativement à $x$ la période $2a$, et relativement à $y$ la période $2b$, M. Appell passe aux fonctions uniformes satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ et admettant trois groupes de périodes, nombre maximum pour une fonction de trois variables réelles. Il représente par une série trigonométrique celles de ces fonctions qui n'ont que des pôles dans un parallélépipède élémentaire.

*David.* — Applications de la dérivation d'Arbogast. Formule générale pour le changement de la variable indépendante. (53-62).

Les Traités de Calcul différentiel donnent la règle du changement de variable indépendante; mais on est bientôt forcé de s'arrêter, à cause des calculs prolixes que l'on rencontre et dans lesquels aucune loi ne se manifeste. En employant la notation d'Arbogast, M. David a pu résoudre le problème dans le cas général, confirmant ainsi l'observation de Lacroix, que la méthode d'Arbogast a été trop peu remarquée.

*Autonne* (*L.*). — Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact. (63-85).

Le présent Travail a pour objet les substitutions birationnelles et, parmi elles, les substitutions de contact. Il est divisé en deux Parties.

Dans la première, l'auteur établit les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une substitution soit *de contact,* quand elle est de la forme

$$\begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(\overset{p}{x}, \overset{q}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{r}{x}, \overset{s}{u}) \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où $\varphi_i$ et $\psi_i$ sont des polynomes homogènes, dans lesquels les $x_i$ et les $u_i$ entrent aux dimensions marquées par les entiers $p$, $q$, $r$, $s$.

Il détermine ensuite les deux formes, *monistique* et *dualistique,* dont l'une appartient nécessairement à toute substitution birationnelle de contact quand l'un des entiers $p$, $q$, $r$, $s$ est zéro ou un. Quand aucun d'eux ne dépasse l'unité, la substitution est dite *linéaire.*

Après avoir défini la composition des substitutions de contact, M. Autonne établit dans la seconde Partie une proposition qui permet de construire tous les groupes linéaires G de contact et d'ordre fini, ce qui résout complètement le problème proposé dans le titre du Mémoire.

*Krause* (*M.*). — Sur les fonctions quadruplement périodiques de deuxième et de troisième espèce. (87-107).

Dans ce Mémoire, l'auteur étudie les fonctions de *deux variables* qui sont quadruplement *périodiques de deuxième et de troisième espèce,* au sens que M. Hermite donne à ces appellations dans son Ouvrage *Sur quelques applications des fonctions elliptiques.*

Après avoir formé des fonctions fondamentales analogues à celles de M. Hermite, il étudie leurs propriétés principales et montre comment on peut écrire une multitude infinie de relations fonctionnelles et de systèmes d'équations différentielles dont les intégrales s'expriment à l'aide de ces fonctions.

*Sylow.* — Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques. (109-254).

« Voici, en peu de mots, dit l'auteur, l'enchaînement des idées qui m'ont guidé dans la partie la plus essentielle de ces recherches. A l'occasion de la nouvelle édition des *Œuvres d'Abel,* j'eus à me rendre compte de l'exactitude de certaines propositions de ce grand géomètre, énoncées sans démonstration; par là mon attention fut appelée sur ce fait que, pour les modules de la multiplication complexe, les modules *singuliers* d'après l'expression de M. Kronecker, l'équation de la division des périodes est, dans certains cas, réductible; il s'ensuit presque immédiatement que, dans les mêmes cas, l'équation modulaire a une ou deux racines rationnelles, pourvu qu'on lui adjoigne la racine carrée du *déterminant.* Les modules transformés étant eux-mêmes singuliers, cette question s'impose :

» *Quel rapport ont ces racines rationnelles de l'équation modulaire avec le module primitif?*

» La réponse est facile à trouver :

» *Elles satisfont à la même équation algébrique.*

» On est ainsi conduit à étudier la résolution de l'équation des modules, et la route à suivre est toute tracée; on établit sans difficulté que chaque racine s'exprime en fonction rationnelle de chaque autre, et que les symboles de ces fonctions sont échangeables.

» Par l'expression *multiplication complexe,* j'entends une formule qui exprime

$$\lambda\left[\left(a + bi\sqrt{n}\right)z + \alpha\right],$$

en fonction rationnelle de $\lambda(z)$, $\alpha$ étant une constante. J'ai conservé la classification des modules singuliers, à laquelle on est conduit par cette définition : elle ne coïncide pas avec celle de M. Kronecker, mais le passage de l'une de ces classifications à l'autre est très simple; je l'indiquerai à la fin du Mémoire. Mon objet étant les questions algébriques, je ne parle qu'occasionnellement des nombreuses relations que possède la théorie des modules singuliers avec l'Arithmétique; je fais exception seulement pour les formules de M. Kronecker relatives aux nombres des classes, dont je déduis celles que j'ai rencontrées en cherchant les équations des modules singuliers. »

Le Mémoire est divisé en sept Chapitres dont les titres sont les suivants :

I. Propositions fondamentales.
II. Les transformations linéaires. Les plus simples modules singuliers.
III. Formation des équations algébriques dont dépendent les modules singuliers, et des formules de multiplication complexe.
IV. Digression sur les formules d'Arithmétique de M. Kronecker.
V. L'équation de la division des périodes; l'équation modulaire.
VI. Transformations des modules singuliers.
VII. Résolution des équations des modules singuliers.

Une Note terminale donne le moyen de passer de la classification des modules singuliers adoptée par l'auteur à celle de M. Kronecker.

*Goursat* (*Ed.*). — Recherches sur les intégrales algébriques de l'équation de Kummer. (255-304).

L'équation dont il s'agit est l'équation du troisième ordre que Kummer a introduite dans la théorie de la transformation des séries hypergéométriques. M. Goursat avait antérieurement déterminé *toutes* les intégrales *rationnelles* de cette équation. Depuis, M. Papperitz a étudié les intégrales *algébriques* au moyen d'un système d'équations arithmétiques analogue à celui dont M. Goursat s'était servi : d'où l'origine du présent Travail.

« Il existe, dit M. Goursat, une différence essentielle entre les deux systèmes d'équations arithmétiques dont dépendent les transformations rationnelles et les transformations irrationnelles. Dans ce dernier cas, en effet, un système de solutions des équations arithmétiques ne fournit pas *en général* d'intégrale algébrique. J'espère avoir établi d'une façon rigoureuse qu'on peut toujours reconnaître, par un nombre *fini* d'essais et de calculs élémentaires, si à un système de solutions correspond effectivement une intégrale algébrique. Je m'attache surtout au cas particulier où l'inversion du quotient de deux intégrales de l'équation hypergéométrique donne naissance à une fonction uniforme; s'il en est ainsi, cette fonction sera, comme on sait, une fonction fuchsienne. Le problème peut alors être considéré comme un cas particulier du problème général de la transformation des fonctions fuchsiennes.

» L'existence d'une intégrale algébrique étant reconnue, le calcul des coefficients de cette équation est un problème dont la solution générale paraît fort difficile. On peut cependant indiquer des méthodes générales, lorsque la relation est de genre *zéro* ou de genre *un*. Les calculs algébriques auxquels on est conduit paraissent, il est vrai, compliqués, mais il est facile de reconnaître qu'on ne peut les éviter. Je me réserve de revenir sur la formation et les propriétés de ces équations.

» La dernière Partie contient la démonstration d'un théorème général sur les équations linéaires, dont l'application à l'équation de Kummer est immédiate. De ce théorème se déduisent aussi des conséquences intéressantes, que je ne fais que signaler, relatives à la réduction de certaines intégrales abéliennes. »

*Darboux* (*G.*). — Sur la résolution de l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

et de quelques équations analogues. (305-325).

La première Partie de ce Mémoire contient la solution complète de ce problème :

*Étant donnée une équation*

$$f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = 0,$$

*où $f$ désigne une fonction homogène quelconque, à coefficients constants, des différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, exprimer de la manière la plus géné-*

*rale, et sans aucun signe de quadrature, les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un paramètre $t$ qui satisfont à cette équation.*

La méthode générale, que M. Darboux fait connaître, est appliquée dans la seconde Partie à l'équation d'Euler

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

dont on retrouve la solution bien connue. L'auteur développe ensuite les calculs relatifs à l'équation plus générale

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

antérieurement considérée par J.-A. Serret, et donne l'interprétation géométrique des résultats auxquels il parvient.

Dans la troisième et dernière Partie, M. Darboux résout de deux manières différentes le problème intéressant qui consiste à déterminer dans l'espace, sans aucun signe de quadrature, deux courbes se correspondant point par point de telle manière que les arcs correspondants des deux courbes soient égaux. La première solution conduit à cette conséquence digne de remarque :

*On peut obtenir sans aucun signe de quadrature les équations les plus générales de deux surfaces réglées applicables l'une sur l'autre.*

La seconde solution est particulièrement appropriée à la détermination des couples de courbes gauches dont les arcs correspondants sont égaux quand on assujettit en outre ces courbes à quelque autre condition.

## *Humbert* (*G.*). — Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques. (327-404).

*Introduction.* — « Le but de ce Mémoire est de démontrer une formule qui permet, étant données une courbe algébrique $f = 0$ de degré $n$, et une intégrale abélienne quelconque appartenant à cette courbe, de calculer *a priori* la somme des variations de l'intégrale sur les lignes décrites par les points d'intersection de la courbe proposée et d'une courbe algébrique variable, appartenant à un faisceau. Si l'on désigne par

$$F + u\varphi = 0$$

l'équation des courbes de ce faisceau, la somme cherchée sera une fonction du paramètre $u$ et l'étude de ses variations, quand on fait varier le paramètre, donne lieu à des conséquences analytiques intéressantes, se traduisant géométriquement d'une manière souvent très simple.

» L'emploi des fonctions fuchsiennes, introduites dans la Science par M. Poincaré, nous a permis d'arriver simplement au résultat cherché.

» La première Partie du présent Travail est consacrée à la démonstration et à l'étude des conséquences analytiques de la formule fondamentale; on examine spécialement le cas où l'intégrale abélienne se réduit à une fonction rationnelle, et l'on en déduit le moyen de trouver la somme ou le produit des

valeurs que prend une fonction rationnelle des coordonnées aux points communs à deux courbes algébriques et de discuter cette somme ou ce produit quand une des courbes varie, sans cesser d'appartenir à un même faisceau.

» La seconde Partie comprend les applications géométriques les plus simples de cette théorie; en considérant, soit une intégrale abélienne ayant une signification déterminée, soit une fonction rationnelle simple des coordonnées des points d'une courbe, on peut énoncer immédiatement des théorèmes géométriques relatifs à la somme des valeurs que prennent cette intégrale et cette fonction aux points communs à la courbe proposée et à chacune des courbes d'un faisceau. On a développé spécialement des applications relatives aux aires, aux directions et aux longueurs.

» La troisième Partie a pour but de faire les mêmes applications aux arcs de courbe qui s'expriment par une intégrale abélienne appartenant à la courbe : les courbes qui jouissent de cette propriété sont celles que Laguerre a nommées *courbes de direction*.

» Comme conséquence de cette théorie, on détermine les courbes curieuses dont l'arc s'exprime par une intégrale abélienne de première espèce; elles jouissent de cette propriété que la somme des arcs interceptés sur elles par deux courbes quelconques de même degré est toujours nulle. »

## *Poincaré* (*H.*). — Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique. (405-464).

Étant donnée la forme quadratique

$$\Phi = Y^2 - XZ,$$

il est aisé de trouver toutes les substitutions linéaires S qui n'altèrent pas $\Phi$. Une pareille substitution étant définie par le tableau de neuf coefficients

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, \end{matrix}$$

l'équation en S

$$\begin{vmatrix} a_1 - S & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - S & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - S \end{vmatrix} = 0$$

aura une racine égale à $+1$ (transformation droite) ou une racine égale à $-1$ (transformation gauche).

Les substitutions *droites* qui n'altèrent pas $\Phi$ ont pour tableau de leurs coefficients

$$\begin{vmatrix} \delta^2 & -\delta\gamma & \gamma^2 \\ -2\delta\beta & \alpha\delta + \beta\gamma & -2\alpha\gamma \\ \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \end{vmatrix},$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ étant quatre quantités quelconques telles que

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^6 = 1.$$

Si l'on s'en tient aux substitutions *réelles* et qu'on écarte celles de déterminant $-1$, on aura

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Or M. Poincaré a appelé *substitutions fuchsiennes* les substitutions

$$s = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont des quantités réelles telles que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Ainsi à chaque substitution S qui n'altère pas $\Phi$ correspond une substitution fuchsienne $s$.

Si S et S′ sont deux transformations linéaires qui n'altèrent pas $\Phi$, et si $s$ et $s'$ sont les substitutions fuchsiennes correspondantes, à la transformation SS′ correspondra la substitution fuchsienne $ss'$. A tout groupe discontinu de transformations n'altérant pas $\Phi$ correspondra un groupe fuchsien, et réciproquement.

Soit maintenant T une transformation linéaire de déterminant quelconque qui altère $\Phi$, et soit F ce que $\Phi$ devient par l'effet de cette transformation.

La forme F sera inaltérée par certaines substitutions de déterminant 1, qui sont dites *transformations semblables* de F; et à toute transformation semblable de F correspondra une transformation semblable de $\Phi$. A tout groupe discontinu de transformations semblables de F correspondra un groupe de transformations semblables de $\Phi$ et par conséquent un groupe fuchsien; et réciproquement.

Si la forme F a ses coefficients *entiers*, on distinguera parmi les transformations semblables de F celles dont les coefficients sont entiers. Elles forment un groupe discontinu, auquel correspond un groupe fuchsien et par conséquent un système de fonctions fuchsiennes. M. Poincaré a donné à ces fonctions le nom de *fonctions fuchsiennes arithmétiques*.

Le présent Travail est consacré à l'étude de ces fonctions spéciales et de leurs applications à la théorie des nombres. L'auteur, entre autres résultats, établit *pour ces fonctions* un théorème qui peut être regardé comme la généralisation du théorème d'addition des fonctions elliptiques et qui ne paraît pas avoir lieu pour les fonctions fuchsiennes ordinaires.

*Léauté* (*H.*). — Sur la caractéristique cinématique d'un système mécanique en mouvement. (465-476).

*Hugoniot* (*H.*). — Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (première Partie). (477-492).

Le résultat capital établi dans ce Mémoire posthume est que :

*L'expression analytique de la vitesse de propagation du mouvement dans un fluide indéfini s'obtient aisement, et de la manière la plus générale, par*

*la simple considération des équations de l'Hydrodynamique, sans qu'il soit aucunement besoin de se préoccuper de la forme des intégrales.*

Après avoir défini avec précision ce qu'il faut entendre par *vitesse de propagation* d'un mouvement dans un autre, l'auteur considère la célèbre équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right),$$

tout en faisant des réserves sur sa validité. Il en déduit sans aucune intégration la formule

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = a^2,$$

qui donne la vitesse du son et plus généralement la vitesse de propagation d'un mouvement dans un autre au sein d'un milieu indéfini.

Il applique ensuite une méthode analogue aux équations générales de l'Hydrodynamique, données par Euler, en s'en tenant au cas où la conductibilité calorifique du milieu peut être négligée. Alors la relation entre la pression $p$ et la densité $\rho$ d'un élément de masse donné est toujours la même; on suppose en outre *que cette relation*

$$\rho = F(p)$$

*est la même en tous les points du fluide.* On parvient ainsi à la formule générale

$$\frac{dn}{dt} = N \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}},$$

où N est la projection de la vitesse au point considéré sur la normale à la surface de l'onde, et qui met en évidence cette conclusion importante :

*La vitesse de propagation d'un mouvement dans un fluide dépend de l'état du fluide, mais elle est indépendante de la nature du mouvement qui se propage, pourvu qu'il ne se produise pas de discontinuité.*

Dans le cas des gaz parfaits, la formule précédente, rapprochée de la loi de la détente adiabatique, donne le résultat classique établi d'une manière entièrement rigoureuse.

Dans le cas des liquides, la vitesse de propagation, rapportée au fluide, est une constante absolue, indépendante non seulement du mouvement qui se propage, mais aussi du mouvement primitif.

## Tome IV : 1888.

### *Halphen* (*G.-H.*). — Sur le mouvement d'un solide dans un liquide. (5-81).

Le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini est régi par un système de six équations différentielles que Kirchhoff a établies : il a de plus démontré

que, si le solide est homogène et de révolution et si aucune force n'agit sur ce solide ni sur le liquide, ces équations différentielles conduisent à des quadratures elliptiques; ce résultat a reçu de Clebsch une certaine extension. Il existe donc un cas où le problème est susceptible d'une solution complète grâce aux fonctions elliptiques, tous les éléments du mouvement pouvant être exprimés en fonction explicite du temps.

C'est cette importante application des fonctions elliptiques que M. Halphen développe dans le présent Mémoire. Il la complète par une extension inattendue du théorème de Jacobi, d'après lequel le mouvement d'un corps grave de révolution, suspendu par un point de son axe, se décompose en deux mouvements *à la Poinsot :* les formules qui représentent le mouvement d'un solide dans un liquide ont, en effet, permis à l'auteur de faire apparaître une décomposition analogue.

## *Pepin* (Le P.). — Sur quelques formules d'Analyse utiles dans la théorie des nombres. (83-127).

L'objet du présent Mémoire est de démontrer l'ensemble des formules générales de Liouville, qui reposent sur la partition numérique exprimée par les équations

$$n = p + q, \qquad p = a\alpha, \qquad q = b\beta, \qquad n = d\delta,$$

dans lesquelles tous les nombres considérés sont entiers et positifs, pairs ou impairs. L'auteur traite successivement des formules qui ne concernent qu'un seul mode de partition, puis de celles où l'on compare les deux modes de partition.

## *Humbert* (*G.*). — Sur les courbes cycliques de direction. (129-131).

Modifications à apporter à quelques résultats du Mémoire de l'auteur sur le théorème d'Abel (*Journal de Mathématiques*, 1887).

## *Humbert* (*G.*). — Sur les courbes algébriques planes rectifiables. (133-151).

Une courbe algébrique est dite *rectifiable* si tout arc de cette courbe est une fonction algébrique des coordonnées de son extrémité. Toute courbe plane rectifiable est évidemment la développée d'une courbe algébrique et réciproquement.

M. Humbert complète ce résultat en montrant que l'arc de toute courbe algébrique rectifiable $f(x, y) = 0$ a une expression de la forme

$$s = \omega + P\sqrt{f_x^2 + f_y^2},$$

où $x$ et $y$ désignent les coordonnées de l'extrémité de l'arc, $\omega$ une constante qui dépend du choix du point origine des arcs et P une fonction rationnelle de $x$ et $y$.

Ce théorème permet d'étudier en particulier les courbes rectifiables dont l'arc est une fonction rationnelle des coordonnées de son extrémité, et qu'on peut appeler *courbes à arc rationnel.*

Les courbes à arc rationnel sont les courbes *de direction* (Laguerre) qui sont des développées de courbes algébriques.

M. Humbert établit que, si la développée d'une courbe de direction est de direction, la courbe est elle-même de direction.

Mais, pour discuter la proposition réciproque, il faut distinguer, parmi les courbes algébriques, les courbes *simples,* qui ne sont coupées *orthogonalement* par chacune de leurs normales qu'*en un seul point.* On démontre alors que :

*Les courbes algébriques planes à arc rationnel sont les développées des courbes algébriques de direction qui sont des courbes simples.*

Ce sont aussi les caustiques par réflexion des courbes algébriques, les rayons incidents étant concourants et réciproquement.

Après ces théorèmes viennent diverses applications, entre autres la détermination des épicycloïdes algébriques à arc rationnel.

Le Mémoire se termine par cette proposition générale :

*Si la courbe* $f(x, y) = 0$ *est une courbe algébrique d'ordre* $n$, *à arc rationnel, son arc est de la forme*

$$s = \frac{C(x, y)}{P(x, y)},$$

$P = 0$ *étant l'équation d'une courbe de degré* $n - 3$ *adjointe à la courbe* $f = 0$ *et que l'on peut choisir arbitrairement;* $C = 0$ *étant l'équation d'une courbe adjointe d'ordre* $n - 2$, *passant par les points où la courbe* $P = 0$ *rencontre la courbe* $f = 0$. *Si la courbe* $f$ *est unicursale, les degrés de* C *et de* P *doivent être augmentés d'une unité.*

## *Hugoniot* (*H.*). — Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (seconde Partie). (153-167).

L'hypothèse essentielle faite dans la première Partie de ce Mémoire (*Journal de Mathématiques,* 1887) était que la densité $\rho$ du fluide s'exprimait partout par la même fonction de la pression. Pour s'affranchir de cette restriction, l'auteur recourt, non plus aux équations d'Euler, mais à celles de Lagrange, qu'il commence par établir directement.

Il distingue ensuite *deux* surfaces d'onde : l'une S est le lieu des positions initiales des points atteints simultanément par les deux mouvements $\left(\text{la vitesse de propagation correspondante est } \frac{dn}{dt}\right)$; l'autre S′ est le lieu des positions de ces mêmes points à l'instant $t$ $\left(\text{la vitesse de propagation correspondante est } \frac{dn'}{dt}\right)$.

Ces deux vitesses de propagation sont calculées successivement au moyen des équations du mouvement et sans aucune intégration. L'expression de $\frac{dn'}{dt}$

se réduit à celle qui a été trouvée dans la première Partie lorsque $\rho$ ne dépend que de $p$ et non de $x$, $y$, $z$.

*Klein* (*F.*). — Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique. (169-176).

Dans cette Lettre, adressée à M. C. Jordan, l'auteur indique comment il a réduit l'une à l'autre l'équation aux vingt-sept droites d'une surface cubique et celle de la trisection des fonctions hyperelliptiques, réduction dont on pouvait *a priori* concevoir la possibilité, les deux équations en question ayant le même groupe.

*Autonne* (*Léon*). — Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. Premier Mémoire : Étude d'une substitution crémonienne isolée. (177-247).

Recherches sur les groupes quadratiques crémoniens d'ordre fini. Second Mémoire : Multiplication des crémoniennes, groupes quadratiques; groupe directeur. (407-464).

« Après avoir, dit l'auteur, dans deux Mémoires insérés au *Journal de Mathématiques* (années 1885 et 1886), étudié les groupes d'ordre fini contenus dans les groupes quadratique et cubique Cremona, je me propose, dans le présent Travail, d'étendre le même genre de recherches aux substitutions birationnelles qui, au lieu d'avoir seulement une série de trois variables homogènes $x_i$ (coordonnées d'un point $x$ du plan), contiennent deux séries de trois variables homogènes : $x_i$ (coordonnées d'un point $x$ du plan), $u_i$ (coordonnées d'une droite $u$ du plan).

» Soit

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u)^{a\ b} \\ u_i & \psi_i(x, u)^{c\ d} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

une pareille substitution, $\varphi_i$ et $\psi_i$ étant des polynomes qui contiennent les $x_i$ et les $u_i$ aux dimensions marquées par les entiers $a$, $b$, $c$, $d$, lesquels ne peuvent être négatifs.

» J'appelle *crémonienne* une substitution

$$s = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

qui est à la fois *birationnelle* et *de contact*. L'appellation *crémonienne* est justifiée par le fait que $s$ se réduit à une substitution Cremona ordinaire, si l'entier $b$ est nul.

» Soient deux crémoniennes $s$ et $s'$

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix}, \quad s' = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(x, u) \\ u_i & \psi'_i(x, u) \end{vmatrix};$$

la substitution

$$\begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(\varphi, \psi) \\ u_i & \psi'_i(\varphi, \psi) \end{vmatrix}$$

est, par définition, le produit $s's$ de $s'$ par $s$. Je démontre que les crémoniennes forment un groupe, que j'appelle *groupe crémonien*. C'est la construction de groupes crémoniens dits *quadratiques*, formés par des substitutions

$$\begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix},$$

les entiers $a, b, c, d \leqq 2$ qui est l'objet du premier Mémoire....

» Le champ des recherches relatif aux crémoniennes est presque inexploré.... Personne n'a encore donné, au moins à ma connaissance, les conditions de birationnalité et la forme explicite des fonctions entières $\varphi_i$ et $\psi_i$. »

La construction des groupes crémoniens a dû, par conséquent, être précédée de la construction et de l'étude d'une crémonienne isolée.

Le second Mémoire traite de la composition des crémoniennes, de la construction des groupes quadratiques et de la recherche des groupes d'ordre fini.

## *Hilbert* (*D.*). — Lettre adressée à M. Hermite. (244-256).

Cette Lettre traite de l'analogie qui existe entre la théorie des invariants des formes binaires du quatrième, du cinquième degré, etc., et celle des formes cubiques ternaires, quaternaires, etc.

## *Lévy* (*Maurice*). — Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel. (257-312).

L'objet de ce Mémoire est de rechercher, sans faire d'hypothèse sur la cause de la polarisation dans un plan, sachant seulement que cette cause est mesurable par une grandeur qui est de la nature d'un vecteur, quelles sont les expressions les plus générales des composantes de ce vecteur, compatibles avec l'équation classique de la surface de l'onde.

De la discussion complète faite par M. Maurice Lévy résultent de nombreuses conclusions, dont voici quelques-unes :

Si l'on écarte les cristaux asymétriques, pour tous les autres, les équations différentielles les plus générales, physiquement admissibles, du vecteur lumineux (vibration ou autre), fournissant la surface de l'onde de Fresnel, forment quatre solutions bien déterminées. Chacune de ces solutions comporte *cinq* constantes arbitraires : les trois premières définissent la vitesse de l'onde

obscure, qui est la même dans les quatre solutions. Les trois autres influent sur la direction du vecteur.

Il n'est nullement nécessaire, pour obtenir la surface de l'onde, de supposer des vibrations ou plus généralement le vecteur lumineux, soit dans le plan de polarisation, soit dans un plan perpendiculaire. En donnant aux arbitraires dont dépend le vecteur lumineux toutes les valeurs, on obtient des vibrations de toute inclinaison sur ce plan, et même des vibrations pouvant, pour certaines ondes particulières, être *longitudinales*.

Parmi tous les vecteurs possibles, les plus intéressants sont :

($a$). Celui qui est à la fois dans le plan de polarisation et dans le plan de l'onde;

($b$). Ceux qui sont situés dans ce dernier plan.

La théorie du vecteur ($a$) contient, comme cas particulier correspondant à l'évanouissement de l'onde obscure, la théorie de Lamé, retrouvée, avec diverses variantes, par plusieurs autres auteurs, Cauchy, Mac Cullagh, Newmann, Massieu.

Pour les vecteurs ($b$) deux théories sont également possibles; l'une d'elles, convenablement particularisée, conduit soit à des équations qui reproduisent toute la théorie de Fresnel, soit aux résultats de Maxwell, de M. Sarrau et de M. Boussinesq.

Pour choisir entre les diverses solutions ainsi énumérées, il faudra recourir à la réflexion cristalline et éliminer celles qui ne satisferont pas aux lois les mieux établies de ce phénomène.

## *Humbert* (*G.*). — Sur quelques propriétés des aires sphériques. (313-348).

Voici comment l'auteur résume le contenu de son Travail :

« L'objet du présent Mémoire est l'extension à la sphère de la propriété si simple et si remarquable que présente la circonférence de cercle pour la mesure des angles situés d'une manière quelconque dans son plan et qu'on peut énoncer ainsi :

» *La différence* (*ou la somme*) *des arcs interceptés par les deux côtés d'un angle* $\alpha$ *sur une circonférence de rayon* R *est égale à* $2R\alpha$.

» Dans l'espace, ce théorème n'est pas applicable sans modification à la différence des aires que découpe sur une sphère un cône rencontrant cette surface suivant deux courbes fermées; nous montrerons que cette différence ne dépend pas seulement du rayon de la sphère et de la forme du cône, ce qui serait la généralisation directe de la proposition sur la mesure des angles plans, mais qu'il suffit, pour l'exprimer, d'introduire un nouvel élément, à savoir la distance du centre de la sphère à un plan passant par le sommet du cône et invariablement lié à ce cône. Nous verrons également que cette propriété s'étend aux surfaces développables et, en général, aux surfaces réglées; dans le cas spécial des surfaces réglées à plan directeur, on retrouve même la propriété de l'angle plan, c'est-à-dire que la différence des aires découpées sur une sphère par une telle surface ne dépend pas de la position de la sphère dans l'espace.

» Enfin, les formules relatives au cône nous permettront d'évaluer la différence des aires découpées sur une sphère par une quadrique, dans le cas où l'intersection se compose de deux courbes fermées, et d'établir, relativement à cette différence, quelques propositions curieuses parmi lesquelles nous signalerons celles qui concernent le paraboloïde elliptique. »

*Jordan* (*Camille*). — Sur les transformations d'une forme quadratique en elle-même. (349-368).

*Introduction.* — « Nous déterminons dans ce Mémoire les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire une substitution linéaire pour être capable de transformer en elle-même une forme quadratique de discriminant différent de zéro.

» Ces conditions étant supposées remplies, nous montrons que la substitution donnée S, et l'une quelconque F des formes quadratiques de discriminant $\neq 0$ qu'elle transforme en elle-même, peuvent être ramenées simultanément à une expression canonique dépendant exclusivement des invariants de S.

De là résulte cette conséquence que les diverses formes F sont transformables les unes dans les autres par des substitutions linéaires qui n'altèrent pas l'expression de S.

*Duhem* (*P.*). — Sur un théorème d'Électrodynamique. (369-405).

Il est bien connu que, si l'on suppose donnée l'action qu'un courant fermé et uniforme exerce sur un élément de courant uniforme, l'action élémentaire est susceptible d'une infinité d'expressions différentes. De cette infinité de lois élémentaires, une seule est compatible avec la règle de l'égalité entre l'action et la réaction : c'est la loi d'Ampère, ainsi que l'a démontré Gauss.

M. Duhem se pose la question plus générale que voici :

*Si l'on connaît l'action qu'un courant fermé et uniforme exerce sur un élément de courant uniforme et si, de plus, on assujettit la loi élémentaire à satisfaire à la condition que le travail produit dans le déplacement de deux éléments de courant par les actions mutuelles de ces deux éléments dépende uniquement du changement de position relative des deux éléments, la loi élémentaire est-elle complètement déterminée?*

La conclusion du Mémoire où l'auteur discute cette question est qu'il existe *au plus* une loi élémentaire compatible avec les conditions imposées.

*Gilbert* (*Ph.*). — Sur les composantes des accélérations d'ordre quelconque suivant trois directions rectangulaires variables. (465-473).

Divers auteurs ont évalué les composantes de l'accélération d'ordre quelconque suivant la tangente, la normale principale et la binormale à la trajectoire. M. Gilbert enseigne à calculer les projections de cette accélération sur trois droites rectangulaires mobiles $Ox$, $Oy$, $Oz$ suivant une loi quelconque, mais déterminée, autour d'un point fixe O. Il retrouve comme cas particuliers

les résultats de ses devanciers, et applique ses formules au cas où, le point mobile étant déterminé par un système de coordonnées curvilignes composé de trois familles de surfaces orthogonales, les axes $Oxyz$ sont constamment parallèles aux normales des trois surfaces qui déterminent ce point.

## Tome V; 1889.

### *Halphen.* — Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques, et en particulier sur la multiplication par $\sqrt{-23}$. (5-52).

On sait que, si $\varepsilon$ est un entier, $p(\varepsilon u)$ est une fonction rationnelle de $pu$. Pour qu'il en soit ainsi, sans que $\varepsilon$ soit un entier, il faut et il suffit que le rapport des périodes soit racine d'une équation du second degré à coefficients entiers

$$a\omega'^2 + 2b\omega\omega' + c\omega^2 = 0,$$

le *multiplicateur* $\varepsilon$ est alors de la forme

$$k' + ik\sqrt{ac - b^2},$$

$k$ et $k'$ étant deux entiers.

Pour la recherche effective des fonctions elliptiques *singulières* (ou admettant une multiplication complexe) on n'a guère employé que des moyens détournés et parfois extrêmement laborieux. L'auteur indique un moyen direct et simple, qui ne met en jeu que les premiers éléments de la théorie des fonctions elliptiques, et qui consiste à obtenir une relation entre des constantes exprimables en fonction des invariants.

Il fait ressortir la remarquable liaison qui existe entre la théorie des formes arithmétiques de Gauss et celle des fonctions singulières.

Comme exemple de sa méthode, l'auteur traite de la multiplication par $\sqrt{-23}$ et des six fonctions qui admettent cette multiplication.

### *Stieltjes.* — Sur le développement de l'expression

$$\{R^2 - 2Rr[\cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y')] + r^2\}^{-1}.$$

(53-65).

Dans la théorie du potentiel à quatre variables se présente l'expression

$$[(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 + (x_4 - x'_4)^2]^{-1}.$$

Pour la développer en série par un procédé plus simple que le changement de variables classique, l'auteur pose

$$x_1 = r\cos u \cos x, \quad x_2 = r\cos u \sin x, \quad x_3 = r\sin u \cos y, \quad x_4 = r\sin u \sin y.$$

Une analyse tout à fait analogue à celle que Laplace applique aux fonctions $X_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi)$ le conduit rapidement au résultat.

*Gomes Teixeira.* — Sur le développement des fonctions implicites. (67-71).

L'auteur a indiqué précédemment (*Journal de Mathématiques*, 1881) une formule pour développer en série, suivant les puissances croissantes de $x$, une fonction $u$ définie par les équations

$$u = f(z),$$
$$z = t + x\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + \ldots + x^k\varphi_k(z).$$

Il revient actuellement sur ce sujet pour préciser la détermination de $u$ qui doit être représentée par la série qu'il avait obtenue et pour étudier les conditions de convergence de cette série.

*Caspary.* — Extrait d'une lettre à M. Hermite. (73-79).

L'auteur fait ressortir le lien qui existe entre les recherches de M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 52) et celles de M. Weierstrass sur l'intégration de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{Ay^4 + 4By^3 + 6Cy^2 + 4Dy + E}.$$

*Humbert* (*G.*). — Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie. (81-134).

Comme suite de ses travaux précédents (*Journal de Mathématiques*, 1887) l'auteur s'est trouvé conduit à calculer la somme des variations d'une intégrale abélienne sur les arcs décrits par les points d'une courbe gauche et d'une surface algébrique variable appartenant à un faisceau ponctuel et même, d'une manière générale, appartenant à un système algébrique.

Ayant en vue des applications géométriques, il insiste principalement sur le cas où l'intégrale abélienne considérée est de seconde espèce, et spécialement sur celui où elle est la dérivée d'une fonction rationnelle, qui donne lieu à des remarques curieuses.

Il effectue ensuite l'extension du théorème d'Abel aux intégrales multiples. A la fin de son Mémoire, il étend ce même théorème aux intégrales de différentielles totales.

*Picard* (*Ém.*). — Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables. (135-318).

Nous allons essayer de donner sommairement une idée des résultats, si riches par le nombre et par l'importance, que contient ce Mémoire.

Abandonnant le point de vue algébrique où M. Nöther s'est placé pour étudier les polynomes d'ordre $m - 4$ *adjoints* à une surface d'ordre $m$ et arriver

à la notion de deux nombres invariantifs fondamentaux, M. Picard aborde l'étude des surfaces algébriques par la considération des intégrales abéliennes qu'on peut leur associer, et qui sont de deux sortes : intégrales doubles restant finies sur toute la surface (ou intégrales doubles *de première espèce*) et intégrales de différentielles totales, de la forme

$$\int (P\,dx + Q\,dy),$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de $x$, $y$, $z$ liées par l'équation de la surface (*voir* les années 1885 et 1886 du *Journal de Mathématiques*).

Ces intégrales, que M. Picard a introduites dans la Science, se répartissent comme les intégrales abéliennes ordinaires entre trois espèces.

Il n'existe pas *en général* d'autres intégrales de *seconde* espèce pour une surface que des fonctions rationnelles de ses coordonnées. M. Picard étudie avec détails la question de savoir si une surface *donnée* admet des intégrales de seconde espèce proprement dites.

Il est conduit à instituer une théorie des *cycles* pour les surfaces algébriques, et à reconnaître qu'*en général il n'y a pas de cycles linéaires*. En développant la théorie des *cycles à deux dimensions*, il obtient entre autres ce théorème :

*Le nombre des intégrales distinctes de seconde espèce est égal au nombre de leurs périodes.*

Vient ensuite l'étude des transformations birationnelles des surfaces en elles-mêmes. Quand le genre $p$ (*Flächengeschlecht*) est supérieur à 1, les transformations ne peuvent contenir plus d'un paramètre arbitraire. Si $p$ est au plus égal à 1 et si la surface admet un groupe continu de transformations birationnelles en elle-même, ou bien elle contient un réseau de courbes du genre zéro ou un, ou bien elle possède deux intégrales de différentielles totales

$$u = \int P\,dx + Q\,dy, \qquad v = \int P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

dont l'inversion donne pour $x$, $y$ et $z$ des fonctions *uniformes* de $u$ et $v$. Ces surfaces, qui sont les analogues des courbes planes des genres zéro et un, font l'objet d'une étude spéciale.

L'auteur montre ensuite comment on pourra reconnaître si deux surfaces de genre supérieur à 1 se correspondent point par point et établit notamment que *deux pareilles surfaces ne peuvent admettre une infinité discontinue de transformations birationnelles.*

Il applique les résultats précédents à l'étude des intégrales uniformes des équations différentielles de la forme

$$f(y, y', y'') = 0,$$

$f$ étant un polynome. Cette théorie présente de grandes difficultés, d'abord à raison de ce fait qu'une surface algébrique peut admettre une transformation en elle-même qui soit *biuniforme sans être birationnelle* (ce qui est impossible pour les courbes), mais surtout à cause d'une circonstance analytique

très générale, que M. Picard révèle et signale : il est relativement facile de reconnaître si une intégrale générale est *uniforme dans le voisinage de tout point* intérieur à la région où doit rester la variable indépendante; mais on n'est pas autorisé pour cela à regarder l'*intégrale générale comme une fonction uniforme*. M. Picard dit alors qu'elle est *à apparence uniforme*, introduisant ainsi une notion nouvelle dont l'importance est considérable.

Il traite aussi des équations plus générales

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

où $f$ est un polynome en $y$, $y'$ et $y''$, dans l'hypothèse où les points critiques de l'intégrale générale seraient fixes.

A la fin de son Mémoire, il généralise la notion d'intégrale de première espèce en envisageant les fonctions $u(x, y, z)$ qui se transforment en $au + b$ ($a$ et $b$ étant des constantes) quand $(x, y, z)$ décrit un cycle linéaire effectif de la surface.

## *Kœnigs.* — Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé, gauche ou plan, dans un mouvement quelconque. (321-343).

Moyennant certaines conventions sur le signe des aires et des volumes, l'auteur peut donner une formule unique et tout à fait générale pour exprimer le volume engendré par un contour fermé dans un mouvement quelconque.

Il commence par le cas d'un déplacement hélicoïdal infiniment petit. Soient $p$, $q$, $r$ les composantes de la vitesse de rotation, $a$, $b$, $c$ celles de la vitesse de l'origine par rapport à des axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ liés au contour.

Si l'on pose

$$A = \frac{1}{2}\int (y\,dz - z\,dy),$$

$$B = \frac{1}{2}\int (z\,dx - x\,dz),$$

$$C = \frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx),$$

$$-L = \frac{1}{2}\int (y^2 + z^2)\,dx,$$

$$-M = \frac{1}{2}\int (z^2 + y^2)\,dy,$$

$$-N = \frac{1}{2}\int (x^2 + y^2)\,dz,$$

le volume engendré pendant l'élément de temps $dt$ a pour expression

$$V = (Aa + Bb + Cc + Lp + Mq + Nr)\,dt.$$

L'interprétation de cette formule se rattache étroitement à la théorie des segments de Möbius.

Pour un déplacement fini, le volume est égal au moment de deux systèmes de segments, dont l'un ne dépend que du contour et l'autre que du mouvement.

*Appell.* — Sur les invariants de quelques équations différentielles. (361-423).

La première Partie de ce Mémoire traite des invariants et des cas d'intégrabilité des équations du type

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_p y^p},$$

les $a$ et $b$ étant des fonctions de $x$, équations dont la forme n'est pas altérée par la transformation

$$y = \eta\, u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x);$$

les exposants $n$ et $p$ conservent aussi leurs valeurs.

La plus simple d'entre elles, après l'équation linéaire et l'équation de Riccati, est celle pour laquelle $n = 3$, $p = 1$, que l'auteur ramène par des quadratures à une forme canonique ne contenant plus qu'un invariant absolu.

Dans la seconde Partie de son Mémoire, il étudie les invariants et les cas d'intégrabilité des équations différentielles, algébriques et homogènes par rapport à la fonction inconnue $y$ et à ses dérivées, équations qui conservent le même type analytique quand on les soumet à la transformation indiquée ci-dessus.

*Stieltjes.* — Sur le développement de $\log\Gamma(a)$. (425-444).

Adoptant comme définition de la fonction $\Gamma(a)$ l'expression

$$\Gamma(a) = \lim_{n=\infty} \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}\, n^a,$$

l'auteur donne de la formule de Stirling

$$\log\Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{B_1}{1.2\,a} - \frac{B_2}{3.4\,a^3} + \frac{B_3}{5.6\,a^5} - \ldots,$$

une démonstration nouvelle, qui met en évidence ce fait que le second membre représente asymptotiquement la valeur de $\log\Gamma(a)$, même dans le cas où la valeur de $a$ est imaginaire, sa partie réelle étant négative.

Tome VI; 1890.

*Pepin* (le P.). — Sur quelques formes quadratiques quaternaires. (5-68).

Ce Mémoire fait suite à celui que l'auteur a publié dans le *Journal de Mathématiques*, en 1888. Il contient la démonstration d'un grand nombre de théorèmes relatifs à la représentation des nombres par des formes quadratiques

quaternaires, dont les uns sont dus à Jacobi ou avaient été énoncés sans démonstration par Liouville et dont les autres sont nouveaux.

*Hamy.* — Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes. (69-143).

*Picard* (*Ém.*). — Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. (145-210).

Rectification au sujet du Mémoire sur les équations aux dérivées partielles. (231).

Les équations aux dérivées partielles de la forme

$$\Delta u = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

où l'on a posé

$$\Delta u = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

A, B et C dépendant seulement des deux variables indépendantes $x$ et $y$, peuvent être traitées avec succès par la méthode des approximations successives, ainsi que l'a découvert M. Picard. Pour discuter rigoureusement la convergence de ces approximations successives, il convient de maintenir le point $(x, y)$ dans les régions du plan où le discriminant $B^2 - AC$ garde un signe invariable. De là deux types d'équations

$$(A) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

$$(B) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

pour lesquels les problèmes à poser sont entièrement différents.

Le Chapitre I traite des équations (A) : il y est démontré qu'on peut se donner la valeur de $u$ tout le long d'une courbe fermée C; l'intégrale est *unique,* si l'équation est linéaire et si le contour est suffisamment petit.

Au Chapitre II, M. Picard étudie le type (B), et montre que l'on peut obtenir l'intégrale qui prend en un point A une valeur donnée, et pour laquelle $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ prennent une succession continue de valeurs données le long d'un arc de courbe issu du point A.

Au Chapitre III, l'auteur s'affranchit de la restriction sur le contour C, en donnant des exemples d'équations du type (A) dont l'intégrale, supposée continue ainsi que les dérivées partielles, soit toujours déterminée par ses valeurs données sur un contour fermé *quelconque.*

Le cas particulier de l'équation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u, x, y),$$

où F est *toujours positive* et croît avec $u$, conduit à un résultat curieux. La méthode des approximations successives conduit *non pas à une, mais à deux limites;* ces fonctions $u$ et $v$ prennent les valeurs données sur le contour et satisfont aux deux équations

$$\Delta u = F(v, x, y), \qquad \Delta v = F(u, x, y).$$

Néanmoins, en partant d'un contour suffisamment petit, que l'on peut agrandir progressivement, on détermine l'intégrale, d'ailleurs unique, de l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y),$$

qui prend sur un contour fermé quelconque une succession continue de valeurs données.

Le Chapitre IV contient une étude approfondie d'une équation qui n'a pas moins d'importance dans la théorie des fonctions fuchsiennes que dans la théorie des surfaces, savoir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u,$$

où $k$ désigne une constante positive. M. Picard suit les intégrales de cette équation dans tout le plan, spécialement celles qui sont continues, sauf en un certain nombre de points singuliers logarithmiques : si l'on regarde comme donnés les coefficients correspondants, ces intégrales dépendent seulement d'une constante arbitraire et sont déterminées quand on donne leur valeur *en un point* distinct des points singuliers.

Dans un dernier Chapitre, l'auteur montre que la méthode des approximations successives s'étend aux systèmes d'équations différentielles.

*Halphen* (*G.-H.*). — Sur les formes différentielles associées. (211-230).

*Humbert* (*G.*). — Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie (*suite*). (233-292).

« Les théories analytiques exposées dans la première Partie de ce Mémoire donnent lieu, dit l'auteur dans son Introduction, à des applications géométriques nombreuses et variées. Parmi ces applications, celles qui reposent sur la considération d'intégrales abéliennes simples appartenant à une courbe plane ou gauche rentrent dans le même cadre que les questions traitées par nous dans un Travail antérieur publié dans ce journal (1889); aussi n'avons-nous pas jugé utile d'y revenir.

» C'est donc uniquement sur les problèmes où interviennent des intégrales abéliennes multiples que nous avons insisté; on trouvera, par exemple, dans le présent Mémoire, des propositions géométriques nouvelles sur les aires planes et sphériques, sur les volumes limités par des surfaces algébriques et une série assez étendue de théorèmes sur les aires ellipsoïdales, théorèmes qui conduisent à une généralisation intéressante des résultats célèbres de Graves et de Chasles sur les arcs d'ellipse. Les propriétés des aires sur l'ellipsoïde ont été jusqu'ici à peine effleurées par les géomètres; nous ne

connaissons sur ce sujet, en dehors des travaux relatifs à l'aire totale de la surface, que les recherches de Jellett et de Lebesgue, qui ont donné l'expression, à l'aide des intégrales elliptiques, d'aires ellipsoïdales limitées par des courbes algébriques, d'ailleurs très particulières. Nous démontrons qu'on peut déterminer simplement sur l'ellipsoïde une infinité de courbes algébriques, à deux boucles fermées, comprenant entre elles une aire réductible aux fonctions elliptiques et, sur une quadrique quelconque, une infinité d'aires dont la somme algébrique s'exprime à l'aide de fonctions rationnelles et logarithmiques. Ce sujet étant nouveau, nous avons cru devoir le développer assez longuement, et il constitue la partie principale du présent Mémoire. L'emploi des fonctions elliptiques nous a permis de pousser les calculs jusqu'au bout.

» Le dernier Chapitre, qui est très court, est consacré à l'extension de quelques-unes de ces propriétés aux aires sur une surface algébrique quelconque. »

## *Dolbnia* (*J.*). — Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel. (293-311).

L'auteur appelle *intégrales pseudo-elliptiques d'Abel* les intégrales de la forme

$$(1) \qquad \int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}},$$

qui sont exprimables par des logarithmes. Il met à profit le procédé d'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce, adopté par M. Halphen, et les propriétés des fonctions $\wp$ et $\sigma$ pour présenter sous une autre forme les résultats d'Abel concernant ces intégrales remarquables.

C'est ainsi que M. Dolbnia donne deux procédés permettant de former des suites numériques dont la *périodicité* est la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse associer à l'irrationnelle

$$\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}$$

une valeur de la constante H telle que l'intégrale (1) soit pseudo-elliptique.

L'une de ces suites étant supposée manifester sa périodicité au bout d'un nombre *donné* d'opérations, l'auteur indique le moyen de calculer effectivement le logarithme qui représente l'intégrale pseudo-elliptique considérée.

Mais on sait qu'en dehors des méthodes de Tchebychef et de Zolotareff on n'a aucun moyen de limiter *a priori* le *nombre des termes* de la période.

## *Poincaré* (*H.*). — Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes. (313-365).

Un système de fonctions d'une variable

$$(1) \qquad \varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

est dit posséder un *théorème d'addition* quand les $\varphi_i(u+v)$ s'expriment en fonctions rationnelles des $\varphi_i(u)$ et des $\varphi_i(v)$.

Si $m$ désigne une constante quelconque, mais de module supérieur à l'unité, le système (1) sera dit posséder un *théorème de multiplication* si les $\varphi_i(mu)$ s'expriment rationnellement au moyen des $\varphi_i(u)$.

Tout système qui possède un théorème d'addition possède une infinité de théorèmes de multiplication, correspondant à toutes les valeurs entières de $m$. C'est le cas des fonctions circulaires, des fonctions elliptiques, des fonctions qu'on déduit des fonctions abéliennes de deux variables en fixant l'une des variables.

Mais il y a, comme le montre M. Poincaré, des fonctions qui admettent un théorème de multiplication sans posséder un théorème d'addition.

L'objet du présent Mémoire est la recherche de fonctions qui admettent un théorème de multiplication et pour lesquelles le point $u = 0$ *n'est pas* un point singulier essentiel.

A ces conditions, l'auteur ajoute d'abord cette hypothèse supplémentaire, que le développement *de l'une au moins* des fonctions $\varphi_i(u)$, que l'on est en droit de supposer toutes nulles pour $u = 0$, commence par un terme en $u$. *Si de pareilles fonctions existent, elles sont nécessairement uniformes.* Si de plus les $\varphi_i(mu)$ s'expriment en fonctions non seulement rationnelles, mais entières des $\varphi_i(u)$, les fonctions $\varphi_i(u)$ *sont holomorphes dans tout le plan.*

L'auteur montre ensuite comment on satisfera *formellement,* par des séries entières en $u$, aux *équations fondamentales*

$$(2) \qquad \varphi_i(mu) = R_i[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)] \qquad i = (1, 2, \ldots, n),$$

qui expriment, les $R_i$ étant des fonctions rationnelles, l'existence d'un théorème d'addition. Il emploie à cet effet la méthode des coefficients indéterminés et précise le nombre d'arbitraires dont dépendront, suivant les cas, les *séries fondamentales* cherchées.

Mais, pour l'existence des fonctions $\varphi_i(u)$, il faut établir la convergence de ces séries fondamentales. De l'examen d'un cas particulier, dans lequel la convergence de ces séries est facile à établir, M. Poincaré réussit à déduire, par une analyse où intervient la considération de fonctions majorantes, que les séries fondamentales qui correspondent à un théorème de multiplication *quelconque* sont toujours convergentes sous des conditions parfaitement précisées et à peine restrictives. D'où cette conclusion :

*Il existe des transcendantes uniformes qui admettent un théorème de multiplication quelconque.*

M. Poincaré établit ensuite que, si les fonctions $R_i$ des équations fondamentales sont de véritables fractions rationnelles et non pas des polynomes entiers, les *fonctions* $\varphi_i(u)$, *nécessairement méromorphes* dans tout le plan, sont représentées chacune par le *quotient de deux fonctions holomorphes,* qui admettent un théorème de multiplication.

La fin du Mémoire est consacrée à l'étude du cas important où les équations fondamentales (2) définissent une substitution *birationnelle* entre les $\varphi_i(u)$ et les $\varphi_i(mu)$; M. Poincaré dit alors que le théorème de multiplication est *crémonien ;* il donne le même nom aux fonctions $\varphi_i(u)$ qui possèdent ce théorème.

Réservant le difficile problème qui consiste à reconnaître si une substitution Cremona, indéfiniment appliquée à un point analytique, fait tendre ce point

vers un même point limite quelle que soit sa position initiale, l'auteur donne des exemples où il en est ainsi. L'un d'eux correspond au théorème de multiplication suivant

$$\varphi_1(mu) = \frac{m\,\varphi_1(u)}{1-\beta\varphi_1(u)}, \qquad \varphi_2(mu) = \frac{a[\varphi_1(u)]\,\varphi_2(u) + b[\varphi_1(u)]}{c[\varphi_1(u)]\,\varphi_2(u) + d[\varphi_1(u)]},$$

où $\beta$ est une constante; $a$, $b$, $c$, $d$ sont quatre polynomes entiers en $u$; le signe $[\varphi_1(u)]$ indique la substitution de $\varphi_1(u)$ à $u$. La fonction $\varphi_1$ est rationnelle. Au contraire, $\varphi_2(u)$ est transcendante et en relation étroite avec les fonctions $\theta$ elliptiques.

L'intérêt des théorèmes de multiplication *crémoniens* est de conduire à des fonctions qui demeurent inaltérées par une substitution Cremona et ses puissances.

« Ce ne sont peut-être, dit l'auteur en terminant, que des cas extrêmement particuliers d'une classe plus générale de fonctions uniformes qui demeureraient inaltérées par un *groupe* de substitutions Cremona et qui se présenteraient comme la généralisation la plus naturelle des fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes de M. Picard. »

*Caspary* (*F.*). — Sur les relations qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thèta et sigma d'un seul argument et aux fonctions elliptiques, et sur une théorie élémentaire de ces transcendantes, déduite desdites relations. (367-404).

Entre les neuf coefficients $a_{mn}$ ($m$, $n = 1, 2, 3$) d'un système orthogonal et les six expressions différentielles

$$p_h = -(a_{1k}\,da_{1l} + a_{2k}\,da_{2l} + a_{3k}\,da_{3l}),$$
$$v_h = \quad a_{k1}\,da_{l1} + a_{k2}\,da_{l2} + a_{k3}\,da_{l3}$$

(où $h$, $k$, $l$ désignent les nombres 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2) et que l'auteur appelle *éléments d'un système orthogonal,* existent un grand nombre d'identités algébriques et différentielles.

Les premières sont d'un usage courant, depuis Euler.

Des relations différentielles on peut, comme conséquences purement analytiques, déduire la théorie des fonctions thèta et sigma d'un seul élément, ainsi que la théorie des fonctions elliptiques et celle des fonctions hyperelliptiques de genre *deux;* ces identités conduisent, d'autre part, aux applications mécaniques et géométriques des fonctions précitées.

« Le Mémoire présent, dit l'auteur, est consacré exclusivement à la théorie des fonctions thèta et sigma d'un seul argument et à la théorie des fonctions elliptiques.

» Après avoir exprimé identiquement les quinze éléments d'un système orthogonal par quatre quantités quelconques (n° 1), je déduis de ces identités, au moyen des transformations du second degré (n° 2), les théorèmes I et II qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thèta et sigma (n°s 3 et 4).

» Les théorèmes énoncés fournissent, d'une façon élémentaire, et avec très peu de calcul, la théorie des fonctions thêta et sigma, en toute leur généralité.

» Pour en donner les principes, j'établis quelques-unes des identités, qui ont lieu entre les éléments $a_{mn}$, $p_h$, $v_h$ (n° 5). D'abord je tire de ces identités les relations relatives aux fonctions thêta (n° 6) qui fournissent l'inversion des intégrales elliptiques de première espèce (n° 7); de plus je transforme un cas spécial du théorème I en le théorème III, qui lie les éléments d'un système orthogonal aux fonctions elliptiques (n° 8), et pour montrer, par un seul exemple, la fécondité de ce théorème, j'en tire, sous des formes bien différentes, les formules d'addition des fonctions elliptiques sn, cn, dn (n° 9). En joignant alors le théorème III aux théorèmes I et II, j'obtiens les expressions des intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce, au moyen des fonctions thêta, leurs théorèmes d'addition, et les formules fondamentales relatives à la fonction $\wp(u)$ et aux fonctions sigma (n°s 10 et 11). Enfin j'aborde les fonctions doublement périodiques de seconde espèce et j'ajoute quelques remarques sur les différents points de vue sous lesquels les recherches que l'on va lire peuvent être continuées (n° 12).

## *Gutzmer* (*Aug.*). — Remarques sur certaines équations aux différences partielles d'ordre supérieur. (405-422).

Émile Mathieu a étudié l'équation du quatrième ordre

$$\Delta\Delta u = 0,$$

où $\Delta$ désigne l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Il a appelé *second potentiel* la fonction $w(x, y, z)$, qui satisfait à l'équation

$$\Delta\Delta w = 0,$$

si le point $(x, y, z)$ se trouve en dehors d'une masse distribuée dans un volume $\omega$, et à l'équation

$$\Delta\Delta w = -8\pi\varphi(x, y, z)$$

si ce point est à l'intérieur de $\omega$, la densité en ce point étant $\varphi$.

Ce sont ces propriétés que M. Gutzmer étend aux potentiels troisième, quatrième, ..., d'abord dans le cas de deux variables, puis dans celui de trois variables et dans le cas de $\rho$ variables.

Les résultats diffèrent essentiellement suivant que $\rho$ est pair ou impair.

L'équation du potentiel $(n-1)^{\text{ième}}$

$$\Delta^n u = 0, \tag{1}$$

peut être vérifiée si l'on pose

$$r^2 = \sum_{i=1}^{i=\rho} (x_i - a_i)^2 \qquad (a_i = \text{const.}).$$

par l'expression

$$(2) \qquad u = g_{n-1}(r^2) + \frac{1}{r^{\rho-2}} h_{n-1}(r^2),$$

lorsque $\rho$ est impair; $g_{n-1}$ et $h_{n-1}$ sont des polynomes entiers en $r^2$, du degré $n-1$, à coefficients arbitraires.

Si $\rho$ est pair et égal à $2\sigma$, et si $n > \sigma - 1$, l'équation (1) est vérifiée par l'expression

$$(3) \qquad u = \frac{1}{r^{2\sigma-2}} g_{n+\sigma-2}(r^2) + \log \frac{1}{r} h_{n-\sigma}(r^2),$$

où les polynomes entiers en $r^2$ sont des degrés marqués par leurs indices et ont leurs coefficients arbitraires.

Les expressions (2) et (3) sont d'ailleurs les seules solutions de l'équation (1) qui ne dépendent que de $r$.

## *Humbert* (*G.*). — Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable du quatrième ordre. (423-444).

L'équation d'une quartique plane, rapportée au triangle $xyz$ formé par trois de ses tangentes doubles, dont les six points de contact ne sont pas sur une conique, est de la forme

$$p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 - 2pqxy - 2qryz - 2rpzx = txyz,$$

$p$, $q$, $r$ désignant des fonctions linéaires de $x$, $y$, $z$.

M. Humbert étudie celles de ces quartiques pour lesquelles on a

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial f}{\partial z},$$

$f(x, y, z)$ étant un polynome entier du second degré.

Il montre à la fin de son Mémoire qu'il existe une surface du quatrième ordre dont *toutes les sections planes* sont des courbes de l'espèce considérée : c'est la transformée homographique de la surface réciproque de la surface des centres d'un ellipsoïde.

### Tome VII; 1891.

## *Ribaucour* (*Albert*). — Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes. (5-108, 219-270).

Avant d'analyser cet important Mémoire, il convient de faire observer que, publié seulement en 1891, il a été rédigé en 1876.

Quelques extraits de l'Introduction en feront connaître l'objet et la méthode :

« Il importe, pensons-nous, si l'on veut employer la théorie des surfaces efficacement, de pouvoir opérer dans l'espace par des constructions *tout inté-*

*grées;* de fonder, si je puis m'exprimer ainsi, une sorte de Géométrie analytique permettant d'étudier, sans l'introduction d'éléments inutiles, tout ce qui est relatif aux propriétés infinitésimales d'une figure donnée, qu'elle varie ou non à chaque instant. Il faut opérer *autour d'une surface* et avec la plus grande généralité, comme on opère habituellement autour d'un point; encore convient-il de s'affranchir absolument des éléments qui tiennent à l'orientation....

» Dans les problèmes que j'ai en vue, j'introduis en général des constructions finies qui font dépendre les éléments successifs d'une figure des éléments correspondants d'une surface dite *de référence*. Traçons, par exemple, sur une surface un réseau $(u, v)$; soient OX, OY les tangentes en $O(u, v)$ à $(v)$ et à $(u)$, OZ la normale à la surface. Faisons à chaque instant correspondre un point M de l'espace à O et, dans ce but, donnons-nous les coordonnées instantanées $\xi$, $\eta$, $\zeta$ par rapport aux axes OX, OY, OZ; à toute position O′ infiniment voisine de O va correspondre une position de M′ voisine de M; la position de O′ est définie par les accroissements $du$ et $dv$, celle de M′ l'est par les quantités $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ considérées comme fonctions de $u$ et $v$. Désignons par $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ les projections de MM′ sur OX, OY, OZ; on pourra les calculer en fonctions de $du$, $dv$, à l'aide des $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$; par conséquent, on connaîtra le déplacement réel de M en M′. Opérant de la même façon pour tous les points d'une figure, on voit comment elle se déplace en se déformant, lorsque $u$ et $v$ s'accroissent de $du$ et $dv$.

» Plus généralement, si l'on se donne à chaque instant une relation

$$F(\xi, \eta, \zeta, u, v) = 0.$$

définissant une surface correspondant à chaque point $O(u, v)$ de la surface de référence, on peut trouver comment elle se déplace en se déformant lorsque $u$ et $v$ croissent de $du$ et $dv$....

» Au lieu d'une surface de référence unique et de deux paramètres $u$ et $v$, on peut prendre un système triple de surfaces dépendant de trois paramètres $\rho$, $\rho_1$ et $\rho_2$ et faire correspondre entre eux deux espaces différents par certaines constructions géométriques....

» L'un des plus grands avantages de la méthode générale que nous employons consiste dans la facilité avec laquelle on peut attaquer des problèmes de façons différentes, suivant le choix que l'on fait de la surface de référence. »

Le Mémoire est divisé en treize Chapitres, dont nous rendrons compte successivement.

Le Chapitre I est consacré à l'établissement des formules fondamentales dans le cas où le réseau $(u, v)$ est orthogonal, ainsi qu'à la recherche directe du sens géométrique des coefficients introduits. Il va sans dire que ces coefficients satisfont aux équations dites *formules de Codazzi*.

Le Chapitre II contient la même étude, faite dans le cas où le réseau $(u, v)$ n'est pas orthogonal.

Le Chapitre III traite des formules fondamentales relatives à la correspondance de deux espaces, quand on prend pour réseau de référence une famille triple de surfaces orthogonales; à cette occasion l'auteur a établi par les procédés de la *Géométrie autour des surfaces* la théorie des systèmes triplement orthogonaux.

Dans le Chapitre IV commencent les applications, avec l'étude des faisceaux

de droites parallèles aux normales de la surface de référence : condition pour que le faisceau soit formé des normales à une surface; recherche des surfaces ayant même image sphérique que la surface de référence; systèmes orthogonaux dans lesquels toutes les surfaces d'une famille ont même image sphérique, systèmes que concerne le théorème suivant :

*Si une surface est telle que son élément linéaire, rapporté aux lignes de courbure, soit de la forme*

$$ds^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv^2,$$

*on peut, de cette surface, déduire toute une famille faisant partie d'un système triplement orthogonal; toutes les surfaces de cette famille ont même image sphérique.*

Au Chapitre V les surfaces sont étudiées à l'aide des paramètres $(x, y)$ des lignes de longueur nulle de la sphère. L'auteur donne notamment l'équation aux dérivées partielles d'une famille de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal; il prouve ainsi que :

*Toutes les fois qu'on a tracé sur la sphère un réseau orthogonal* $(u, v)$ *tel que son élément linéaire ait la forme*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv^2,$$

*on obtient sans quadrature deux surfaces pour lesquelles ce réseau est l'image des lignes de courbure.*

Le Chapitre VI est consacré à la théorie des *développées moyennes :* est dite *développée moyenne d'une surface* l'enveloppe du plan mené perpendiculairement à chacune de ses normales par le point milieu des deux centres de courbure principaux. On peut construire toutes les surfaces ayant même développée moyenne qu'une surface donnée. Appelant *développante* d'une surface donnée toute surface qui admet celle-là comme développée moyenne, l'auteur démontre qu'on peut obtenir par deux quadratures les développantes d'une surface donnée; il étudie les développantes de la sphère et des surfaces minima; donne la condition pour que deux surfaces soient chacune la développée moyenne de l'autre; il établit que la cyclide de Dupin et sa développée moyenne ont même représentation sphérique.

Le Chapitre VII contient diverses propriétés des faisceaux de droites et généralise le théorème de Gauss concernant le produit des rayons de courbure principaux.

Au Chapitre VIII sont étudiés les faisceaux de droites situées dans les plans tangents de la surface de référence : si les segments focaux d'un pareil faisceau de droites sont vus des points de contact sous un angle dont les côtés sont conjugués, on peut déformer arbitrairement la surface de référence (chaque plan tangent entraînant la droite correspondante) sans que cette propriété cesse de subsister.

Le Chapitre IX traite des faisceaux de droites issues des points de la surface

de référence : on y trouve des propriétés générales qui conduisent aux théorèmes catoptriques de Malus et de Dupin.

Au Chapitre X, l'auteur considère les droites liées aux plans tangents de la surface de référence et qui restent normales à des surfaces quand celle-ci se déforme; il donne quelques propriétés des surfaces qui se correspondent par plans tangents parallèles avec correspondance des lignes de longueur nulle (surfaces isothermiques, ou à lignes de courbure isothermes).

Le Chapitre XI développe la théorie des *systèmes cycliques*, ou systèmes triplement orthogonaux, dans lequel les trajectoires des surfaces d'une famille sont des cercles. La théorie repose sur cette proposition fondamentale :

*Si des cercles sont normaux à trois surfaces, ils le sont à toute une famille de surfaces qui font partie d'un système triplement orthogonal (système cyclique).*

De plus, l'intégrale des surfaces trajectoires s'obtient sans quadratures, si l'une de ces trajectoires est plane ou sphérique.

On peut faire dériver de tout système cyclique un autre système cyclique dans lequel les trajectoires ont même image sphérique que celles du premier système.

Il faut connaître les lignes de courbure d'une surface trajectoire pour ramener aux quadratures l'intégration des autres surfaces trajectoires d'un système cyclique; mais, si l'on connaît *trois* trajectoires, on peut construire toutes les autres, sans même effectuer de quadratures.

Le Chapitre XII traite de la variation des courbures totale $\frac{1}{R_1 R_2}$ et moyenne $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, quand on passe d'une surface à une surface infiniment voisine, spécialement dans le cas particulier où la surface infiniment voisine est applicable sur la proposée.

Au Chapitre XIII sont généralisés certains résultats du Chapitre X par la recherche des trajectoires orthogonales *planes* des surfaces, dont voici le point de départ :

Si des courbes (C) tracées dans les plans tangents d'une surface (O) sont les trajectoires d'une famille de surfaces, on peut déformer (O) comme on veut, chaque plan tangent entraînant la courbe qu'il contient, et le faisceau des courbes (C) jouit toujours de la même propriété.

Ces courbes peuvent être identiques entre elles; la solution la plus simple est fournie par des cercles ayant leurs centres aux points de contact des plans tangents et leur rayon égal à $\sqrt{-R_1 R_2}$. On peut construire un système cyclique dans lequel tous les cercles trajectoires sont égaux : la surface enveloppe de leurs plans coïncide avec le lieu de leurs centres et a sa courbure totale constante.

Le Chapitre se termine par diverses propositions relatives à la recherche générale des systèmes cycliques. La connaissance d'un système cyclique équivaut à celle d'une enveloppe de sphères telle que les points focaux des cordes de contact soient conjugués harmoniques par rapport aux points de contact et réciproquement. On peut définir géométriquement les systèmes cycliques dont les plans enveloppent une développable.

L'équation différentielle des surfaces trajectoires des courbes *planes* est indépendante de la forme de la surface de référence. Le système cyclique dérivé

des cercles égaux admet pour trajectoires des surfaces applicables sur la surface enveloppe du plan des cercles et sur la surface de révolution ayant pour méridienne la tractrice; sur toutes ces surfaces, les lignes de courbure se correspondent.

Lorsqu'un système cyclique est tel que les plans de tous ses cercles passent par un point fixe, chacun des cercles est orthogonal à une sphère fixe ayant ce point fixe pour centre.

## *Cellérier.* — Lois des chocs moléculaires. (109-155).

Ce Mémoire, où l'auteur reprend la théorie cinétique des gaz, est divisé en deux Parties. Dans la première, il est traité des valeurs théoriques du nombre des chocs et des changements de force vive de translation; on admet que les molécules n'exercent aucune action mutuelle, sauf dans le cas du choc, et la masse gazeuse est supposée contenue dans une vaste enceinte où elle reste à l'état permanent.

Dans la seconde Partie, les molécules sont considérées comme à peu près sphériques, ce qui permet de déterminer le rapport des forces vives totales de translation et de rotation, et conduit à diverses valeurs approchées du rapport des chaleurs spécifiques.

## *Appell* (*P.*). — Sur les fonctions périodiques de deux variables. (157-219).

*Introduction.* — « Les fonctions doublement périodiques d'une variable, qui se comportent à distance finie comme une fraction rationnelle, peuvent toutes, ainsi qu'il est bien connu, s'exprimer par des combinaisons rationnelles de fonctions $\Theta$ d'une variable. Après la découverte des fonctions $\Theta$ de plusieurs variables faite par Göpel et Rosenhain, on a dû se demander immédiatement si toute fonction de $n$ variables avec $2n$ groupes de périodes, se comportant à distance finie comme une fraction rationnelle, pourrait être exprimée à l'aide des fonctions $\Theta$ de $n$ variables. Au premier abord il semble que non, car les périodes d'une fonction $\Theta$ de $n$ variables ne peuvent pas être choisies arbitrairement : elles sont liées par $\frac{n(n-1)}{2}$ relations bien connues. Cependant, dans une conversation qu'il eut avec M. Hermite en 1860, Riemann avait affirmé que ces relations doivent nécessairement exister entre les $2n$ groupes de périodes d'une fonction de $n$ variables, tout au moins après une transformation d'un degré convenable effectuée sur ces périodes; mais il n'a donné aucune indication sur la méthode qui l'avait conduit à ce théorème d'une importance capitale. M. Weierstrass a, depuis, annoncé à quelques-uns de ses élèves qu'il possède une démonstration de ce théorème; mais il n'a ni publié, ni indiqué la méthode dont il fait usage. Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 3 décembre 1883, MM. Poincaré et Picard, s'appuyant sur ce théorème de M. Weierstrass que $(n+1)$ *fonctions de n variables à* $2n$ *groupes de périodes sont liées par une relation algébrique,* ont donné une démonstration du théorème de Riemann fondée sur la considération d'intégrales de différentielles totales et sur la théorie des intégrales abéliennes.

» En me bornant au cas le plus simple de deux variables indépendantes, je me propose, dans ce Mémoire, de traiter directement la question. Partant de

l'expression d'une fonction de deux variables, sans singularités essentielles à distance finie, sous forme du quotient de deux fonctions entières, telle qu'elle résulte d'un théorème de M. Poincaré, je montre que, si cette fonction admet quatre paires de périodes, on peut toujours les amener à vérifier la relation de Riemann et exprimer la fonction par le quotient de deux fonctions entières composées avec des fonctions $\Theta$ de deux variables. Je n'ai donc pas à m'appuyer sur l'existence d'une relation algébrique entre trois fonctions de deux variables à quatre paires de périodes : la méthode suivie permet, au contraire, de démontrer l'existence de cette relation.

» Pour appliquer d'abord la méthode à un exemple simple, je commence par traiter le cas des fonctions d'une variable à deux périodes, en m'appuyant sur les résultats relatifs aux fonctions entières, dus à M. Guichard; puis je traite, par une méthode toute semblable, le cas des fonctions de deux variables à quatre paires de périodes. Le Mémoire se termine par quelques remarques sur les fonctions de deux variables avec deux paires de périodes. J'ai laissé de côté l'étude des fonctions à trois paires de périodes, qui peut être faite de la même façon. »

## *Cellérier.* — Note sur quelques effets des tremblements de terre. (271-352).

Après avoir traité le cas simple d'un pendule composé dont l'axe de suspension éprouve une secousse horizontale, et celui de deux tiges articulées, l'auteur aborde le principal objet de son Mémoire, qui est le mouvement d'une tige élastique.

Ce problème difficile a été étudié par Poisson; mais il est nécessaire de compléter sur beaucoup de points l'analyse de Poisson, qui manque de rigueur.

Aussi M. Cellérier commence-t-il par établir soigneusement l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre

$$(14) \qquad b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y(x, t),$$

qui régit le mouvement de la tige, abstraction faite de toute secousse.

Il entre ensuite dans tous les détails nécessaires à l'intégration rigoureuse de l'équation privée de second membre et prouve notamment que toutes les racines de l'équation

$$\cos\mu \operatorname{Ch}\mu + 1 = 0,$$

se répartissent par groupes de quatre de la forme $\pm h$, et $\pm h\sqrt{-1}$ et qu'elles sont toutes distinctes.

Ce point acquis, on peut former la série de Poisson, somme de toutes les solutions simples qui correspondent à toutes les racines $\mu$. Mais il faut prouver, pour en pouvoir déduire la solution cherchée de l'équation (14) :

1° Que la série $y$ de Poisson est convergente;

2° Qu'elle satisfait à l'équation

$$b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

ainsi qu'aux conditions

$$y = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

au point fixe de la tige ($x = 0$) et aux conditions

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0,$$

à l'extrémité libre ($x = 1$);

3° Que la fonction $y$ et sa dérivée prennent bien pour $t = 0$ les valeurs

$$y = \varphi(x), \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = f(x),$$

données de $x = 0$ à $x = 1$.

Après discussion des conditions 1° et 2°, l'auteur étudie le mouvement relatif pour une secousse quelconque imprimée à la tige.

Il revient ensuite sur les conditions 3°, dont la vérification exige l'emploi des théorèmes de Cauchy sur les fonctions d'une variable complexe et dont l'application donne lieu à une discussion détaillée dans chaque cas particulier. Dans cette partie de son Mémoire, M. Cellérier se trouve conduit à reprendre, pour les compléter, les démonstrations de diverses propositions d'Analyse, et en particulier celle de la série de Fourier.

## *Humbert* (*G.*). — Sur la surface desmique du quatrième ordre. (353-398).

Trois tétraèdres sont dits *former un système desmique* (Stephanos) lorsque les trois surfaces du quatrième ordre, formées respectivement par leurs faces, appartiennent à un même faisceau ponctuel, c'est-à-dire ont seize droites communes, et l'on appelle *surface desmique du quatrième ordre* toute surface de ce faisceau, c'est-à-dire toute surface du quatrième degré passant par les seize droites.

« Le présent Travail, dit M. Humbert, a pour but d'exposer des propriétés nouvelles de la surface desmique; il est divisé en quatre Parties.

» Dans la première, exclusivement géométrique et fort courte, on établira quelques propositions simples et presque élémentaires, dont il sera fait un grand usage par la suite.

» Dans la seconde, après avoir exposé un mode de représentation de la surface à l'aide des fonctions $\sigma$, on fera voir que certaines courbes tracées sur la surface desmique jouissent des propriétés angulaires des droites tracées sur le plan, et l'on en déduira une Géométrie de la surface tout à fait analogue à la Géométrie euclidienne du plan.

» La troisième Partie est consacrée à l'étude des sections pleines de la surface : dans un Mémoire inséré au Tome VI (4e série) de ce journal, nous avons montré que la section plane d'une surface desmique n'est pas la courbe générale du quatrième ordre, et nous avons fait connaître de nombreuses propriétés de cette quartique particulière. Nous compléterons nos résultats anté-

rieurs, et nous étudierons spécialement la section de cette surface par un de ses plans tangents.

» Enfin, dans la dernière Partie, nous rattacherons les surfaces desmiques à la surface générale du troisième ordre, par l'intermédiaire d'une proposition remarquable due à M. Cremona, et nous ferons connaître une dégénérescence intéressante de ces surfaces. »

## *Willotte* (*H.*). — Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide. (399-431).

L'objet des recherches de M. Willotte est de montrer le parti que l'on peut tirer de la notion des forces de percussion pour faire la théorie de la *résistance des fluides* (actions des fluides sur les solides qui y sont immergés), en vue d'arriver à l'explication d'importantes lois naturelles.

Le fluide étudié est constitué comme l'*éther;* c'est un ensemble indéfini de points matériels $m$ qui pourront être liés entre eux par des forces dépendant d'un potentiel. Ce fluide est à l'état de *division infinie,* c'est-à-dire que le nombre N de points $m$ contenus dans l'unité de volume est infiniment grand, et chaque masse $m$ infiniment petite; la masse totale $Nm$ de l'unité de volume du fluide étant assujettie à conserver une valeur finie déterminée, d'ailleurs quelconque.

Les solides immergés dans ce fluide sont toujours supposés être des solides *invariables*, parfaitement élastiques. L'auteur insiste principalement sur le cas où ces solides sont en état de *moyen mouvement permanent,* ces mots désignant un état intermédiaire entre le repos et l'état de grande agitation, état intermédiaire caractérisé par cette propriété que la force vive moyenne de l'une quelconque des parties du solide, calculée pour une période de temps T, tend vers une limite bien déterminée lorsque cet intervalle T croît indéfiniment.

Voici l'un des résultats auxquels donne lieu la considération de semblables états :

La valeur moyenne de la force vive du mouvement de translation d'une sphère homogène en état de moyen mouvement permanent au sein d'un fluide à points indépendants, infiniment divisé, est égale, quels que soient le rayon et la masse de la sphère, à une quantité qui ne dépend que de la constitution du fluide.

### Tome VIII : 1892.

## *Picard* (*Ém.*). — Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. (5-24).

Étant données $n$ équations à $n$ inconnues

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

il s'agit de trouver le nombre de leurs solutions communes, contenues dans un domaine $\Delta$. On doit à Kronecker le résultat suivant :

On forme l'intégrale multiple d'ordre $n-1$

$$I = \int\int\cdots\int \frac{\sum A_i\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n}{(f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2)^{\frac{n}{2}}},$$

étendue à l'extérieur de la surface limitant le domaine $\Delta$, en posant

$$A_i = \begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

si $n$ est pair, tandis que $A_i$ est égal au déterminant précédent, multiplié par $(-1)^{i-1}$, si $n$ est impair.

On désigne par S la surface de l'hypersphère de rayon 1 dans l'espace à $n$ dimensions

$$S = 2\pi . 2\frac{1}{2}\pi . 2\frac{2}{3} . \frac{1.3}{2.4}\pi . 2\frac{2.4}{3.5} \cdots$$

Cela posé, on a

$$I = S.m,$$

$m$ représentant la différence entre le nombre des solutions communes pour lesquelles le déterminant fonctionnel D des fonctions $f$ est positif et celles pour lesquelles il est négatif.

Pour résoudre complètement le problème, M. Picard associe aux équations proposées une $(n+1)^{\text{ième}}$ équation

$$zD = 0,$$

il envisage dans l'espace à $n+1$ dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ l'ensemble des valeurs des $x_i$ contenus dans $\Delta$ et des valeurs de $z$ comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ ($\varepsilon$ désignant une constante positive arbitraire). Le déterminant fonctionnel des $n+1$ fonctions qui forment les premiers membres des équations considérées est maintenant égal à la quantité essentiellement positive $D^2$, de sorte que l'on peut appliquer au domaine à $n+1$ dimensions défini le théorème de Kronecker qui fera connaître, exactement cette fois, le nombre des solutions communes aux $n$ équations $f_i = 0$ dans le domaine $\Delta$.

C'est ce théorème que l'auteur démontre et qu'il fait suivre de diverses applications.

*Poincaré (H.).* — Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebicheff. (25-68).

## *Jordan* (*C.*). — Remarques sur les intégrales définies. (69-99).

L'auteur étudie l'influence du champ sur la valeur de l'intégrale, en s'appuyant sur la théorie générale des ensembles.

Il montre qu'à un champ quelconque E de l'hyperespace correspondent deux nombres déterminés E′ et E″ qu'on peut appeler son *étendue intérieure* et son *étendue extérieure*. Si ces deux nombres coïncident, le champ E est dit *mesurable* et a pour étendue le nombre $E'' = E'$; pour que cette circonstance se présente, il faut et il suffit que la frontière de E ait une étendue nulle.

Une fonction $f$ qui reste bornée dans tout l'intérieur de E, admet dans cette région une intégrale par excès et une intégrale par défaut. Si ces deux intégrales coïncident, elles représentent l'intégrale proprement dite de la fonction $f$ dans le champ E.

La détermination d'une intégrale proprement dite multiple se ramène à celle d'une suite d'intégrales simples, pourvu que le champ soit mesurable.

Ensuite vient l'examen des cas où la fonction $f$ ne reste plus bornée et où le champ E est infini.

Enfin, la théorie du changement de variables dans les intégrales multiples est présentée, sans restriction inutile, par une méthode analogue à la méthode géométrique employée pour les intégrales doubles et triples.

## *Hadamard* (*J.*). — Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. (101-186).

L'auteur étudie les développements de Taylor au point de vue de la recherche des points singuliers, problème étroitement lié à celui du prolongement d'une fonction en dehors du cercle de convergence.

La méthode qu'il a suivie repose sur les principes dont M. Darboux a fait usage dans son Mémoire *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres;* particulièrement celui-ci : la recherche de la partie principale des coefficients de la série dépend de la manière dont la fonction devient infinie sur le cercle de convergence.

» J'ai divisé, dit-il, ce Travail en trois Parties :

» Dans la première, après avoir introduit une notion préliminaire indispensable pour la suite, je détermine d'une façon générale le rayon de convergence. Les résultats obtenus conduisent immédiatement à un critérium permettant de reconnaître dans certains cas la présence d'un ou plusieurs points singuliers.

» La deuxième Partie est consacrée à l'étude des discontinuités polaires. Lorsque la fonction n'a sur le cercle de convergence que de telles discontinuités, on peut la prolonger analytiquement et la représenter dans tout cercle où elle est méromorphe.

» Dans la troisième Partie, je définis ce qu'on peut appeler l'*ordre* d'une fonction sur son cercle de convergence et en un point de ce cercle, et j'étudie les points singuliers en les classifiant d'après leur ordre. Lorsque cet ordre reste fini, on peut, dans des cas assez étendus, trouver les points singuliers, et, dans tous les cas, calculer la fonction en tout point ordinaire du cercle de convergence. »

*Appell* (*P.*). — Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la théorie de la chaleur. (187-216).

Dans ce Travail, l'auteur se place surtout au point de vue de la Physique mathématique en supposant $x$, $y$ et $z$ réels, et s'inspire des méthodes de Riemann. Il s'attache principalement à résoudre les questions suivantes :

On considère un conducteur indéfini, dans lequel la température $u$ est supposée dépendre uniquement de l'abscisse $x$. Cette température $u$ étant donnée arbitrairement, $u = f(x)$ à l'instant initial $t = 0$, les formules de Fourier déterminent la température à un instant postérieur quelconque, $t > 0$. Mais on demande : 1° si l'état initial donné $u = f(x)$ provient lui-même d'un état antérieur ($t < 0$); 2° lorsque cet état antérieur existe, s'il est unique, et comment on peut le trouver.

L'état antérieur n'existe pas toujours; pour qu'il existe, il est nécessaire (mais non suffisant) que la fonction donnée $f(x)$ soit une fonction développable suivant les puissances entières et positives de $x$, convergente quel que soit $x$.

Quand l'état antérieur existe, il est unique et peut être déterminé dans des cas très généraux.

*Picard* (*Ém.*). — Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe. (217-232).

Les équations fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable complexe

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

peuvent évidemment être généralisées d'une infinité de manières. Voici comment M. Picard pose le problème :

*Trouver un système de $m$ équations ($m \geqq n$) contenant uniquement les dérivées partielles du premier ordre de $n$ fonctions* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *dépendant de $n$ variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f_i\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P_1}{\partial x_n}, \frac{\partial P_2}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P_n}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

*et telles que, si l'on considère un second système également arbitraire de solutions* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, *les fonctions* P *considérées comme fonctions des* Q *satisfassent aux mêmes équations*

$$f_i\left(\frac{\partial P_1}{\partial Q_1}, \ldots, \frac{\partial P_1}{\partial Q_n}, \frac{\partial P_2}{\partial Q_1}, \ldots, \frac{\partial P_n}{\partial Q_n}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

La formation des équations $f = 0$ se ramène à la recherche des groupes linéaires et homogènes, en vertu du théorème suivant :

*On prend un groupe quelconque de substitutions linéaires à $n$ variables,*

*contenant la substitution unité,*

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ X_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned}$$

*les a dépendant d'un certain nombre p de paramètres* ($p < n^2$); *on pose*

$$\frac{\partial P_k}{\partial x_i} = a_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

*L'élimination des p paramètres, dont dépendent les a, entre ces $n^2$ équations, conduira à $n^2 - p$ équations entre les dérivées partielles du premier ordre de* $P_1, P_2, \ldots, P_n$; *ce sont les relations cherchées.*

La méthode suivie par l'auteur n'est pas limitée au cas où les équations $f = 0$ ne contiennent que des dérivées du premier ordre : l'extension est indiquée par la formation des équations du second ordre à deux variables indépendantes.

Vient ensuite la formation des équations du premier ordre à deux et à trois variables; celles-ci réduites aux exemples les plus simples. En particulier l'auteur obtient tous les systèmes formés de trois équations.

## *Rivereau* (*P.*). — Sur les invariants de quelques équations différentielles. (233-268).

Il s'agit des équations du second ordre de la forme

$$\begin{aligned} a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y'' y' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y' y \\ + 2c_0 y'' + 2c_1 y' + 2c_2 y + d_0 = 0, \end{aligned}$$

les coefficients $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_0$ étant des fonctions de la variable $x$, soumises au changement de fonction et de variable

$$y = \eta\, u(x) + \varphi(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

L'auteur détermine les invariants et les formes canoniques de ces équations, en les répartissant en trois classes : 1° le coefficient $a_0$ est différent de zéro; 2° le coefficient $a_0$ est nul et $b_1$ différent de zéro; 3° les deux coefficients $a_0$ et $b_1$ sont nuls. (La transformation considérée ne change pas la classe d'une équation.)

Pour obtenir une forme canonique, on établit certaines relations entre les coefficients de l'équation transformée. Ces relations fournissent, pour déterminer $\varphi$, une équation du premier degré. Les fonctions $u$ et $\mu$ sont déterminées, soit par des équations différentielles linéaires, homogènes et du premier ordre, soit par des équations algébriques binomes. Dans le premier cas, les invariants absolus, coefficients de l'équation canonique, contiennent des exponentielles; dans le second, ce sont des fonctions algébriques des coefficients

de l'équation différentielle et de leurs dérivées, telles que certaines de leurs puissances sont des fonctions rationnelles de ces coefficients.

*Duhem* (*P.*). — Commentaire aux principes de la Thermodynamique (première Partie). (269-330).

« Les applications de la Thermodynamique ont été nombreuses depuis trente ans; aussi, de l'aveu de tous ceux qu'intéresse cette Science, une revision de ses principes est devenue nécessaire. C'est l'essai d'une semblable revision que nous soumettons aujourd'hui aux lecteurs du *Journal de Mathématiques*....

» Toute théorie physique repose sur un certain nombre de définitions et d'hypothèses qui sont, dans une certaine mesure, arbitraires; il est donc permis de chercher à exposer une semblable théorie dans un ordre logique; mais nous sommes convaincu que l'on peut enchaîner les principes de la Thermodynamique d'une manière autre que celle que nous avons adoptée, et cependant aussi satisfaisante, plus satisfaisante peut-être. »

*Jablonski*. — Théorie des permutations et des arrangements circulaires complets. (331-349).

Dans la première Partie est exposée une méthode pour calculer le nombre des permutations et des arrangements circulaires *avec répétitions*.

La seconde Partie contient les formules générales auxquelles conduit cette méthode :

1° Le nombre des permutations circulaires d'objets distincts répétés respectivement $\alpha$, $\beta$, ..., $\lambda$ fois est

$$\frac{1}{m}\sum_{1}^{D} P\left(\frac{D}{d}\right)\varphi(d) \qquad (m = \alpha + \beta + \ldots + \lambda);$$

D est le plus grand commun diviseur des nombres $\alpha$, $\beta$, ..., $\lambda$; $d$ est l'un quelconque des diviseurs de D, y compris 1 et D.

La fonction $\varphi(d)$ exprime le nombre des nombres premiers avec $d$ et inférieurs à lui; on prend $\varphi(1) = 1$; enfin $P\left(\frac{D}{d}\right)$ est le nombre des permutations rectilignes des mêmes objets ayant pour indices

$$\frac{\alpha}{d}, \quad \frac{\beta}{d}, \quad \ldots, \quad \frac{\lambda}{d};$$

2° Le nombre des arrangements circulaires complets de $m$ objets distincts pris $p$ à $p$ est

$$\frac{1}{m}\mathrm{S}\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{i_1!\,i_2!\ldots i_q!}\sum_{1}^{n} P\left(\frac{n}{d}\right)\varphi(d),$$

la somme $\mathrm{S}$ s'étendant à tous les systèmes distincts d'indices ou solutions en

nombres entiers et positifs de l'équation

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m;$$

$k$ désigne le nombre des indices non nuls dans un même système, $n$ le plus grand commun diviseur des indices d'une même solution; enfin les nombres $i_1$, $i_2$, ..., $i_q$, dont la somme est égale à $k$, expriment combien dans un même système d'indices il y en a de même valeur.

## *Lévy* (*Lucien*). — Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles. (351-383).

L'auteur se propose d'obtenir des surfaces qui, par un simple déplacement, engendrent une des trois familles d'un système triplement orthogonal (*famille de Lamé*).

Il emploie à cet effet l'équation de M. Maurice Lévy, sous la forme que lui a donnée M. Darboux, en la rapportant à des axes mobiles. Après avoir retrouvé les solutions bien connues que fournissent les surfaces de révolution et les surfaces-moulures, il en cherche de nouvelles parmi les *périsphères symétriques*, ou surfaces enveloppes d'une famille de sphères dont les centres décrivent une courbe plane; voici le résultat de son analyse :

*Si les cylindres de révolution qui ont pour bases les diverses lignes de courbure d'un périsphère symétrique, interceptent une longueur constante sur une droite* $\Delta$ *du plan de symétrie du périsphère, ce périsphère engendrera une famille de Lamé par une translation parallèle à la droite* $\Delta$.

## *Kobb* (*G.*). — Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables. (385-419).

L'objet de ce Mémoire est d'étudier, par une méthode analogue à celle de Weierstrass pour les fonctions algébriques d'une variable, les points singuliers des fonctions algébriques $z$ de deux variables $x$, $y$ et, en particulier, de donner la représentation analytique de la fonction dans le voisinage de ces points.

L'auteur montre que toutes les valeurs de $x$, $y$, $z$ qui sont situées dans le voisinage d'un point *quelconque* de la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

peuvent être représentées par des séries convergentes, procédant suivant les puissances entières et positives de deux variables auxiliaires. Il établit, en outre, qu'il suffit d'un nombre *fini* de pareils développements pour représenter la totalité de la surface.

## *De la Vallée-Poussin* (*C.-J.*). — Recherches sur la convergence des intégrales définies. (421-467).

Ces recherches sont fondées sur la théorie des ensembles. Le premier Chapitre est consacré à la *convergence absolue* des intégrales :

1° Convergence absolue des intégrales simples; 2° convergence des intégrales

doubles; 3° convergence uniforme et convergence régulière; réduction des intégrales doubles; 4° extension des théorèmes précédents au cas où l'aire s'étend à l'infini; 5° remarques au sujet de la théorie précédente.

Le second Chapitre traite de la *convergence relative :*

1° Définition et propriétés des intégrales simples; 2° convergence uniforme; intégration sous le signe; 3° extension au cas où l'aire s'étend à l'infini dans un sens; 4° extension au cas où l'aire s'étend à l'infini dans tous les sens.

## Tome IX; 1893.

### *Willotte.* — Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide (*suite*). (5-28).

Ce Mémoire fait suite aux recherches publiées dans le Tome VII du *Journal* (*voir* ci-dessus). Voici les titres de ses subdivisions :

I. Objet du présent Travail. Équations fondamentales.
II. Distribution des déplacements et des vitesses dans le fluide.
III. Raisons d'être de la considération des percussions.
IV. Marche à suivre pour tenir compte des percussions successivement produites.
V. Étude des effets des percussions sur l'état intérieur du fluide.
VI. Conséquence de la non-homogénéité du fluide.
VII. Examen de deux cas particuliers (notamment du cas des solides qui ont pour plans de symétrie les plans de leurs axes principaux passant par leurs centres de gravité).
VIII. Cas général.

### *Humbert* (*G.*). — Théorie générale des surfaces hyperelliptiques. (29-170, 361-473).

*Extraits de l'Introduction.* — « Le présent Mémoire est consacré à l'étude des surfaces remarquables introduites dans la Science par M. Picard, et pour lesquelles les coordonnées non homogènes d'un point quelconque peuvent s'exprimer en fonction uniforme, quadruplement périodique, de deux paramètres (*surfaces hyperelliptiques*).

» Les travaux de M. Poincaré sur les zéros communs à plusieurs fonctions abéliennes thêta sont, avec ceux de M. Picard sur les surfaces qui nous occupent, la base de nos recherches.

» Notre Mémoire, après un Chapitre consacré à des généralités, est divisé en deux sections principales : la première est relative à la surface de Kummer; la seconde aux surfaces hyperelliptiques en général.

» La surface de Kummer a déjà été l'objet de travaux nombreux et importants, en Allemagne surtout. Nous n'avons pas prétendu en faire une étude complète.... Ce que nous avons eu surtout en vue, c'est l'étude des courbes

tracées sur la surface de Kummer et celle des propriétés des surfaces qui passent par ces courbes.

» Nous commençons par établir la relation qui existe entre les fonctions thêta et les courbes tracées sur la surface de Kummer, et nous démontrons, à ce point de vue, un théorème fondamental....

» Viennent ensuite la classification et la détermination des courbes d'un degré donné qu'on peut tracer sur la surface de Kummer.... Nous étudions avec détails les courbes des degrés 4, 6 et 8 et les surfaces inscrites le long de ces courbes, dont les degrés sont 2, 3, 4.

» MM. Darboux et Rohn ont établi que la surface de Kummer admet trente séries de quadriques inscrites; nous complétons leurs recherches en étudiant les relations qui existent entre l'une de ces séries et les vingt-neuf autres; pour les surfaces d'ordres trois ou quatre, nous donnons une théorie très complète qui conduit à des résultats géométriques simples.

» Les Chapitres suivants se rapportent à l'étude des sections de la surface par ses plans tangents....

» Après un Chapitre consacré aux relations qui lient la surface de Kummer à sa réciproque, nous passons à l'examen du *genre* des courbes tracées sur la surface et à celui des propriétés qui se rattachent à la notion de genre....

» La surface de Kummer occupe, parmi les surfaces hyperelliptiques, une place particulière, non seulement parce qu'elle est la plus simple, mais surtout parce qu'à un de ses points correspondent *deux* couples d'arguments hyperelliptiques. Les surfaces les plus générales ne possèdent évidemment pas cette propriété; aussi leurs caractères fondamentaux sont-ils différents de ceux de la surface de Kummer.

» Cinq Chapitres sont consacrés à l'étude de ces surfaces et des courbes qu'on peut tracer sur elles; le plus important est celui où se trouve établie la liaison entre les fonctions hyperelliptiques et les surfaces adjointes à une surface donnée.

» Grâce à cette liaison, qui est la généralisation de notre théorème *fondamental* pour la surface de Kummer, nous donnons un certain nombre de résultats géométriques se rapportant au nombre des surfaces adjointes, aux surfaces adjointes de contact, aux sections planes, etc.

» Les deux derniers Chapitres de cette section font connaître quelques familles de surfaces et quelques surfaces hyperelliptiques remarquables: nous signalerons, en particulier, une intéressante surface d'ordre huit.

» La dernière Partie du Mémoire, fort courte, se rapporte aux surfaces hyperelliptiques telles qu'à chacun de leurs points correspondent deux couples d'arguments; ces surfaces sont représentables point par point sur la surface de Kummer. »

*Hadamard* (*J.*). — Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. (171-215).

La première Partie de ce Mémoire est consacrée à l'étude des relations qui existent entre la loi de décroissance des coefficients d'une série entière

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

et l'ordre de grandeur de la fonction $F(x)$ pour les grandes valeurs de la variable. A citer ce théorème :

*Si le coefficient de $x^m$ est moindre que $\frac{1}{(m!)^\alpha}$, la fonction croît moins vite que $e^{Hx^{\frac{1}{\alpha}}}$, où H est une certaine constante.*

Inversement on peut chercher la loi de décroissance des coefficients, connaissant la loi de croissance de la fonction pour les grandes valeurs de $x$. Ensuite l'auteur étudie les fonctions de la forme $e^{G(x)}$, où G est elle-même une fonction entière, et déduit de leurs propriétés une démonstration nouvelle du célèbre théorème de M. Picard sur les fonctions entières.

La deuxième Partie traite de l'ordre de grandeur des racines et du genre des fonctions entières. Son objet principal est de compléter un important théorème de M. Poincaré, qui s'énonce ainsi :

*Dans une fonction entière de genre* E, *le coefficient de $x^m$, multiplié par la racine* $(E+1)^{\text{ième}}$ *du produit des m premiers nombres, tend vers zéro quand m croît indéfiniment.*

L'auteur parvient à établir que

*Lorsque le coefficient $a_m$ est de l'ordre de $(m!)^{-\frac{1}{\lambda}}$, où $\lambda$ n'est pas entier, la fonction* $F(x)$ *est du genre* E, $E+1$ *étant l'entier immédiatement supérieur à* $\lambda$,

ce qui est la réciproque du théorème de M. Poincaré, démontrée pour $\lambda$ non entier. Si $\lambda$ est un entier $E+1$, il y a doute : la fonction peut être du genre E ou du genre $E+1$.

La troisième Partie du Mémoire comble une grave lacune que Riemann avait laissée subsister dans sa théorie de la fonction $\zeta(s)$. La question est de trouver le genre de la fonction paire

$$\xi(x) = \frac{1}{2} - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{x}{2}\log t\right) dt,$$

où l'on a posé

$$\Psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t},$$

cette fonction $\xi$ étant considérée comme une fonction de $x^2$. Riemann avait admis sans preuve acceptable que ce genre est zéro. M. Hadamard justifie cette divination, en s'appuyant sur les résultats des deux premières Parties de son Travail.

*Picard* (*Ém.*). — Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires. (217-271).

Le principal intérêt des méthodes d'approximations successives, dont M. Picard a montré toute la portée, est de pouvoir servir à l'*étude des propriétés des*

*fonctions définies par les équations différentielles.* C'est ce dont l'auteur donne ici de nouveaux exemples.

Il commence par traiter des équations

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

et de celles de leurs intégrales qui, pour $x^0$, prennent des valeurs données. Sous certaines conditions, il montre que ce système d'intégrales reste *fini et bien déterminé* dans un intervalle qui peut aller jusqu'à comprendre *toutes* les valeurs négatives et positives de $x$.

Sous d'autres conditions, *un même développement représentera ces intégrales pour toute valeur positive de $x$;* la méthode fournit, dans d'autres cas, des suites convergentes de fonctions qui ne tendent vers les intégrales cherchées que si elles convergent *uniformément* vers leurs limites.

Les paragraphes qui suivent sont consacrés à une méthode d'approximations permettant d'obtenir les intégrales d'un système de $n$ équations du second ordre, assujetties à prendre des valeurs données pour *deux* valeurs de la variable. Le système de fonctions déterminé par la méthode est *unique*, dans les conditions très peu restrictives où se place l'auteur.

La théorie est ensuite appliquée à un système d'équations telles que

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(y, z, \ldots, u) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} + f_m(y, z, \ldots, u) = 0,$$

et d'abord dans le cas où ce système est linéaire : la méthode donne alors un résultat convergent dans un intervalle déterminé. Elle permet, quand les fonctions $f_1, \ldots, f_m$ ne sont pas linéaires, de représenter les intégrales dans un champ fort étendu, parfois même de faire leur étude complète.

Parmi les applications, nous signalerons la démonstration de l'existence, pour certaines équations, de solutions périodiques que la méthode des approximations successives fournit sous forme de séries convergentes.

## *Picard* (*Ém.*). — De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée. (273-291).

L'auteur revient, pour les compléter, sur les résultats de ses recherches antérieures (*Journal de Mathématiques*, 1890) relativement à diverses équations aux dérivées partielles. Il établit, par une analyse fort délicate, l'importante proposition que voici :

Étant donnée une surface de Riemann à $m$ feuillets, il existe une intégrale, et une seule, de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u,$$

jouissant des propriétés suivantes : elle est uniforme et continue sur la sur-

face, sauf en des points donnés $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et aux $m$ points à l'infini sur chacun des feuillets. On suppose que l'on ait dans le voisinage de $O_i$

$$u = \beta_i \log r_i + v_i,$$

$v_i$ étant continue en $O_i$ et $r_i$ désignant la distance de $(x, y)$ à $O_i$.

Pour le point à l'infini sur le feuillet de rang $k$, imaginons qu'on le ramène à distance finie par une inversion; en l'appelant alors $O'_k$, on aura

$$u = \alpha_k \log r'_k + V_k,$$

$V_k$ étant continue en $O'_k$ et $r'_k$ désignant la distance du transformé de $(x, y)$ au point $O'_k$.

Les constantes $\alpha$ et $\beta$ sont données et l'on suppose

$$\beta_i > -2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\alpha_k > 2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 0.$$

## *Duhem* (*P.*). — Commentaire aux principes de la Thermodynamique. (293-359).

Deuxième Partie du Travail d'ensemble dont le commencement a paru dans le volume précédent du *Journal*.

### Tome X; 1894.

## *Painlevé* (*Paul*). — Mémoire sur la transformation des équations de la Dynamique. (5-92).

Étant donné un système d'équations de Lagrange

$$(A) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où les $Q_i$ ne dépendent ni des vitesses, ni du temps, et où T, forme quadratique par rapport aux $q'_i$, est aussi indépendante de $t$

$$2T = \sum A_{ij} q'_i q'_j = \frac{ds^2}{dt^2} \qquad (A_{ij} = A_{ji}),$$

on dit qu'il admet pour *correspondant* le système analogue

$$(A_1) \qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = Q'_i, \qquad \frac{dq_i}{dt_1} = q'_i,$$

où

$$2T_1 = \sum A'_{ij} q'_i q'_j = \frac{ds_1^2}{dt_1^2},$$

si les *trajectoires* de (A) et de ($A_1$) *coïncident,* le mouvement sur ces trajectoires différant en général d'un système à l'autre.

Si, dans le système (A), on conserve la variable $t$, mais qu'on effectue sur les $q_i$ un changement de variables

$$q_i = \varphi_i(r_1, r_2, \ldots, r_k),$$

$ds^2$ se change en une expression de même nature $d\sigma^2$, et le système (A) en un système (B) de même forme. On dit que $ds^2$ et $d\sigma^2$, et aussi les systèmes (A) et (B) sont *homologues.*

Si deux systèmes (A) et (B) sont homologues, les $ds^2$ et $d\sigma^2$ le sont aussi, mais la réciproque n'est pas vraie.

Le Mémoire de M. Painlevé est consacré à l'étude des systèmes *correspondants* d'un système (A) que l'auteur représente par la notation condensée $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q\right)$, ou par $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, U\right)$ quand les $Q_i$ dérivent d'un potentiel.

*Un système quelconque admet toujours une infinité de correspondants*

$$\left(C\frac{ds^2}{dt_1^2}, cQ_i\right) \qquad \frac{dt_1}{dt} = \sqrt{\frac{C}{c}},$$

où C et $c$ sont des constantes arbitraires; et qui seront dits *semblables* à lui.

Lorsque les $Q_i$ dérivent d'un potentiel, le système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, U\right)$ admet une infinité de correspondants

$$\left[(\alpha U + \beta)\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, \qquad \frac{\gamma U + \delta}{\alpha U + \beta}\right],$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont des constantes ($\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$). Ces systèmes, découverts par M. Darboux, sont dits les *correspondants ordinaires* du proposé.

M. Painlevé a étudié les systèmes (A) qui possèdent des correspondants autres que les correspondants *ordinaires.* Il distingue deux cas suivant qu'il y a des forces ou que tous les $Q_i$ sont nuls.

Premier cas : *Tous les* $Q_i$ *sont nuls.* — On a alors le théorème suivant :

*Soient* $ds^2$ *et* $ds_1^2$ *deux* $ds^2$ *correspondants* (*non semblables*), $\Delta$ *et* $\Delta_1$ *leurs discriminants* (*relatifs aux* $q_i$). *L'expression*

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}} \frac{ds_1^2}{ds^2}$$

*est une intégrale première des géodésiques; les expressions*

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}} \frac{ds_1^2}{ds^2}, \qquad \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{2}{1+k}} \frac{ds^2}{ds_1^2},$$

*sont respectivement des intégrales quadratiques des deux systèmes*

$$\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right), \qquad \left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q_i = 0\right).$$

*et l'on passe d'un système à l'autre par la transformation*

$$\frac{dt}{\Delta^{\frac{1}{1+k}}} = C\frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{1+k}}},$$

C *étant un nombre arbitraire, ou une intégrale première quelconque des géodésiques.*

Deuxième cas : *Les forces* $Q_i$ *de* (A) *ne sont pas toutes nulles.* — On démontre qu'on peut passer du système (A) à un système correspondant ($A_1$) par un changement de variables bien déterminé

$$\frac{dt_1^2}{dt^2} = \lambda^2(q_1, q_2, \ldots, q_k)\left(\frac{d\sigma^2}{dt^2} - V\right) = \lambda^2(\tau - V),$$

$\tau - V$ étant ou bien une constante absolue, ou bien une intégrale quadratique de (A).

Une fois en possession de ces résultats, on est en mesure d'aborder les deux problèmes suivants :

I. *Déterminer les substitutions*

$$q_i = \varphi_i(r_1, r_2, \ldots, r_k),$$

*qui transforment en lui-même l'ensemble des trajectoires de* (A).

II. *Déterminer les systèmes de forces* $R'_i$ *telles que, si on les substitue aux* $Q_i$ *dans* (A), *les nouvelles trajectoires se déduisent des premières en changeant les* $q_i$ *en* $\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$.

## *Willotte.* — Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide. (93-116).

Suite et fin des Travaux publiés sous ce titre dans les Tomes VII et IX du *Journal*. La théorie qui y est présentée, dit l'auteur, rend compte de :

1° La loi de Dulong et Petit sur les chaleurs spécifiques pour les solides à basse température;
2° La loi de la dilatation des solides à basse température;
3° Les lois de la pression dans les gaz parfaits;
4° La loi d'Avogadro et d'Ampère dans les gaz parfaits;
5° Le *postulatum* du principe de Carnot;
6° La loi de Newton sur le refroidissement des solides à basse température.

## *Lindelöf (E.).* — Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires. (117-128).

L'auteur commence par établir qu'il ne peut y avoir qu'*un seul* système d'intégrales prenant des valeurs initiales données, et cela dans des conditions assez générales, notamment sans supposer l'existence de dérivées des fonctions

qui figurent dans les seconds membres des équations (réduites à la forme normale).

Vient ensuite l'exposé de la méthode de M. Picard, avec une modification heureuse que M. Lindelöf y a apportée.

Enfin cette méthode est appliquée à la démonstration d'un théorème de M. Poincaré sur les équations différentielles où figure un paramètre arbitraire.

*Perrin* (*R.*). — Sur le sous-discriminant (ou covariant biquadratique lié à l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences). (129-168).

Après avoir établi d'une manière générale les propriétés de ce covariant, l'auteur indique une méthode spéciale pour le calculer en partant du discriminant supposé connu, et pour trouver rapidement son expression en fonction des covariants simples, pourvu que l'on connaisse la chaîne des syzygies qui relient le discriminant lui-même aux $n-1$ covariants principaux (associés à la forme, supposée d'ordre $n$). L'application de cette méthode est faite aux formes binaires des troisième, quatrième, cinquième et sixième ordres, en insistant spécialement sur le cas de la forme du cinquième ordre, à raison des conséquences nouvelles auxquelles conduit la considération du sous-discriminant.

*Humbert* (*G.*). — Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques. (169-201).

Premier Mémoire : *Des involutions sur les courbes algébriques.* — Une série de groupes de $n$ points, sur une courbe algébrique quelconque, étant telle que chaque groupe soit déterminé d'une manière unique et sans exception si l'on en donne $k$ points, l'auteur dit que ces groupes forment une *involution d'ordre n et d'espèce k.*

Il démontre que les involutions d'espèce supérieure à l'unité sont :

1° Ou des involutions dont l'espèce est égale à l'ordre, c'est-à-dire dont chaque groupe est formé par $n$ points arbitraires de la courbe;

2° Ou des involutions rationnelles, c'est-à-dire dont les groupes sont ceux que découpent sur la proposée des courbes appartenant à un même système linéaire.

Les involutions non rationnelles, en dehors de celles dont l'espèce égale l'ordre, sont toutes d'espèce 1 et il n'en existe pas sur une courbe prise au hasard.

Les conditions d'existence de pareilles involutions sont ensuite précisées.

Deuxième Mémoire : *Sur une classe de surfaces algébriques à génératrices unicursales.* — Démonstration et application à la surface de Steiner du théorème suivant :

*Si l'on peut tracer, sur une surface algébrique, une série simplement infinie de courbes unicursales de même ordre m, se coupant deux à deux en un point mobile, la surface est représentable point par point sur le plan. Elle admet une série linéaire doublement infinie de courbes unicursales d'ordre m, se coupant deux à deux en un point et dont fait partie la série*

*primitive; ces courbes ont pour images les droites du plan, et les sections planes de la surface ont pour images des courbes quelconques d'ordre m.*

Troisième Mémoire : *Des séries de courbes algébriques tracées sur les surfaces algébriques.* — Étude des séries de courbes algébriques tracées sur les surfaces qui n'admettent point d'intégrales de différentielles totales de première espèce; application aux surfaces à génératrices unicursales.

*Painlevé* (*P.*). — Note au sujet du Mémoire précédent. (203-206).

*Duhem* (*P.*). — Commentaire aux principes de la Thermodynamique. (207-285).

Troisième et dernière Partie du Travail d'ensemble dont les deux premières Parties ont paru dans les deux Volumes précédents du *Journal de Mathématiques*. Voici quelques extraits de la conclusion :

« Les physiciens qui ont traité de la Thermodynamique ont placé cette Science, vis-à-vis de la Dynamique, dans deux positions distinctes.

» Les fondateurs de la Thermodynamique ont presque tous incliné à faire de cette Science une application de la Dynamique; regardant la chaleur comme un mouvement,... ils ont tenté de déduire les théorèmes de la Thermodynamique des théorèmes de la Mécanique rationnelle; leurs tentatives ont été aisément couronnées de succès dans le domaine du principe de la conservation de l'énergie;... le principe de Carnot n'a pu, jusqu'ici, être déduit d'une manière pleinement satisfaisante des propositions de la Dynamique.

» Beaucoup de physiciens ont cherché à rendre la Thermodynamique indépendante de toute hypothèse sur la nature de chaleur; ils ont essayé de l'établir, non sur des théorèmes empruntés à la Mécanique rationnelle, mais sur des principes qui lui soient propres....

» Nous avons essayé, dans le présent Travail, d'indiquer une troisième position de la Dynamique par rapport à la Thermodynamique; nous avons fait de la Dynamique un cas particulier de la Thermodynamique, ou plutôt nous avons constitué sous le nom de *Thermodynamique* une Science qui embrasse dans des principes communs tous les changements d'état des corps, aussi bien les changements de lieu que les changements de qualités physiques. »

*Liouville* (*R.*). — Note au sujet d'un Mémoire de M. Painlevé sur les équations de la Dynamique. (287-289).

*Padé* (*H.*). — Sur la généralisation des fractions continues algébriques. (291-329).

Étant données $n$ séries entières $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ayant un terme constant différent de zéro, il existe en général, ainsi que l'a montré M. Hermite, des polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de degrés $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ satisfaisant à l'équation

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \ldots + S_n X_n = S x^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+n-1},$$

où S est aussi une série entière. Il s'agit d'obtenir, pour le calcul de proche

en proche de ces $n$ polynomes, un algorithme analogue à celui par lequel on calcule le numérateur et le dénominateur d'une réduite de fraction continue, au moyen des numérateurs et dénominateurs des réduites précédentes.

Dans la première Partie de son Travail, M. Padé expose la méthode de M. Hermite, mais en partant de principes tout différents qu'il emprunte à sa Thèse de Doctorat.

Dans la seconde Partie, il présente l'extension complète, au cas de trois séries, de la théorie des fractions continues simples. Il étudie ensuite plus particulièrement ceux des algorithmes obtenus qui sont réguliers et qui généralisent le calcul des réduites des fractions continues régulières; ce sont les plus importants et ceux qui donnent, pour le calcul effectif des polynomes, les méthodes les plus simples. Le Mémoire se termine par un aperçu de ce que deviennent ces différents résultats dans le cas général de $n$ séries.

## *Raffy* (*L.*). — Détermination des éléments linéaires doublement harmoniques. (331-390).

Ce Mémoire contient la solution complète d'un problème abordé dans un cas particulier par M. Sophus Lie et proposé par M. Darboux aux efforts des géomètres : *Déterminer tous les éléments linéaires doublement harmoniques,* c'est-à-dire réductibles de deux manières, et par suite d'une infinité de manières, au type

$$ds^2 = [\varphi(x+y) - f(x-y)]\,dx\,dy.$$

Un premier Chapitre contient d'abord leur classification : 1° éléments linéaires convenant à une surface à courbure totale constante, nulle ou différente de zéro; 2° éléments linéaires convenant à une surface de révolution, mais non à une surface à courbure totale constante; 3° éléments linéaires ne convenant pas à une surface de révolution.

Ensuite viennent deux lois importantes, la *loi de passage,* qui fait connaître le moyen de passer d'une forme harmonique de l'élément linéaire à une autre, et la *loi de réciprocité,* qui de toute solution connue du problème permet d'en déduire une nouvelle, sans aucun calcul.

Les Chapitres II et III donnent toutes les formes harmoniques des éléments linéaires des deux premières classes, avec les changements de variables pour passer de l'une à l'autre.

Au Chapitre IV, la loi de réciprocité intervient pour fournir, à l'aide des résultats précédents, *trente-sept formes distinctes d'éléments linéaires doublement harmoniques.*

Il est ensuite démontré que ces *trente-sept formes constituent toutes les solutions du problème proposé.* Pour établir qu'il en est bien ainsi, l'auteur commence par démontrer (de deux manières) que les fonctions cherchées sont *nécessairement uniformes.*

Il prouve ensuite qu'*elles n'ont à distance finie d'autres singularités que des pôles, qui sont des pôles doubles à résidu nul;* enfin que ce sont des *fonctions doublement périodiques, proprement dites ou dégénérescentes,* ce qui lui permet d'arriver au résultat annoncé.

Dans un dernier Chapitre, il complète la théorie de la représentation géodésique des surfaces en démontrant que *toute surface susceptible d'être repré-*

*sentée géodésiquement sur certaines surfaces avec conservation d'une seule des familles de longueur nulle et sur d'autres avec conservation de ces deux familles est une surface doublement harmonique.*

Il termine en indiquant comment on déduirait de ses formules les éléments linéaires des surfaces que M. Sophus Lie avait été amené à considérer sous le nom de *surfaces de troisième classe.*

## *Hamy* (*M.*). — Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé. (391-472).

Lorsque l'inclinaison relative $\gamma$ des plans des orbites de deux planètes P et $P_1$ est petite, la partie principale de la fonction perturbatrice s'exprime au moyen d'une série procédant suivant les puissances de $\sin^2\frac{\gamma}{2}$.

Les coefficients des puissances de $\sin^2\frac{\gamma}{2}$ sont des fonctions de deux arguments $\zeta$ et $\zeta_1$. M. Hamy a cherché l'expression asymptotique des coefficients de

$$\cos(m\zeta + m_1\zeta_1), \qquad \sin(m\zeta + m_1\zeta_1),$$

lorsque les entiers $m$ et $m_1$ sont grands; il suppose l'excentricité de $P_1$ nulle, celle de P quelconque, l'orbite circulaire de $P_1$ enveloppant sans la rencontrer l'orbite elliptique de P.

Il s'appuie principalement sur les travaux de M. Darboux relatifs à l'approximation des fonctions de grands nombres et met à profit les recherches plus récentes de M. Poincaré sur les méthodes de la Mécanique céleste.

Après d'importants développements théoriques, son Mémoire présente des applications numériques à Mercure, ainsi qu'à Jupiter et à Junon.

## *Humbert* (*G.*). — Sur la surface de Kummer. (473-474).

Erratum typographique relatif à un passage du Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques publié dans le Volume précédent du *Journal de Mathématiques* (p. 58; année 1893).

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXV.

# TABLES

DES

# MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXV; 1901. — SECONDE PARTIE.

## TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

### RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta Mathematica. T. XX, 1897 — 186-211.
Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. 3e série, t. XVI, 1899. — 120-133.
Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. T. XXXII, XXXIII, 1896-1898. — 227-238.
Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXVIII, 1900. — 154-169.
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. CXXVIII, CXXIX, 1899; T. CXXX, 1900; T. CXXXI, 1900. — 89-101, 169-185, 217-227.
Journal de l'École Polytechnique. T. LXIII, 1893; T. LXIV, 1894. — 212-216.
Journal de Mathématiques pures et appliquées. 4e série, t. I, 1885. — 248-308.
Journal f. d. r. u. a. Mathematik. T. 102-104, 1888-1889. — 134-153.
Nouvelles Annales de Mathématiques. 3e série, t. XIX, 1900. — 239-247.
Sitzungsberichte der Math. Ph. Classe der K. Bayerischen Academie der Wissenschaften zu München. T. XXIV, 1880-1894. — 33-88.
The Messenger of Mathematik. T. XXVII-XXIX, 1898-1899. — 5-11.
Zeitschrift für Mathematik und Physik. T. XL-XLIII, 1895-1898. — 12-32.

310

# TABLE DES NOMS D'AUTEURS

## PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.


Abonné (un). 247.
Ahrens (W.). 15, 16, 26.
Aimonetti (C.). 229.
Almansi (E.). 231.
Amodeo (F.). 185.
Andrade. 101, 117, 158, 215.
Anglin (A.). 256.
Anonyme. 247.
Appell (P.). 111, 112, 113, 114, 115, 118, 158, 252, 259, 277, 288, 294.
August (F.). 140.
Autonne (L.). 94, 159, 172, 173, 212, 213, 253, 254, 260, 269.
Audibert. 247.
Baggi (V.). 234, 236.
Baire. 118, 120, 163.
Balbi (V.). 233, 237.
Barness. 10.
Bauer (G.). 34, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 47, 52, 74, 240.
Bauer (M.). 246.
Bauernfeind (von). 33, 35, 44.
Beck. 23.
Beez. 20, 30.
Berry (A.). 112.
Berthold (G.). 29.
Bertini. 227, 233.
Berzolari (L.). 236.
Bettazzi (R.). 229, 234.
Beudon. 103, 160.
Beyel. 14, 16, 18, 26, 28.
Biddle (D.). 8, 9.
Bigler. 137.
Bilenki (H.). 241.
Blater (I.). 26.
Blutel. 93, 98, 245.
Bobynin (von). 25.
Bohlin (K.). 211.
Bois-Reymond (du). 35, 145, 152.
Boltzmann (L.). 50, 51, 53.
Borel (E.). 92, 94, 97, 120, 123, 165, 179, 180, 208, 223.
Bougaïev. 222.
Boulanger (A.). 170.
Bourlet (C.). 126.
Boussinesq. 99, 100, 117, 118, 184, 185, 217.
Brandford (B.). 8.
Brauer (E.). 28, 32.
Braunmühl (von). 38, 40.
Bricard (R.). 157, 174, 243.
Brill (A.). 38, 39, 41, 43, 46.
Bromwich (T.). 12.
Brunn (H.). 47, 50.
Burali-Forti (C.). 228.
Burmester, 13, 18.
Burnside (W.). 7.
Busche (E.). 119, 143, 147.
Campbell (I.). 7.
Campetti (A.). 228.
Candido (G.). 242.
Cantor (M.). 22.
Cardinaal (J.). 136.
Cartan (E.). 125.
Caspary (F.). 167, 240, 274, 280.
Castelnuovo. 222.
Cazzaniga (T.). 237, 238.
C. B. 28.
Cellérier. 288, 289.
Cesàro (E.). 245.
Charlier (C.). 63.
Chessin. 97.
Chini (M.). 236.
Clairin (J.). 171, 179.

Collignon (E.). 239, 244.
Cordier (Le). 253.
Cosserat (E.). 171, 172.
Cotton (E.). 95.
Coulon (J.). 106, 177, 179, 182.
Cranz (C.). 27, 36.
Crelier. 92.
Cunningham (A.). 12.
Curjel (H.). 9.
Curtze (M.). 19, 25, 29, 33.
Darboux (G.). 95, 98, 99, 101, 102, 103, 105, 106, 131, 132, 153, 262.
David. 260.
Davidoglou. 173, 175, 181.
Delaunay. 16.
Delitala. 224.
Demoulin (A.). 111, 163, 177, 185, 219.
Desaint. 179, 182.
Dickson (L.). 100, 102.
Disteli (M.). 29.
Dixon (A.). 9.
Dochlemann (K.). 23, 50.
Dolbnia (J.). 243, 280.
Döllinger (von). 39
Droz-Farny (A.). 247.
Duhem (P.). 118, 225, 272, 296, 302, 306.
Dulac (H.). 111.
Dumont. 160.
Duporcq (E.). 241.
Duport (H.). 170.
Dyck (W.). 45, 48, 50, 53, 57, 58, 74, 78, 88.
Ebert (W.). 219.
Ebner (F.). 27.
Efimov (M.). 240.
Egorov. 221.
Eisenstein. 19.
Elliot (E.). 12.
Enriques. 222.
Epstein (P.). 186.
Estienne. 169, 173.
Fabry (E.). 89.
Fano (G.). 235.
Fellini (D.). 228.
Finsterwalder (S.). 25, 30, 40, 42.
Floquet (G.). 185, 217, 221.
Foerster (O.). 23.
Fontené (G.). 241, 243, 246, 247.
Föppl (A.). 69.
Fouché (M.). 224.
Franke (J.). 75.
Fredholm. 109, 224.
Frobenius (G.). 144.
Gallucci (G.). 241.
Garbano. 233.
Genocchi (A.). 153.
Gerber (P.). 31.
Giester (J.). 36.
Gilbert (P.). 272.
Glaisher (J.). 5, 6, 7, 9, 10.
Glan (P.). 77.
Godt (W.). 62.
Goodwin (J.). 8.
Gordan (P.). 41, 254.
Gosset (T.). 9.
Goursat (E.). 96, 109, 114, 116, 154, 262.
Guichard (C.). 92, 97, 98, 103, 105, 109, 110, 116, 118, 170, 174, 218, 228.
Guidi (C.). 228.
Guldberg (A.). 183.
Gutzmer (A.). 283.
Hadamard (J.). 158, 198, 293, 299.
Haerdtl (von). 46.
Halphen (G.). 248, 266, 273, 279.
Hambürger. 146.
Hammer (E.). 30, 31.
Hamy. 278, 308.
Hardy (G.). 9.
Hatt. 89.
Hatzidakis. 101, 148, 175.
Heckhoff, 17.
Heffter (L.). 22.
Heiberg (J.). 19.
Heilermann. 25.
Helm (G.). 33.
Hensel (K.). 139, 145.
Hermite (C.). 248.
Hess (W.). 38.
Heydenreich (E.). 33.
Heymann (W.). 20, 24, 26, 142.
Hilbert (D.). 147, 242, 270.
Hofmann (F.). 136.
Holzmüller. 27, 32.
Houston (W.), 8.
Hudson (A.). 12.
Hudson (R.). 12.
Hugoniot (H.). 265, 266.
Humbert (G.). 115, 119, 174, 214, 253, 256, 263, 267, 274, 279, 284, 290, 298, 305, 308.
Hürwitz (A.). 93, 203.
Hyde, 26.
Iaggi (E.). 244, 245, 246.
Issaly. 240, 243, 246.
Jablonski (E.). 258, 296.
Jadanza (N.). 235, 237.
Jaerisch (P.). 150.
Jamet (V.). 244, 246.
Jevrold (A.). 242.
Jordan (C.). 272, 293.

Jouguet. 227.
Junker (F.). 23.
Kantor (S.). 64, 75, 222.
Karl (A.). 26.
Kilbinger. 26.
Kinkelin. 13.
Kleiber (J.). 23.
Kleiber (von). 34, 35, 37.
Klein (F.). 36, 269.
Kluyver (J.). 15.
Kobb (G.). 297.
Kobell (von). 34, 35, 37.
Koch (von). 181.
Kœnigs (G.). 226, 274.
Kœnigsberger (L.). 39, 41, 137, 146, 150.
Kollros (L.) 219.
Kommerell (von). 21.
Korn (A.). 72, 77, 174, 181, 217.
Korselt (A.). 28, 32, 33.
Korteweg (J.). 25.
Köstlin (W.). 20,
Kötter (F.). 141.
Kowalewski (G.). 27.
Kneser (A.). 135.
Knoblauch (L.). 140, 141.
Krause (M.). 227, 260.
Kronecker (L.). 138, 153.
Krüger (H.). 15.
Kuen (Th.). 38.
Kurz. 13, 15, 16, 21, 22, 23.
Lacour (E.). 243.
Lagrange (A.). 240, 246.
Laguerre. 249.
Lamioni (C.). 246.
Lampe (E.). 229.
Landau (E.). 117, 156, 243.
Lauricella (J.). 238.
Leau. 99.
Léauté (H.). 265.
Lebesgue (H.). 99, 107, 117, 223, 224, 225.
Lefebvre (P.). 241.
Lehmann-Filhès (R.). 60.
Lémeray. 92, 242.
Lerch (M.). 105.
Lévi (B.). 234.
Lévy (L.). 297.
Lévy (M.). 114, 270.
Lévi-Civita. 101, 218, 237.
Liapounoff. 100, 102, 227.
Liebmann (H.). 21.
Lilienthal (von). 153.
Lipschitz. 256, 258.
Lindeberg (J.). 184.
Lindelöf (E.). 304.
Lindemann (F.). 53, 56, 62, 63, 64, 68, 75, 77.
Liouville (R.). 201, 221, 306.
Lodge (A.). 5.
Lœwy (A.). 61.
Lommel (E.). 37, 40.
London (F.). 22.
Longchamps (G. de). 242.
Lovett (E.). 90, 108, 111, 112.
Ludwig (F.). 32.
Lüroth (J.). 6, 32, 38, 47.
Maillet (E.). 92, 106, 111, 155, 182, 184.
Mangeot (S.). 113, 245.
Mannheim (A.). 254.
Marotte (P.). 115.
Mathieu (L.). 32.
Maurel (L.). 41, 51.
Mehmke (R.). 13, 16, 26, 29, 30.
Méray (C.). 100, 124.
Mercier (G.). 11.
Mertmelann (A.). 33.
Meslin (G.). 178.
Meyer (A.). 143.
Meyer (Fr.). 39.
Michel (C.). 178, 241.
Miller (G.). 7, 8, 91, 168.
Mittag-Leffler. 103.
Moncheuil (de). 169.
Morrice. 11.
Moutard (T.). 214.
Müller (R.). 16, 18, 20, 27, 30.
Nanson (E.). 5, 7, 9.
Netto (E.). 15, 18, 21, 146, 153.
Nicoletti (H.). 229, 232, 236, 237.
Nöther (M.). 43, 56.
Ocagne (M. d'). 32, 71, 163, 174, 212, 215, 220, 234, 242.
Oppenheimer (H.). 24.
Orff (K. von). 71, 75.
Padé (H.). 117, 118, 128, 169, 176, 306.
Painlevé (P.). 104, 107, 109, 110, 116, 118, 165, 166, 177, 178, 180, 184, 302, 306.
Pascal (E.). 175.
Peano (G.). 233.
Peano (J.). 229, 235.
Pellet (A.). 92, 93.
Pépin (le P.). 108, 267, 277.
Perott (J.). 137.
Perrin (R.). 305.
Petrini (H.). 171.
Pétrovitch (M.). 102, 115, 117.
Phragmén. 106.
Picard (E.). 91, 105, 107, 114, 122, 161, 164, 173, 180, 183, 249, 251, 257, 274, 278, 291, 300, 301.

Pieri (M.). 228.
Pincherle (S.). 94, 142.
Pirondini. 240.
Pizetti (P.). 224.
Planck. 52.
Plessis (P. du). 242.
Pochammer (L.). 136, 149.
Poincaré (H.). 93, 97, 102, 188, 205, 215, 250, 256, 264, 280, 292.
Poisson (G.). 89, 143.
Pringsheim (A.). 48, 53, 55, 58, 59, 62, 65, 70, 73, 74, 76, 82, 86.
Ptaszycki. 169-170.
Raffy (L.). 93, 307.
Ramorino (A.). 229.
Ravené (G.). 228.
Renaux. 113, 114.
Retali (V.). 247.
Reuschl (C.). 21.
Reye (T.). 150.
Reynolds (B.). 6, 7.
Ribaucour (A.). 284.
Ribière. 90.
Richter (O.). 29.
Ripert. 158, 165, 244, 247.
Riquier. 170.
Rivereau (P.), 295.
Rizzo. 233.
Routh (G.). 8.
Roux (Le). 178.
Roy (Le). 95, 182, 183.
Rudio (F.). 19, 148.
Runge (C.). 27.
Ruska (J.). 19.
Saalschütz (L.). 25.
Saint-Germain (A. de). 181, 245, 249.
Saltykow (N.). 90, 91, 92, 108, 110, 111.
Sar. 241.
Schafheitlin (P.). 142.
Scheibner (W.). 138, 142.
Scheye (A.). 27.
Schilling (F.). 18, 25.
Schlegel (V.). 24.
Schlesinger (L.). 29.
Schlömilch (O.). 13, 14, 21.
Schmidt (A.). 14, 58.
Schottky (F.). 139, 145.
Schröter (H.). 37, 148.
Schultz (E.). 17.
Schulze (E.). 28.
Schur (F.). 13.
Schüssler (R.). 26.
Schütz (I.). 51.
Schwering (K.). 135.
Seeliger (H.). 38, 40, 42, 43, 44, 51, 53, 61, 63, 82.
Segre (C.). 229, 233.
Seidel. 34, 35.
Servant. 89, 169, 222.
Severini. 238.
Simon (H.). 25.
Somoff (P.). 26.
Sondat. 239.
Sparre (de). 157.
Sporer (B.). 14, 15, 19, 23.
Stephanos (C.). 96.
Stäckel (P.). 28, 29, 98, 99.
Stäckel (W.). 30.
Stahl (W.). 147, 152.
Stekloff (W.). 92, 96, 99, 102, 173, 174, 178, 184, 221, 223, 225, 226.
Stern (A.). 19.
Stern (M.). 24.
Stieltjes. 273, 277.
Störmer (C.). 162, 184.
Sturm (R.). 12.
Stuyvaert. 246.
Sylow. 260.
Szüts (N. von). 14.
Tarry (G.). 241.
Teixeira (G.). 274.
Tejèr (L.). 225.
Thieme. 18.
Thybaut (A.). 104, 172, 224.
Thomae. 23, 33.
Thomé (L.). 147.
Timerding (H.). 33.
Torrès. 174.
Touche. 161.
Tresse (A.). 161.
Tzitzéica (G.). 93, 97, 104, 123, 220.
Vacquant (A.). 241, 246.
Vailati (J.). 229, 231, 235.
Vahlen (Th.). 14, 15, 22, 27.
Vallée-Poussin (de la). 297.
Vanecek. 37.
Vaschy. 212.
Vavasseur (Le). 103, 109.
Velten. 17, 24.
Vertheim. 33.
Vessiot. 95.
Vogt. 240.
Voit (von). 40, 42, 44, 51, 56, 63, 75, 88.
Vollprecht (H.). 14, 24.
Volterra (V.). 230, 234, 235.
Voss (A.). 40, 43, 44, 46, 49, 60, 62, 73.
Wälsch (Em). 101.
Wassilief (A.). 19.
Wassmuth (A.). 51.
Weber (E. von). 56, 60, 64, 88.
Weierstrass (K.). 255.
Weingarten (J.). 144, 196.

Wertheim (G.). 29, 196.
Willotte (H.). 291, 298, 304.
Wilsing. 18.
Wiman. 17.
Wittenbauer (F.). 13, 15, 17.
Wittstein (A.). 19.
Wölfing (E.). 13, 25.
Zaremba. 102, 130.
Zelbr (K.). 25.
Züge. 148.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXV.

30068 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

ociences

Cles

This box arrived with some other (requested) stuff - however, the title has been processed -

Thanks
dd